This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

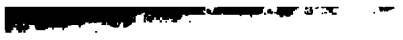
À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Stanford University Libraries
3 6105 027 647 200

TY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES ·
ES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
VERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
RD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIV
SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIB
RARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STA
TY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES ·
ES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
RD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
NFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIV
IVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIB
RARIES VERSITY LIBRARIES STA

UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
ANFORD UNIVERSITY LIBRARY



MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Professeur ordinaire à l'Université de Gand, | Professeur ordinaire à l'Université de Liége
Anciens élèves de l'École normale des sciences,
Membres de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis
PH. BRETON

TROISIÈME SÉRIE.

TOME IV. — ANNÉE 1904.

(TOME XXIV DE LA COLLECTION).

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
23, RUE DU CALVAIRE, 23

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1904

ABRÉVIATIONS.

BB., Bulletin de l'Académie royale de Belgique.

CR., Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

NAM., Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

NCM., Nouvelle Correspondance Mathématiques (1874-1880).

JME., (ou JMS.), Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué G. DE LONGCHAMPS de 1881 à 1897, ensuite par G. MARIAUD 1897 à 1901.

IM., Intermédiaire des Mathématiciens, fondé en 1894 par MM. LAISANT LEMOINE.

AF., Association française pour l'avancement des sciences.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE 1826, continué successivement par BORCHARDT, KRONECKER WEIERSTRASS, par KRONECKER etc. (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVI en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages à 333.

STANFORD LIBRARY
OCT 21 1960
MATHEMATICS

MATHESIS

SUR LE VOLUME ENGENDRÉ PAR UNE FIGURE INVARIABLE,

par M. C. E. Wasteels, Répétiteur à l'Université de Gand.

Depuis Steiner, un grand nombre de Géomètres se sont occupés des aires relatives aux trajectoires des différents points d'une figure invariable. Darboux, après avoir repris la question, est parvenu à généraliser plusieurs propriétés relatives à cette partie de la Cinématique; il a étudié, en outre, les relations qui existent entre les volumes des cônes ayant pour sommet un point fixe et pour bases des portions correspondantes des surfaces trajectoires décrites par les différents points d'une figure invariable dont la position dépend de deux paramètres arbitraires (*).

Après Darboux, plusieurs Géomètres ont traité la question des aires et des volumes engendrés par une courbe ou une surface dans certains mouvements particuliers.

Dans le présent article, nous nous occupons des volumes engendrés par un système de surfaces appartenant à une même figure invariable, *dans le cas du mouvement le plus général de cette figure.*

1. Soit d'abord une figure plane invariable qui se meut suivant une loi quelconque.

Désignons par σ l'aire de cette figure, par $\overline{\sigma}$ son aire linéaire (**), par $\Delta\sigma$ une partie de σ infiniment petite en tous sens, par $\overline{v}$ la vitesse d'un point quelconque M de $\Delta\sigma$ à l'instant t, et par V le volume algébrique engendré par σ depuis l'instant t_0 jusqu'à l'instant t, les volumes décrits

(*) Voir *Bull. des sciences mathém.*, (2) II pp. 333-356.

(**) L'*aire linéaire* d'une surface plane, à laquelle on attribue une face positive et une face négative, est un vecteur dont la longueur a la même mesure que l'aire de la figure plane, ce vecteur étant supposé perpendiculaire à la surface et dirigé dans le sens d'un mobile qui traverserait cette surface en passant du côté négatif au côté positif.

Cette définition s'étend au cas des surfaces courbes par des considérations analogues à celles qui conduisent à la définition de l'aire de ces surfaces.

dans le sens de $\overline{\varpi}$ étant considérés comme positifs, les autres co négatifs.

La différentielle du volume V est donnée par la formule

$$dV = (\lim S\Delta\overline{\varpi}\cdot\overline{v})\,dt.$$

Or, si l'on prend dans le plan mobile un point quelconque O, on que la vitesse $\overline{v}$ est la résultante géométrique de la vitesse $\overline{v}_0$ du po et de la vitesse due à une rotation $\overline{\omega}$ passant par O, de sorte que désignant la coordonnée géométrique $\overline{OM}$ par $\overline{\varepsilon}$, on pourra écrire

$$\overline{v} = \overline{v}_0 + \mathcal{M}\,\overline{\omega\varepsilon}.$$

Par suite,

$$dV = (\lim S\Delta\overline{\varpi}\cdot\overline{v}_0)\,dt + (\lim S\Delta\overline{\varpi}\,\mathcal{M}\,\overline{\omega\varepsilon})\,dt.$$

Mais

$$\Delta\overline{\varpi}\,\mathcal{M}\,\overline{\omega\varepsilon} = \overline{\omega}\,\mathcal{M}\,\overline{\varepsilon}\Delta\overline{\varpi};$$

donc

$$dV = \overline{\varpi v_0}\,dt + (\lim S\,\mathcal{M}\,\overline{\varepsilon}\Delta\overline{\varpi})\,\overline{\omega}dt.$$

Si l'on mène par O trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, dont dernier est perpendiculaire au plan mobile dans le sens de $\overline{\varpi}$ et qu désigne par $\overline{a}_x$, $\overline{a}_y$, $\overline{a}_z$ les vecteurs-unités dirigés suivant ces axes, par la composante de $\overline{v}_0$ suivant Oz, par $\overline{\varepsilon}$ la coordonnée géométrique centre de gravité G de l'aire ϖ et par x, y les coordonnées algébriques ce point, on aura

$$\overline{\varpi v_0} = \varpi v_0', \quad \lim S\,\mathcal{M}\,\overline{\varepsilon}\Delta\overline{\varpi} = \mathcal{M}\,(\lim S\overline{\varepsilon}\Delta\overline{\varpi})\,\overline{a}_z = \overline{\varpi}\,\mathcal{M}\,\overline{\varepsilon a_z};$$

$$(\lim S\,\mathcal{M}\,\overline{\varepsilon}\Delta\overline{\varpi})\,\overline{\omega} = \varpi(y\omega_x - x\omega_y).$$

Par conséquent,

$$dV = \varpi v_0' dt + \varpi y\omega_x dt - \varpi x\omega_y dt;$$

$$V = \varpi\int_{t_0}^{t} v_0' dt + \varpi y\int_{t_0}^{t}\omega_x dt - \varpi x\int_{t_0}^{t}\omega_y dt.$$

3. Si O coïncide avec le centre de gravité G, la formule devient

$$V = \varpi\int_{t_0}^{t} v_0' dt.$$

Cas particuliers. Si le plan se meut parallèlement à lui-même, la valeur absolue de $\int_{t_0}^{t} v_0' dt$ représente la distance h entre les positions initiale et finale du plan mobile, de sorte que la valeur absolue du volume est égale à ϖh.

Si l'on avait, en même temps, $\omega_z = 0$, c'est-à-dire, si le mouvement de la figure était une translation, et si, de plus, cette translation était rectiligne, le volume engendré serait celui d'un cylindre de base ϖ et de hauteur h.

Si la trajectoire de G est normale au plan, $v_0' = v_0$ et la valeur absolue de $\int_{t_0}^{t} v_0' dt$ représente le chemin décrit par le centre de gravité. On voit que c'est une généralisation de l'un des théorèmes de Guldin.

Nous n'insisterons pas davantage sur les cas particuliers de la formule (1), qui sont d'ailleurs connus, notre principal but étant ici d'étudier les relations qui existent entre les volumes engendrés simultanément par plusieurs figures faisant partie d'un même système invariable.

3. Reprenons la formule (1) et posons

$$\int_{t_0}^{t} v_0' dt = A, \quad -\int_{t_0}^{t} \omega_y dt = B, \quad \int_{t_0}^{t} \omega_x dt = C;$$

la formule devient

$$V = \varpi(A + Bx + Cy). \tag{3}$$

Cette formule montre que les volumes (algébriques) engendrés par toutes les figures du plan mobile ayant leurs centres de gravité sur une même parallèle à la droite $Bx + Cy = 0$ sont proportionnels aux aires génératrices.

4. Considérons maintenant, dans le plan mobile, trois aires ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ayant leurs centres de gravité G_1, G_2 et G_3 sur une droite quelconque; prenons cette droite pour axe des x; nous aurons, en désignant les volumes par V_1, V_2 et V_3 et les abscisses des centres de gravité par x_1, x_2, x_3,

$$\frac{V_1}{\varpi_1} = A + Bx_1, \quad \frac{V_2}{\varpi_2} = A + Bx_2, \quad \frac{V_3}{\varpi_3} = A + Bx_3.$$

L'élimination de A et B donne

$$\begin{vmatrix} \frac{V_1}{z_1} & 1 & x_1 \\ \frac{V_2}{z_2} & 1 & x_2 \\ \frac{V_3}{z_3} & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\frac{V_1}{z_1}(x_3 - x_2) + \frac{V_2}{z_2}(x_1 - x_3) + \frac{V_3}{z_3}(x_2 - x_1) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{V_1}{z_1}\overline{G_2G_3} + \frac{V_2}{z_2}\overline{G_3G_1} + \frac{V_3}{z_3}\overline{G_1G_2} = 0.$$

Cas particulier. Si $\overline{z_3}$, appliquée en G_3, est la résultante de $\overline{z}$ appliquées en G_1 et G_2, on a

$$z_1\overline{G_3G_1} + z_2\overline{G_3G_2} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{G_3G_3}}{z_3} = \frac{\overline{G_3G_1}}{z_2} = \frac{\overline{G_2G_1}}{z_3},$$

et la formule (4) devient

$$V_3 = V_1 + V_2.$$

5. Soient actuellement quatre aires z_1, z_2, z_3, z_4 dont les centres de gravité G_1, G_2, G_3, G_4 constituent les sommets d'un quadrilatère.

En conservant les notations du n° précédent, nous aurons

$$\frac{V_1}{z_1} = A + Bx_1 + Cy_1, \quad \frac{V_2}{z_2} = A + Bx_2 + Cy_2, \quad \frac{V_3}{z_3} = A + Bx_3$$

$$\frac{V_4}{z_4} = A + Bx_4 + Cy_4;$$

d'où, par élimination de A, B et C,

$$\begin{vmatrix} \frac{V_1}{z_1} & 1 & x_1 & y_1 \\ \frac{V_2}{z_2} & 1 & x_2 & y_2 \\ \frac{V_3}{z_3} & 1 & x_3 & y_3 \\ \frac{V_4}{z_4} & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\frac{V_1}{u_1}T_1 - \frac{V_2}{u_2}T_2 + \frac{V_3}{u_3}T_3 - \frac{V_4}{u_4}T_4 = 0, \qquad (5)$$

T_1, T_2, T_3 et T_4 désignant les aires algébriques des triangles $G_2G_3G_4$ $G_3G_1G_4$, $G_4G_1G_2$ et $G_1G_2G_3$.

Cas particulier. Si G_1, G_2, G_3, G_4 constituent les sommets consécutifs d'un parallélogramme, on a $T_1 = T_2 = T_3 = T_4$, et, par suite,

$$\frac{V_1}{u_1} - \frac{V_2}{u_2} + \frac{V_3}{u_3} - \frac{V_4}{u_4} = 0.$$

Si, en outre, les quatre aires sont égales, la formule devient

$$V_1 + V_3 = V_2 + V_4,$$

c'est-à-dire que la somme des volumes engendrés par deux aires opposées est égale à celle des deux autres.

6. Considérons, plus généralement, un nombre quelconque d'aires $u_1, u_2, u_3, \dots u_n$, u_k, ayant leurs centres de gravité en $G_1, G_2, G_3, \dots G_n$ et G_k et supposons que $\bar{u}_k$, appliquée en G_k, soit la résultante de $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots \bar{u}_n$ appliquées respectivement en G_1, G_2, G_3, ... G_n. Nous pourrons, dans ce cas, généraliser la propriété exposée au n° 4 (cas particulier).

En effet, la formule (3) donne

$$V_1+V_2+V_3+\dots+V_n = A(u_1+u_2+\dots+u_n)+B(u_1x_1+u_2x_2+\dots+u_nx_n)$$
$$+ C(u_1y_1+u_2y_2+\dots+u_ny_n) = Au_k + Bu_kx_k + Cu_ky_k,$$

ou

$$V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = V_k; \qquad \text{C. q. f. d.}$$

7. La propriété qui précède peut enfin s'étendre aux volumes engendrés par certaines surfaces, planes ou courbes, invariablement liées au système d'axes mobiles $Oxyz$.

Supposons un système de surfaces telles que les aires linéaires correspondantes constituent un système de vecteurs équivalent à zéro. En désignant par V la somme des volumes algébriques engendrés par les surfaces depuis l'instant t_0 jusqu'à l'instant t, on obtient encore, comme au n° 1,

$$dV = (\lim S\Delta\bar{u}.\bar{v}_0)\,dt + (\lim S\Delta\bar{u}\,\mathcal{M}\,\bar{\omega}\bar{\varepsilon})\,dt,$$

ou

$$dV = (\lim S\Delta\bar{u})\,\bar{v}_0 dt + (\lim S\,\mathcal{M}\,\bar{\varepsilon}\Delta\bar{u})\,\bar{\omega}dt.$$

Or,

$$\lim S\Delta\bar{\varpi} = 0 \quad \text{et} \quad \lim S\,\mathcal{M}\bar{\varepsilon}\Delta\bar{\varpi} = 0;$$

par suite,

$$dV = 0.$$

On peut en conclure que la somme des volumes engendrés par l surfaces en question est nulle.

Ce théorème revient au suivant :

Si l'on considère deux systèmes de surfaces faisant partie d'une mêm figure invariable et telles que les aires linéaires correspondant constituent deux systèmes de vecteurs équivalents, la somme des volum engendrés par les premières surfaces sera, à chaque instant, égale à cell des volumes engendrés par les secondes.

Gand, le 27 mai 1903.

SUR UNE FORMULE DE E. LEMOINE,

par M. Droz-Farny.

Dans les examens oraux d'admission, à l'Ecole polytechnique de Paris, on proposait, en 1902, la démonstration de la formule :

$$\cos A = \frac{2R + r - r_a}{2R}. \qquad (1)$$

Cette intéressante formule appartient, je crois, à M. E. Lemoine qui la démontre, d'une manière fort élégante comme application de la transformation continue, dans son mémoire : ***Etude sur le triangle et sur certains points de Géométrographie*** (Proceedings of the Edinburgh Math. Soc., 1894-95.)

Représentons par x, y, z les distances du centre du cercle circonscrit aux trois côtés du triangle; on a la formule connue de Carnot :

$$x + y + z = R + r. \qquad (2)$$

En appliquant à cette formule la transformation continue en A, on obtient

$$-x + y + z = -R + r_a. \qquad (3)$$

Par soustraction on a $2x = 2R + r - r_a$; or, $x = R\cos A$, d'où la formule.

Voici une vérification de la même relation par la trigonométrie :

$$2R + r - r_a = 2R + 4R \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2R\left[1 - 2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\right]$$

$$= 2R\left[1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right] = 2R\cos A.$$

On déduit aisément, de la formule de Lemoine la formule très simple :

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{r_a - r}{4R}}.$$

Il est enfin facile de démontrer la formule (1) par la géométrie élémentaire.

Soient I et I′ les centres des cercles inscrit et ex-inscrit dans l'angle A. La bissectrice AII′ coupe en A′ la circonférence circonscrite au triangle et OA′ rencontre BC en son point milieu L. On sait que A′ est le point milieu de II′, donc :

$$A'L = \frac{r_a - r}{2}.$$

Mais $A'L = R - OL = R - R\cos A$; par conséquent

$$\cos A = \frac{2R + r - r_a}{2}.$$

On déduit encore aisément de la figure, un théorème intéressant.

Soit D le point de contact du cercle inscrit avec le côté BC et L′ le point de rencontre de OA′ avec I′D; cette dernière droite rencontre OI au point P. Comme IA′ = A′I′ on a

$$A'L' = \frac{ID}{2} = \frac{r}{2}; \quad OL' = R + \frac{r}{2} = \frac{2R + r}{2},$$

$$PI : PO = r : \frac{2R + r}{2}, \quad \frac{PI}{PO} = \frac{2r}{2R + r}. \qquad (4)$$

Représentons par D, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les trois côtés du triangle et par I′, I″, I‴ les centres des cercles ex-inscrits, on a le théorème :

Les trois droites I'D, I''E, I'''F *se coupent en un même point* P, *situé sur la droite* OI *et la divisant extérieurement de manière à ce que*

$$\frac{PI}{PO} = \frac{2r}{2R + r}.$$

NOTE. Le dernier théorème se déduit aisément de ce que les triangles DEF, I'I''I''' sont homothétiques. I étant l'orthocentre et O le centre du cercle des neuf points du triangle I'I''I''', le symétrique O' de I par rapport à O est le centre du cercle circonscrit au triangle I'I''I'''; O' est aussi à l'intersection des perpendiculaires abaissées de I', I'', I''' respectivement sur BC, CA, AB. Le centre d'homothétie P des triangles DEF, I'I''I''' divise la droite IO' qui joint les centres des cercles circonscrits dans le rapport de similitude, de sorte que PI : PO' : : r : 2R, d'où la proportion (4). (J. N.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Tangente et normale aux coniques.* — « Vous pouvez appeler l'attention des élèves sur l'observation suivante :

« On n'altère pas le résultat de la solution d'une question lorsqu'on fait varier les éléments qui ne sont pas intervenus dans le développement de cette solution.

« En voici une application, etc. »

Ce passage d'une lettre de M. Mannheim adressée aux *Nouvelles Annales*, 1865, p. 133, nous est revenu à la mémoire à l'occasion d'une communication de notre zélé correspondant, M. E. N. Barisien, dont l'objet est rapporté ci-après.

Soient T, T' les points où la tangente en un point M d'une ellipse de foyers F, F' rencontre les deux axes, et soient N, N' les points de rencontre de ces axes avec la normale en M. Les points N, T, divisent la distance FF' harmoniquement, et la circonférence circonscrite au triangle MFF' rencontre le petit axe en N' et T', de sorte que

$$OT.ON = c^2, \quad ON'.OT' = -c^2. \tag{1}$$

Si l'on veut démontrer les égalités (1) par l'analyse, on écrira les équations de la tangente et de la normale en M(x, y) :

$$a^2yY + b^2xX = a^2b^2, \quad Y - y = \frac{a^2y}{b^2x}(X - x); \tag{2}$$

en y faisant nécessairement $Y = 0$, $X = 0$, on trouvera

$$OT = \frac{a^2}{x}, \quad OT' = \frac{b^2}{y}, \quad ON = \frac{c^2 x}{a^2}, \quad ON' = -\frac{c^2 y}{b^2}.$$

Ces valeurs établissent les égalités (1).

Or, la vérification a pu se faire sans exprimer que le point (x, y) est sur l'ellipse. Mais si le point M est quelconque, les équations (2) représentent la polaire de M par rapport à l'ellipse et la perpendiculaire abaissée de M sur la polaire. Par conséquent, ces deux droites divisent FF' harmoniquement et les points où elles coupent le petit axe sont situés avec les deux foyers sur une même circonférence.

Par contre, si l'on exprime que le point M est sur la circonférence FF'NN', on trouve que ce point doit appartenir à l'ellipse. (J. N.)

8. *Démonstrations directes de deux réciproques.*

1° Soit le quadrilatère convexe ABCD, dans lequel la somme des angles opposés $A + C = B + D$; il faut démontrer qu'il est inscriptible.

Supposons $A > 90°$, $D > 90°$. On a $A - B = D - C$; réalisons les différences $A - B$, $D - C$ en élevant au milieu de AB une perpendiculaire qui coupe BC en W, et au milieu de CD une perpendiculaire qui coupe BC en V : les angles $WAD = A - B$, $VDA = D - C$. Soit U le point d'intersection des droites AW, DV ; les perpendiculaires au milieu des droites AB, CD, AD étant les bissectrices des angles au sommet des triangles isoscèles WAB, VCD, UAD ou des angles du triangle WUV concourent en un même point. Ce point est le centre d'une circonférence passant par A, B, C, D.

2° Soit le quadrilatère convexe ABCD, dans lequel $AB + CD = BC + AD$; il faut démontrer qu'il est circonscriptible.

Si $AB > BC$, écrivons $AB - BC = AD - CD$. Réalisons les différences $AB - BC$, $AD - CD$ en prenant sur BA la longueur $BE = BC$, sur DA la longueur $DF = DC$; nous formons ainsi trois triangles isoscèles BCE, AEF, DCF, dans lesquels les bissectrices des angles au sommet EBC, EAF, CDF sont perpendiculaires au milieu du côté opposé EC, EF, CF. Ces perpendiculaires considérées par rapport au triangle CEF concourent en un même point O, qui est équidistant des côtés du quadrilatère ABCD. (Fr. Fricke (Brême), dans les *Unterrichtsblätter für Math. und Naturw.*, 1903, n° 4).

Existe-t-il des démonstrations analogues pour un quadrilatère convexe

ABCD dans lequel l'angle ACB = ADB, pour un quadrilatère non convexe dans lequel AB ± CD = AD ± BC ?

8. Question 882 (Voir *Mathesis*, 1903, p. 230). *Solution par* M. E Cesàro. On sait(*) que les coordonnées du centre du cercle directeur par rapport à la tangente et à la normale en M, sont

$$x = \frac{b^2 s}{a^2 - b^2}, \quad y = \frac{a^2 \rho}{a^2 - b^2},$$

la ligne considérée étant représentée par l'équation intrinsèque

$$\frac{s^2}{a^2} + \frac{\rho^2}{b^2} = 1.$$

Il en résulte

$$\frac{y}{\rho} - \frac{x}{s} = 1,$$

d'où le théoréme.

4. *Transformation par points antiréciproques.* Soient (x, y, z), (x', y', z') les coordonnées normales de deux points M, M' par rapport au triangle de référence. M. Burgess (*Proceedings of the Edinburgh Math. Soc.*, XXI, pp. 88-95) appelle *points antiréciproques* deux points M, M' dont les coordonnées vérifient les relations

$$xx' : yy' : zz' = \operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C.$$

Menons par M une antiparallèle à BC qui rencontre AB en P, AC en Q et abaissons MY perpendiculaire à AC, MZ perpendiculaire à AB; traçons ensuite une parallèle à AB à la distance YQ, une parallèle à AC à la distance ZP. La droite qui joint A au point de concours de ces parallèles passera par le point antiréciproque M' de M. On obtient de la même manière la ligne BM'.

La transformation par points antiréciproques est le *produit* d'une inversion triangulaire par une transformation linéaire. Elle a pour *points doubles* les points $(\pm\sqrt{\operatorname{tg} A}, \pm\sqrt{\operatorname{tg} B}, \pm\sqrt{\operatorname{tg} C})$, qui sont imaginaires dans un triangle obtusangle. Pour les construire dans un triangle acutangle, soit E le point de rencontre de la hauteur AA' avec la circonférence de diamètre BC; une parallèle à AB à la distance BE et une parallèle à AC à la distance CE se rencontrent en un point D tel que la droite AD passe par l'un des points doubles.

(*) « *Geometria intrinseca* » p. 67 (édition allemande, p. 84).

Les trois antiparallèles menées par un point double jouissent de la propriété que les triangles isoscèles déterminés par deux de ces lignes et le troisième côté de ABC sont équivalents.

L'orthocentre et le point de Lemoine de ABC sont antiréciproques. Il résulte de là que les droites passant par le point de Lemoine se transforment en des hyperboles équilatères circonscrites à ABC.

BIBLIOGRAPHIE.

G. CASTELNUOVO, professore all' Università di Roma. **Lezioni di Geometria analitica e projettiva.** Volume I. Roma-Milano, Società editrice Dante Alighieri 1904 (VII-507 pages in-8°). Prix : 12 lire.

Réunir dans un même enseignement les méthodes de la géométrie synthétique et celles de la géométrie analytique, tel est le but poursuivi par l'auteur.

L'introduction est un chapitre de géométrie de position : Eléments, formes fondamentales; éléments à l'infini, loi de dualité; opérations géométriques; but de la géométrie projective; triangles homologiques.

Définir à priori en géométrie analytique un point à l'infini par une direction ne nous semble pas heureux. Un point à l'infini suggère l'idée d'un point mobile pouvant s'éloigner indéfiniment et des propriétés de la figure variable, on conclut celles de la figure limite. En géométrie pure, au contraire on s'interdit le passage à la limite et on étudie directement le cas limite, dès lors, il peut être admissible de définir *à priori* un point à l'infini par son élément représentatif qui est la direction. L'auteur revient d'ailleurs à l'idée du point variable dans les § 22, 31, 98, 124.

PREMIÈRE PARTIE. *Chapitre I.* Systèmes de coordonnées dans les formes fondamentales de première espèce. Sens, segments, angles, abscisses, rapports de section, rapports anharmoniques et harmoniques. On pourrait plus insister sur la généralité des résultats, due au principe des signes.

Chapitre II. Projectivité des formes de première espèce. Définition de la projectivité (Chasles, von Staudt). Théorème fondamental. Equation de projectivité. Propriétés. Eléments unis. Projectivités particulières.

Chapitre III. Formes de première espèce involutives. Définition. Théorème fondamental. Equation d'involution. Eléments doubles. Propriétés. Constructions. Involutions particulières. Problèmes du second degré.

DEUXIÈME PARTIE. Géométrie analytique plane. *Chapitre I.* Formules des ponctuelles. Equations d'une droite. Intersection et parallélisme de deux droites. Faisceau de rayons. Rapport anharmonique. Notations abrégées.

Chapitre II. Projections; distances. Angles. Aires. Eléments imaginaires. La formule : $\operatorname{tg}(rr') = (ab' - a'b) : (aa' + bb')$ indépendante des sens que l'on associe aux deux droites pour obtenir l'angle (rr') n'est pas établie. L'auteur déduit la valeur de $\sin(rr')$ de celle du cosinus à l'aide de la formule $\sin^2(rr') = 1 - \cos^2(rr')$. On n'est plus alors en droit de supposer que les radicaux ont

le même signe dans les valeurs du sinus et du cosinus et on n'obtient que valeur absolue de tg (rr').

Chapitre III. Transformation de coordonnées. Coordonnées polaires. Coordonnées homogènes. Coordonnées de droites. Coordonnées trilinéaires.

Ce qui concerne les coordonnées tangentielles nous paraît difficile pour l commençants et devrait être marqué d'un astérisque pour les en dispenser une première lecture.

Chapitre IV. Représentation analytique d'une courbe plane. Systèmes d courbes. Lieu géométrique. Equations paramétriques d'une courbe. Tangente Enveloppes de droites. La question des lieux géométriques, vu son importanc capitale, mériterait plus de développements et de nombreux exemples, no seulement dans ce chapitre, mais aussi dans les suivants.

Chapitre V. Cercle. Equations. Tangentes. Axe radical. Faisceaux. Quelque autres courbes. Dans la détermination d'un cercle par trois points il y a lie de se servir de la condition analytique qui exprime que les trois points ne son pas en ligne droite.

Chapitre VI. Projectivité des formes de seconde espèce. Définition. Théorème fondamental. Construction. Equations de projectivité. Projectivités particulières. Eléments unis. Réciprocité.

Ce chapitre est l'un des meilleurs et des plus complets sur la matière.

TROISIÈME PARTIE. Courbes du second ordre. *Chapitre I.* Polarité. Equation et détermination d'une conique. Intersection d'une conique avec une droite. Variétés de coniques. Tangentes. Points conjugués. Polarité. Droites conjuguées. Triangles conjugués. Coniques dégénérées.

Chapitre II. Théorèmes de Pascal, Brianchon, Desargues, et constructions correspondantes. Intersection de deux coniques. Faisceaux de coniques.

Chapitre III. Diamètres. Centre. Axes.

Chapitre IV. Equations réduites; discussion. Tangentes et Normales. Invariants et Théorèmes d'Apollonius.

Chapitre V. Foyers. Propriétés focales des coniques. L'auteur utilise très à propos la définition des foyers due à Poncelet. Un foyer est le sommet d'une involution orthogonale de droites conjuguées; et en déduit très simplement les propriétés focales des coniques. L'équation focale donnée en note au bas de la page 441, devrait, vu son importance, se trouver dans le texte. Sa place naturelle serait immédiatement après la définition de Plücker dont on peut la déduire aisément, elle met alors en évidence la propriété fondamentale du foyer et de la directrice. L'auteur qui utilise les coordonnées tangentielles, aurait pu introduire dans ce chapitre les équations qui déterminent les foyers d'une conique donnée par l'équation générale, ainsi que l'équation générale des coniques homofocales.

Chapitre VI. Coniques qui se correspondent dans une collinéation, homologie, affinité, similitude, homothétie.

APPENDICE. Sur la résolubilité des problèmes géométriques.

Ce résumé de la table des matières montre la grande richesse de matériaux condensés dans l'ouvrage de M. Castelnuovo. Ils sont classés logiquement et

avec ordre, développés avec clarté et rigueur, et le choix des méthodes est à la hauteur des progrès modernes. Ce traité mérite l'attention des professeurs.

L'auteur annonce un second volume consacré à la géométrie de l'espace et aux propriétés des surfaces du second ordre. (C. S.).

Elemente der Vector-Analysis mit Beispielen aus der theoretischen Physik von Dr. A. Bucherer, Privatdozent an der Universität Bonn. Leipzig, Teubner, 1903 (VI-91 p. in-8°, cart.) Prix : 2 marcs 40.

Principes de la théorie des vecteurs, avec des applications à la statique, à la cinématique, à l'hydrodynamique, à la théorie du potentiel, etc.

Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens von Dr H. Bruns, Professor der Astronomie an der Universität zu Leipzig. Leipzig, Teubner, 1903 (VII-159 in-8°). Prix : 3 marcs 40.

Introduction. 1. Différences et sommes. 2. Interpolation dans les tables, 3. Différentiation numérique. 4, 5, 6. Intégration numérique. 7. Séries trigonométriques. 8. Formules de récurrence. 9. La méthode des moindres carrés. La méthode de Cauchy.

Annuaire pour l'an 1904 publié par le bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. Prix : 1 fr. 50. Paris, Gauthier-Villars, 1904 (In 18 de 732 + 23 + 53 + 41 pp. = 849 pages).

Ce petit volume compact contient, comme toujours, une foule de renseignements indispensables à l'ingénieur et à l'homme de Science. Parmi les Notices de cette année, signalons tout spécialement celle de M. P. Hatt : Explication élémentaire des marées, et celle de M. Bouquet de la Grye : Sur la conférence géodésique internationale tenue à Copenhague en août 1903.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1400.

(Voir *Mathesis* (3), II, p. 280).

Soient OA *un rayon fixe et* OM *un rayon variable d'un cercle de centre* O. *Les bissectrices de l'angle* OMA *rencontrent* OA *en* B *et* B'. *Le cercle circonscrit au triangle* MBB' *rencontre la bissectrice intérieure de l'angle* MOA *en* P *et* Q *et la bissectrice extérieure du même angle en* S *et* T. *Montrer que 1° le lieu de chacun des points* P *et* Q *est une droite; 2° le lieu des points* S *et* T *est une hyperbole.* (E. N. Barisien).

Solution par MM. Bastin, Rose, Mac-Alister-Loup *et* Co
Représentons par 2θ l'angle variable MOA.

Nous trouvons successivement :

$$MA = 2R\sin\theta, \quad OB = \frac{R}{1+2\sin\theta}, \quad OB' = \frac{R}{1-2\sin\theta}$$

Nous avons ensuite, I désignant le centre de la circonférence

$$OI = \frac{OB+OB'}{2} = \frac{R}{1-4\sin^2\theta}, \quad BI = \frac{2R\sin\theta}{1-4\sin^2\theta}.$$

On déduit de ces valeurs l'équation de la circonférence MBB' :

$$x^2+y^2-\frac{2Rx-R^2}{1-4\sin^2\theta}=0.$$

La bissectrice intérieure de l'angle MOA a pour équation

$$y = x\operatorname{tg}\theta.$$

Eliminant θ entre les deux équations, on obtient pour le lieu des
P et Q :

$$x^2-3y^2-2Rx+R^2=0,$$

qui se décompose en

$$x \pm y\sqrt{3}-R=0.$$

Le lieu demandé comprend donc deux droites passant par A, s
triques par rapport au rayon fixe avec lequel elles font un angle de

La bissectrice extérieure de l'angle MOA est représentée par

$$y = -x\operatorname{cotg}\theta.$$

L'élimination de θ entre cette équation et celle de la circonfé
MBB' donne pour équation du lieu des points S et T :

$$y^2-3x^2-2R+R^2=0.$$

Ce lieu est une hyperbole de centre $(-\frac{1}{3}R, 0)$ et dont les asymp
sont inclinées de 60° sur le rayon fixe.

Solution par M. Emmerich. Le point P appartenant au cercle d'
lonius du triangle OAM par rapport à OA, nous avons

$$OP : AP = OM : AM = OA : 2AF,$$

F désignant le point de rencontre de OP avec AM ; donc

$$OP : OA = AP : 2AF.$$

En abaissant la perpendiculaire PP′ sur OA nous formons le triangle OPP′ semblable au triangle OAF ; d'où

$$OP : OA = PP' : AF. \qquad (2)$$

De (1) et (2) nous concluons que PP′ : AP = 1 : 2; la droite AP est donc inclinée de 30° vers AO. Le même raisonnement subsiste pour le point Q : la droite AQ est la symétrique de AP par rapport à AO.

Si l'on abaisse la perpendiculaire SS′ sur OA, on a

$$OS' : AS = 1 : 2.$$

Prenant O pour origine, OA = a pour axe des x d'un système rectangulaire, l'équation du lieu des points S et T sera donc $2x = \sqrt{y^2 + (a-x)^2}$, ou bien

$$3x^2 + 2ax - y^2 = a^2.$$

Cette équation représente une hyperbole dont l'axe réel tombe en OA, dont les sommets divisent OA dans le rapport 1 : 2 et dont le centre C est sur le prolongement de AO de $\frac{1}{3}a$. Les asymptotes sont inclinées de 60° vers CA et les foyers sont le point A et le symétrique de A par rapport à C. — Le point O étant à l'extérieur de la courbe, les points S et T n'existent en réalité que si l'inclinaison de la bissectrice extérieure de l'angle MOA vers OA est supérieure à 120°, ce qui exige que l'angle MOA surpasse 60°.

Question 1408.

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 56).

Soient M *un point fixe d'une conique,* P *un point variable de cette courbe. La parallèle menée par* P *à la corde d'osculation en* M *rencontre la tangente au point* M *en un point* Q. *Trouver les positions de* P *pour lesquelles l'aire du triangle* MPQ *passe par un maximum ou par un minimum.* (A. Gob.)

Solution par M. P. Bastin. Nous prenons par axe des x la tangente en M à la conique, pour axe des y la normale au même point.

La conique et le cercle osculateur sont représentés respectivement par

$$x^2 + Axy + By^2 - 2Cy = 0, \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 2Cy = 0. \qquad (2)$$

Soustrayant (2) de (1) nous obtenons l'égalité

$$Axy + (B - 1)\,y^2 = 0,$$

qui se décompose en $y = 0$, $x = \dfrac{1 - B}{A}\,y$.

Cette dernière équation pour laquelle nous écrivons $x = my$ représente la corde d'osculation.

Soient α, β les coordonnées du point P. La parallèle PQ à la corde d'osculation a pour équation

$$x - \alpha = m(y - \beta);$$

on déduit de là

$$MQ = \alpha - m\beta,$$

puis, appelant u le double de l'aire du triangle MPQ,

$$u = \alpha\beta - m\beta^2.$$

α et β doivent d'ailleurs vérifier la relation

$$\alpha^2 + A\alpha\beta + B\beta^2 - 2C\beta = 0.$$

Il y a lieu de distinguer dès maintenant entre u, fonction algébrique pouvant changer de signe, et u, expression géométrique toujours prise positivement. Considérant u à ce second point de vue, nous voyons immédiatement que quand le point P est à l'une ou l'autre extrémité de la corde d'osculation, l'aire MPQ est minima, puisqu'elle est nulle; elle aurait en ces deux points ni maximum ni minimum si u était envisagé avec son signe.

Différentions les équations (3) et (4), en observant que $du = 0$. Nous aurons ainsi :

$$0 = \beta d\alpha + (\alpha - 2m\beta)\,d\beta,$$
$$0 = (2\alpha + A\beta)\,d\alpha + (A\alpha + 2B\beta - 2C)\,d\beta.$$

Nous avons, en éliminant $d\alpha$ et $d\beta$ entre ces deux équations :

$$\alpha^2 - 2m\alpha\beta - \beta^2 + C\beta = 0.$$

Les relations (4) et (5) permettent de trouver pour α et β des valeurs correspondant, soit à un maximum, soit à un minimum de u. La soustraction de ces équations donne, après suppression du facteur β :

$$(A + 2m)\,\alpha + (B + 1)\,\beta - 3C = 0.$$

Les points cherchés se trouvent donc à l'intersection de la courbe donnée (1) et de la droite représentée par l'équation

$$(A + 2m)\,x + (B + 1)\,y - 3C = 0.$$

L'élimination de x entre les équations $x = my$ et (6) donne $y = \frac{1}{3}\frac{C}{1+m^2}$; les extrémités de la corde d'osculation ont pour ordonnées $y = 0$, $y = 2\frac{C}{1+m^2}$:

La droite (6) divise donc la corde d'osculation en deux segments proportionnels aux nombres 3 et 1; comme, d'autre part, elle est parallèle au diamètre conjugué à la corde d'osculation, sa construction est facile.

Si la conique est une ellipse, elle est située tout entière du même côté de l'axe des x; les extrémités de la corde (6) correspondent chacune à un maximum de la valeur absolue de u.

Si la courbe est une parabole, elle est aussi située tout entière du même côté de l'axe des x; la sécante (7) ne la rencontre qu'en un point qui correspond à un maximum de u.

Enfin, si la courbe est une hyperbole, les branches sont situées de part et d'autre de l'axe des x. Quand le point P appartient à la même branche que le point M, la fonction u passe deux fois par zéro et a donc un maximum; quand le point P décrit l'autre branche, la fonction u, passant deux fois par l'infini, a un minimum. D'ailleurs les points d'intersection de la sécante (6) et de l'hyperbole appartiennent à des branches distinctes.

Dans le cas particulier où M est en un sommet de la conique, la corde d'osculation devient la tangente en ce point. L'aire MPQ est nulle lorsque P est en M; elle est infinie pour toute autre position de P, mais reste variable. Dans ce cas, $A = 0$, $m = \infty$ et la combinaison des équations (1) et (7), celle-ci se réduisant à $x = 0$, donne les coordonnées des sommets de la courbe. Quelle que soit la conique, au sommet M correspond un minimum de u; à l'autre sommet correspond un maximum pour l'ellipse, un second minimum pour l'hyperbole.

Solution analogue par MM. E. N. Barisien, Emmerich et Audibert.

---

*Question 1410.

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 56).

Si la circonférence passant par les pieds des trois bissectrices intérieures d'un triangle ABC *touche le côté* BC, *le triangle est isoscèle ou bien* $a = 8p\cos^2\frac{1}{2}A$.

La circonférence passant par le pied de la bissectrice intér[ieure] l'angle A *et par les pieds des deux bissectrices extérieures des an[gles] ne touche le côté* BC *que si* AB = AC. (J. Neu[berg])

Solution par M. Emmerich. I. Si le cercle passant par [les points] D, E, F des bissectrices intérieures touche le côté BC en D et [les] côtés AC, AB encore en E′, F′, on a

$$AE \cdot AE' = AF \cdot AF',$$

$$\overline{BD}^2 = BF \cdot BF', \quad \overline{CD}^2 = CE \cdot CE'.$$

Comme

$$a \cdot AE = c \cdot CE, \quad a \cdot AF = b \cdot BF,$$

$$AE' = \pm (b - CE'), \quad AF' = \pm (c - BF'),$$

où il faut prendre les signes supérieurs ou les signes inférieurs [selon] que le point A est à l'extérieur ou à l'intérieur de la circonférenc[e] l'équation (1) revient à

$$c \cdot CE\,(b - CE') = b \cdot BF\,(c - BF'),$$

ou, en tenant compte des égalités (2),

$$b \cdot \overline{BD}^2 - c \cdot \overline{CD}^2 = bc\,(BF - CE).$$

Comme $b \cdot BD = c \cdot CD$, nous aurons

$$(b + c)(b \cdot \overline{BD}^2 - c \cdot \overline{CD}^2) = abc\,(BD - CD),$$

et l'équation (3) s'écrira

$$a\,(BD - CD) = (b + c)\,(BF - CE).$$

Or, $BD - CD = \dfrac{a\,(c - b)}{b + c}$;

$$BF - CE = a\left(\frac{c}{a + b} - \frac{b}{a + c}\right) = \frac{2ap\,(c - b)}{2ap + bc}.$$

Il en résulte

$$a\,(c - b)\,(2ap + bc) = 2p\,(c - b)\,(b + c)^2,$$

ce qui entraîne $b = c$, ou

$$abc = 2p\,[(b + c)^2 - a^2], \quad \text{d'où} \quad a = 8p \cos^2 \tfrac{1}{2} A.$$

Si le point A est sur la circonférence DEF, les équations

$$\overline{BD}^2 = c \cdot BF, \quad \overline{CD}^2 = b \cdot CE$$

donnent

$$\frac{BF}{CE} = \frac{c}{b} = \frac{c - BF}{b - CE} = \frac{AF}{AE}; \quad \frac{BF}{AF} = \frac{CE}{AE}; \quad \frac{a}{b} = \frac{a}{c}.$$

On est ainsi ramené au triangle isoscèle remarquable signalé dans notre solution de la question 1387 (Voir *Mathesis* (3), III, p. 34).

II. Soient E_1, F_1 les pieds des bissectrices extérieures des angles B et C. On sait que E_1, F_1 ne sont situés du même côté de BC que si BC est le plus grand ou le plus petit côté du triangle ABC. Si la circonférence DE_1F_1 touche BC en D et coupe AC, AB en E_1', F_1' respectivement, on a

$$AE_1 \cdot AE_1' = AF_1 \cdot AF_1',$$
$$\overline{BD}^2 = BF_1 \cdot BF_1', \quad \overline{CD}^2 = CE_1 \cdot CE_1',$$
$$a \cdot AE_1 = c \cdot CE_1, \quad a \cdot AF_1 = b \cdot BF_1,$$
$$AE_1' = b \mp CE_1', \quad AF_1' = c \mp BF_1',$$

où il faut prendre les signes supérieurs ou les signes inférieurs suivant E_1, F_1 sont situés avec A du même côté de BC ou non. On est ainsi amené à l'équation

$$c \cdot CE_1 (b \mp CE_1') = b \cdot BF_1 (c \mp BF_1'),$$

qui se transforme en

$$b \cdot \overline{BD}^2 - c \cdot \overline{CD}^2 = \pm bc (BF_1 - CE_1).$$

Or, on trouve dans les deux cas spécifiés,

$$\pm (BF_1 - CE_1) = \frac{a(b-c)(b+c-a)}{(a-b)(a-c)},$$

expression qui a le même signe que $b - c$. Comme on a vu que $b \cdot \overline{BD}^2 - c \cdot \overline{CD}^2$ a le même signe que $c - b$, il s'ensuit que l'égalité ci-dessus ne subsiste que si $b = c$.

Note. On peut chercher la condition sous laquelle le cercle DE_1F_1 touche AC en E_1 (ou AB en F_1). Or, D et F_1 ne sont situés du même côté de AC que si a n'est pas le plus grand côté du triangle ABC. Une analyse analogue aux précédentes conduit à l'équation

$$a \cdot \overline{AE_1}^2 + c \cdot \overline{CE_1}^2 = ac (CD + AF_1),$$

d'où après la suppression du facteur $a + c$:

$$b = 8 (p - a) \sin^2 \tfrac{1}{2} B.$$

Solution analogue par MM. Delahaye (Roye), Patriciu (Jassy), Droz-Farny et E. Weber (Liége).

Solution par M. G. Verhebugen. Soient E, F, G les pieds des bissec-

trices intérieures des angles A, B, C; et soient F′, G′ les pied bissectrices extérieures des angles B et C. On a

$$BG = \frac{ac}{a+b}, \quad CF = \frac{ab}{a+c}, \quad BE = \frac{ac}{b+c}, \quad EC = \frac{ab}{b+c};$$

$$BG' = \frac{ac}{a-b}; \quad CF' = \frac{ab}{a-c}.$$

Si BC touche la circonférence circonscrite au triangle EFG, on a

$$\text{angle GFE} = \text{angle BEG}, \quad \text{angle FGE} = \text{angle FEC}.$$

d'où

$$\frac{\sin GFE}{\sin FGE} = \frac{\sin BEG}{\sin FEC}.$$

Or,

$$\frac{\sin GFE}{\sin FGE} = \frac{GE}{FE}, \quad \sin BEG = \frac{BG}{GE}\sin B, \quad \sin FEC = \frac{FC}{FE}\sin C,$$

d'où

$$\frac{\overline{GE}^2}{\overline{EF}^2} = \frac{a+c}{a+b}.$$

Remplaçons $\overline{GE}^2$, $\overline{EF}^2$ par les valeurs

$$\overline{GE}^2 = \frac{a^2c^2}{(a+b)^2} + \frac{a^2c^2}{(b+c)^2} - \frac{2a^2c^2\cos B}{(a+b)(b+c)},$$

$$\overline{EF}^2 = \frac{a^2b^2}{(a+c)^2} + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} - \frac{2a^2b^2\cos C}{(a+c)(b+c)}.$$

En exprimant cos B, cos C en fonction de a, b, c et en simplifiant, trouve

$$abc(c-b)\left[\frac{a}{(b+c)^2} - \frac{a+b+c}{(a+b)(a+c)}\right] = 0;$$

donc il faut que le triangle ABC soit isoscèle, ou que

$$\frac{a}{(b+c)^2} = \frac{a+b+c}{(a+b)(a+c)}.$$

La dernière égalité donne

$$\frac{a}{(b+c)^2 - a^2} = \frac{2p}{bc},$$

ou

$$a = 8p\frac{p(p-a)}{bc} = 8p\cos^2\tfrac{1}{2}A.$$

D'une manière analogue, la condition de tangence de BC à la circonférence circonscrite au triangle EF'G' est

$$(a-b)\,\overline{EG'}^2-(a-c)\,\overline{EF'}^2=0$$

ou, simplifications faites,

$$abc\,(c-b)\left[\frac{a-b-c}{(a-b)(a-c)}-\frac{a}{(b+c)^2}\right]=0,$$

donc il faut que $c=b$, ou

$$\frac{a-b-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{a}{(b+c)^2},\quad\text{d'où}\quad\frac{a-b-c}{bc}=\frac{a}{2p(b+c-a)},$$

ce qui est impossible, $a-b-c$ étant négatif.

Solution par M. P. Bastin. Soient A', B', C' les pieds des bissectrices intérieures. Prenant le côté BC pour axe des x et la perpendiculaire en A' pour axe des y, nous pouvons former le tableau suivant :

Coordonnées de C :	$x=\frac{ab}{b+c}$,	$y=0$.
» B :	$x=-\frac{ac}{b+c}$,	$y=0$.
» A :	$x=c\cos B-\frac{ac}{b+c}$,	$y=c\sin B$.
» B' :	$x=\frac{ac}{b+c}\left(\cos B+\frac{b-a}{b+c}\right)$,	$y=\frac{ac\sin B}{a+c}$.
» C' :	$x=\frac{ac}{a+b}\left(\cos B-\frac{b+a}{b+c}\right)$,	$y=\frac{ac\sin B}{a+b}$.

Une circonférence tangente en A' au côté BC a pour équation

$$x^2+y^2+\lambda y=0.$$

Exprimant qu'elle passe par B' et C', on obtient

$$\frac{ac}{a+c}\left[1+\left(\frac{b-a}{b+c}\right)^2+2\frac{b-a}{b+c}\cos B\right]+\lambda\sin B=0,$$

$$\frac{ac}{a+b}\left[1+\left(\frac{b+a}{b+c}\right)^2-2\frac{b+a}{b+c}\cos B\right]+\lambda\sin B=0.$$

L'élimination de λ donne

$$[(b+c)^2+(b-a)^2+2(b+c)(b-a)\cos B](a+b)$$
$$-[(b+c)^2+(b+a)^2-2(b+c)(b+a)\cos B](a+c).$$

Remplaçons cos B par sa valeur en a, b, c; il vient

$$[abc + 8p(p-a)(p-b)](a+b) = [abc + 8p(p-a)(p-c)](a+c)$$

On transforme aisément cette dernière égalité en

$$(b-c)[abc - 8p^2(p-a)] = 0.$$

Si le premier facteur est nul, le triangle donné est isoscèle.

Si le second facteur est nul, on a :

$$a = \frac{8p^2(p-a)}{bc} = 8p\cos^2\frac{1}{2}A.$$

Soient B″ et C″ les pieds des bissectrices extérieures des angles B et C.

Nous avons pour les coordonnées de B″ et de C″.

$$x = \frac{ac}{c-a}\left(\frac{b+a}{b+c} - \cos B\right), \qquad y = -\frac{ac\sin B}{c-a};$$

$$x = -\frac{ac}{b-a}\left(\frac{b-a}{b+c} + \cos B\right), \qquad y = -\frac{ac\sin B}{b-a}.$$

Pour que la circonférence B″C″A′ soit tangente en A′ au côté BC, on doit avoir

$$[(b+c)^2 + (b+a)^2 - 2(b+c)(b+a)\cos B](b-a)$$
$$= [(b+c)^2 + (b-a)^2 + 2(b+c)(b-a)\cos B](c-a),$$

ou

$$(b-c)[abc + 8p(p-a)^2] = 0.$$

Le facteur entre crochets étant positif, on a nécessairement $b = c$.

Solution analogue par M. L. Ots qui prend pour axes le côté BC et la hauteur correspondante.

Note. M. Weber s'est posé la question analogue pour les pieds des symédianes. La mise en équation est exacte, mais la discussion exige quelques modifications.

Supposons que D, E, F représentent les pieds des symédianes et E′, F′ les seconds points de rencontre de la circonférence DEF avec CA, AB. S'il y a contact en D avec BC, on trouve la condition

$$(c^2 - b^2)[(b^2 + c^2)^2 - (a^2 + b^2)(a^2 + c^2)] = 0;$$

par conséquent $c = b$ ou bien

$$(a^2 + b^2)(a^2 + c^2) - (b^2 + c^2)^2 = 0. \qquad (I)$$

L'égalité (I), si l'on exclut l'hypothèse $a = b = c$, exige par exemple

$$a^2 + b^2 > b^2 + c^2 > a^2 + c^2,$$

de sorte que $b > a > c$. Pour qu'il y ait un triangle réel vérifiant l'équation (I), qui admet pour a^2 considéré comme inconnue une valeur positive et une valeur négative, il faut que la racine positive a^2 soit plus grande que $(b-c)^2$; donc $(b-c)^2$ doit être compris entre les deux racines et le premier membre de (I) doit être négatif quand on remplace a^2 par $(b-c)^2$. Le résultat de la substitution est

$$b^4 - 6b^3c + 7b^2c^2 - 6bc^3 + c^4 = (b^2 - 3bc + c^2)^2 - 4b^2c^2$$
$$= (b^2 - bc + c^2)(b^2 - 5bc + c^2);$$

$b^2 - bc + c^2$ étant toujours positif, le rapport $b : c$ doit être compris entre les racines de $z^2 - 5z + 1 = 0$ ou entre $\frac{1}{2}(5 + \sqrt{21})$ et $\frac{1}{2}(5 - \sqrt{21})$.

Pour que le cercle DEF passe par A, il faut et il suffit que $(b^2 + c^2)^{-1} = (a^2 + b^2)^{-1} + (a^2 + c^2)^{-1}$.

Soient E_1, F_1 les pieds des symédianes extérieures en B, C ou des tangentes menées en ces points à la circonférence ABC. Si la circonférence DE_1F_1 touche BC en D, les points E_1, F_1 sont situés du même côté de BC; ce qui exige que a soit le plus grand ou le petit côté du triangle. On trouve alors la condition

$$(c^2 - b^2)[(b^2 + c^2)^2 + (a^2 - b^2)(a^2 - c^2)] = 0;$$

la quantité entre crochets étant positive, on a nécessairement $c = b$.

(J. N.)

Question 1426.

(Voir *Mathesis* (3), III, p. 152).

Déterminer les lignes asymptotiques de la surface définie par l'équation $z = xy^2 - yx^2$. (A. Demoulin).

Solution et généralisation par E. Cesàro. Sur les surfaces définies par une équation de la forme

$$z = f(\xi) + f(\eta) \quad \text{où} \quad \xi = x + y\sqrt{-1}, \quad \eta = x - y\sqrt{-1},$$

les lignes asymptotiques peuvent être déterminées au moyen d'une

simple quadrature. En effet, l'équation différentielle de ces lig

$$d^2z = f''(\xi)\,d\xi^2 + f''(\eta)\,d\eta^2 = 0,$$

il suffit de connaître $\int \sqrt{f''(x)}\cdot dx = F(x)$ pour trouver, en in

$$F(x + y\sqrt{-1}) \pm \sqrt{-1}\,F(x - y\sqrt{-1}) = \textit{constante}.$$

En particulier, si $f(x)$ est proportionnel à x^{2n}, $F(x)$ est propor à x^n, d'où il suit que les lignes asymptotiques de la surface repr par les équations

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = r^{2n}\cos 2n\theta,$$

ont pour projections sur le plan des xy les lignes qu'on obtient en tourner de $\frac{\pi}{4n}$, dans les deux sens, autour de l'origine, les $r^n\cos n\theta = \textit{constante}$. Elles se trouvent donc toujours (pour n e positif) à l'intersection de deux surfaces du $n^{ième}$ ordre. Dans le ca culier ($n = 2$) considéré par M. Demoulin, chacune des lignes as tiques demandées est tracée sur un paraboloïde hyperbolique, et jection sur le plan des xy est une hyperbole équilatère.

Solution par MM. N. Abramescu (Bucharest), A. Claeys (G Rose (Nivelles), A. H. Couvert (Besançon). L'équation des lignes a totiques est, en employant les notations usuelles,

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0,$$

et, dans le cas actuel,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 xy + (y^2 - x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}.$$

De l'égalité (2), tire $y\,dy = x\,dx$, d'où

$$x^2 - y^2 = A;$$

de même, l'équation (3) donne $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$, ou

$$xy = B.$$

Ainsi les lignes asymptotiques ont pour équations :

1° $x^2 - y^2 = A$, $z = xy(y^2 - x^2)$ ou $z + Axy = 0$;

2° $xy = B$, $z = xy(y^2 - x^2)$ ou $z = B(y^2 - x^2)$.

Question 1440.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 240.)

Déterminer les lignes asymptotiques de la surface définie par l'équation

$$z = f(x) + \varphi(y).$$

Les axes étant supposés rectangulaires, déterminer les fonctions $f(x)$ *et* $\varphi(y)$ *par la condition que les lignes asymptotiques se projettent sur le plan des* xy *suivant un système orthogonal.* (A. Demoulin.)

Solution par M. E. Cesàro. Les dérivées partielles r, s, t étant $f''(x)$, 0, $\varphi''(y)$, l'équation différentielle des lignes asymptotiques se réduit à la forme très-simple $f''(x)\,dx^2 + \varphi''(y)\,dy^2 = 0$, qu'on peut intégrer immédiatement. Cette équation représente aussi les projections des mêmes lignes sur le plan des xy. Afin que ces projections constituent un système orthogonal il faut que $f''(x) + \varphi''(y) = 0$, et, par suite, $f''(x) = -\varphi''(y) = constante$. Il en résulte, en fixant convenablement l'origine,

$$f(x) = \frac{x^2}{2a}, \quad \varphi(y) = -\frac{y^2}{2a}.$$

On trouve ainsi le paraboloïde hyperbolique $2az = x^2 - y^2$.

MM. Arramescu et Rosk ont résolu la même question.

Question 1444.

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 264).

Soient (S) *et* (S_1) *deux surfaces rapportées à trois axes rectangulaires. Une droite mobile, parallèle à l'axe de* z, *les rencontre aux points* M *et* M_1. *1° Déterminer tous les couples de surfaces pour lesquels les normales en* M *et* M_1 *se rencontrent. 2° Parmi les couples précédents, déterminer ceux pour lesquels les normales en* M *et* M_1 *se rencontrent*

dans le plan des xy. 3° Parmi les couples définis au 2°, déterminer ceux pour lesquels le segment MM_1 *est vu de l'origine des coordonnées sous un angle droit.* (A. Demoulin.)

Solution par M. E. Cesàro. La normale en M étant représentée par les équations

$$X - x + p(Z - z) = 0, \quad Y - y + q(Z - z) = 0,$$

et la normale en M_1 par les équations

$$X - x + p_1(Z - z_1) = 0, \quad Y - y + q_1(Z - z_1) = 0,$$

on obtient la condition pour la rencontre de ces droites en exprimant que les valeurs

$$Z = \frac{pz - p_1 z_1}{p - p_1}, \quad Z = \frac{qz - q_1 z_1}{q - q_1} \tag{1}$$

coïncident. On trouve ainsi $pq_1 - qp_1 = 0$. Comme le premier membre est le déterminant fonctionnel de z et z_1, on voit que z_1 *doit être fonction de* z. Dans cette hypothèse, les expressions (1) se réduisent à la forme unique

$$Z = \frac{z dz - z_1 dz_1}{dz - dz_1}. \tag{2}$$

Si l'on veut, en outre, que le segment MM_1 soit vu de l'origine sous un angle droit, on doit avoir

$$x^2 + y^2 + zz_1 = 0, \tag{3}$$

d'où il suit que z et z_1 sont des fonctions de $x^2 + y^2$, de sorte que (S) et (S_1) sont des *surfaces de révolution*. D'autre part, afin que les normales se rencontrent dans le plan des xy, il faut, d'après (2), que la différence $z^2 - z_1^2$ soit constante. Sans nuire à la généralité on peut toujours poser $z_1^2 = z^2 + a^2$. Lorsque MM_1 est vu de l'origine sous un angle droit, on obtient les équations des deux surfaces en éliminant z_1 ou z entre cette équation et l'équation (3). On trouve $(x^2 + y^2)^2 - z^4 = \pm a^2 z^2$. Les méridiens des deux surfaces sont donc les courbes définies, en coordonnées polaires, par les équations $r^2 \cos 2\theta = \pm a^2 \sin^2 \theta$.

La même question a été résolu par MM. Abramescu, Solon Chassiotis, Rose et Mirea.

QUESTIONS D'EXAMEN

1126. On considère l'équation

$$(b+c)(x-b)(x-c)+(c+a)(x-c)(x-a)+(a+b)(x-a)(x-b)=0,$$

où $a^2<b^2<c^2$. 1° Démontrer qu'elle a une racine comprise entre a et b. 2° Former la quantité soumise au radical et vérifier qu'elle est toujours positive. (*École spéciale militaire*, 1903).

1° Désignant par $f(x)$ le premier membre de l'équation proposée, on trouve

$$f(a)\,f(b)=(a-b)^2\,(b^2-c^2)\,(c^2-a^2)<0;$$

$f(a)$ et $f(b)$ étant de signes contraires, une racine de $f(x)$ est comprise entre a et b. On verrait de même qu'une seconde racine est comprise entre b et c.

2° L'équation $f(x)=0$, ordonnée, s'écrit

$$2x^2\Sigma a-x\Sigma(b+c)^2+\Sigma bc(b+c)=0;$$

le réalisant est

$$\begin{aligned}\Delta&=\Sigma^2(b+c)^2-8\Sigma a\Sigma bc(b+c)\\&=4(\Sigma a^2+\Sigma bc)^2-16abc\Sigma a-8\Sigma bc(b+c)^2\\&=4(\Sigma a^4+2\Sigma a^2b^2+\Sigma b^2c^2+2abc\Sigma a+2abc\Sigma a+2\Sigma a^2b)\\&\qquad-16abc\Sigma a-8\Sigma b^2c-16\Sigma b^2c^2\\&=4\Sigma a^4-4\Sigma b^2c^2=2\Sigma(a^2-b^2)^2.\end{aligned}$$

1127. On considère un point M dans le plan d'un triangle ABC. Soient A′, B′, C′ les centres de gravité des triangles MBC, MCA, MAB. Démontrer 1° que la surface du triangle A′B′C′ est égale à $\frac{1}{9}$ de la surface du triangle ABC ; 2° que le centre de gravité G′ du triangle A′B′C′ est sur la droite joignant M au centre de gravité G du triangle ABC et que MG′ : G′G = 2 : 1. (Abramescu).

1° Si A_1, B_1, C_1, sont les milieux de BC, CA, AB, la surface A′B′C′ $=\frac{4}{9}A_1B_1C_1=\frac{1}{9}$ ABC.

2° G′ est le barycentre de trois masses égales P attachées en A′, B′, C′ ; ces masses peuvent être remplacées par des masses $\frac{P}{3}$ attachées respectivement en (B, C, M), (C, A, M) (A, B, M) ou ce qui revient au même, par des masses $\frac{2P}{3}$ attachées en A, B, C et une masse P attachée en M. Les masses $\frac{2P}{3}$ équivalent à une seule masse 2P fixée en G, etc.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1451. Le nombre des plans normaux qu'on peut, en général, mener à une courbe gauche rationnelle, d'un point non situé sur la courbe, est égal à la somme de l'ordre et de la classe de cette courbe.

(M. Stuyvaert.)

1452. Soit M un point variable situé sur une ellipse E fixe de foyers F, F′ et de centre O. On considère l'hyperbole H ayant pour asymptotes MF, MF′ et passant par le centre de E.

1° Le lieu des foyers de H se compose de deux cercles; 2° les directrices de H enveloppent deux ellipses. (E. N. Barisien.)

1453. Les pieds des normales abaissées d'un même point à une conique sont les sommets d'un *quadrangle d'Apollonius* (dénomination proposée par M. Bricard, NAM, septembre 1903).

Pour qu'un quadrangle donné ABCD soit un quadrangle d'Apollonius, il faut et il suffit que l'hyperbole équilatère circonscrite passe par le symétrique de son centre par rapport au centre des moyennes distances des points A, B, C, D.

Les trois sommets A, B, C restant fixes, trouver le lieu décrit par le quatrième sommet D. (J. Neuberg.)

1454. Les sommets B, C d'un triangle variable ABC se meuvent sur une droite donnée $x'x$ et le sommet A sur une perpendiculaire yy' à xx'. Le pied B′ de la hauteur issue de B étant fixe, on demande les enveloppes des médianes AA_1, BB_1, CC_1, de la hauteur CC′ et du côté AB, ainsi que les lieux du milieu de AB, du pied C′ de la hauteur CC′.

×**1455.** On prolonge le côté BC d'un triangle ABC de $CA_1 = k \cdot BC$; on prolonge le côté CA de $AB_1 = k \cdot CA$, et le côté AB de $BC_1 = k \cdot AB$. Soient A_2, B_2, C_2 les milieux de AA_1, BB_1, CC_1. 1° Les trois triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ ont même centre de gravité; 2° Le rapport des aires des triangles $A_2B_2C_2$ et ABC est $\frac{1}{4}(1 + 3k + 3k^2)$.

(E. N. Barisien.)

1456. On considère des ellipses semblables qui ont même sommet et une tangente commune m; trouver le lieu des centres.

SUR LE TÉTRAGONE COMPLET,

par M. J. Neuberg.

1. Soient B_1, B_2, B_3, les points où une transversale a_4 rencontre les côtés a_1, a_2, a_3 d'un triangle $A_1A_2A_3$. On peut considérer la figure comme un quadrilatère complet ayant pour diagonales les droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3. On sait que les milieux C_1, C_2, C_3 de ces diagonales sont sur une même droite (*médiane* ou *newtonienne* du quadrilatère $a_1a_2a_3a_4$), qui est le lieu des centres des coniques inscrites au quadrilatère. Plus généralement, si une droite d coupe les diagonales aux points D_1, D_2, D_3, les conjugués harmoniques F_1, E_2, E_3 de ces points par rapport aux extrémités des diagonales correspondantes sont également situés sur une même droite e. Ce théorème lui-même n'est qu'un cas particulier du suivant : Si une conique divise harmoniquement deux diagonales d'un quadrilatère complet, la troisième est également divisée par la courbe en parties harmoniques. D'après un autre théorème connu, les circonférences décrites sur les trois diagonales comme diamètre se coupent en deux mêmes points (points de Monge); de chacun de ces points on voit sous un angle droit toute conique inscrite au quadrilatère $a_1a_2a_3a_4$.

2. L'extension d'une partie de ces propositions à l'espace est due à Paul Serret (*Géométrie de direction*, p. 265). Pour la facilité du langage, appelons *tétragone complet* la figure formée par un tétraèdre ordinaire $A_1A_2A_3A_4$ et une transversale u, qui coupe les faces aux points B_1, B_2, B_3, B_4. Les *diagonales* du tétragone complet sont les droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, qui joignent les *sommets opposés*.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Si un plan γ coupe les diagonales d'un tétragone complet ($A_1A_2A_3A_4$), *aux points* C_1, C_2, C_3, C_4, *les conjugués harmoniques* D_1, D_2, D_3, D_4 *de ces points par rapport aux diagonales correspondantes sont également situés dans un même plan* δ.

Soient (y_1, y_2, y_3, y_4), (z_1, z_2, z_3, z_4) les coordonnées de deux points Y, Z de la droite u; celles d'un point quelconque M de u sont de la forme $my_i + nz_i$, ... Si l'on fait coïncider M avec B_1, on doit avoir $my_1 + nz_1 = 0$, et l'on peut poser $m = z_1$, $n = -y_1$, de sorte que les coordonnées de B_1 sont

$$0, \quad y_2z_1 - y_1z_2 = p_{21}, \quad y_3z_1 - y_1z_3 = p_{31}, \quad y_4z_1 - y_1z_4 = p_{41},$$

où l'on a fait $y_iz_k - y_kz_i = p_{ik}$. On sait que les quantités p_{ik} sont précisé-

ment les *coordonnées radiales* de u. On trouve de même, pour les coordonnées des points B_2, B_3, B_4,

$$(p_{12},\ 0,\ p_{32},\ p_{42}),\quad (p_{13},\ p_{23},\ 0,\ p_{43}),\quad (p_{14},\ p_{24},\ p_{34},\ 0).$$

Représentons le plan γ par $\gamma_1x_1+\gamma_2x_2+\gamma_3x_3+\gamma_4x_4=0$; son intersection c avec le plan $A_2A_3A_4$ ayant pour équations $x_1=0$, $\gamma_2x_2+\gamma_3x_3+\gamma_4x_4=0$ (la dernière représente le plan cA_1), il est facile de voir que l'équation

$$-\gamma_1x_1+\gamma_2x_2+\gamma_3x_3+\gamma_4x_4=0 \qquad (1)$$

représente le plan conjugué harmonique de γ par rapport aux plans $A_2A_3A_4$, cA_1. Ce plan doit contenir le point D_1, et comme on peut prendre pour les coordonnées x_2, x_3, x_4 de D_1 celles du point C_1 situé sur la même droite A_1D_1, la coordonnée x_1 de D_1 se déduit de (1); on trouve ainsi, après multiplication par γ_1, les coordonnées de D_1 :

$$\gamma_2p_{21}+\gamma_3p_{31}+\gamma_4p_{41},\quad \gamma_1p_{21},\quad \gamma_1p_{31},\quad \gamma_1p_{41}.$$

En écrivant maintenant le déterminant des coordonnées des points D_1, D_2, D_3, D_4, on remarque immédiatement qu'il s'annule parce qu'en ajoutant à une ligne les trois autres, cette ligne se réduit à 0, 0, 0, 0.

Si l'on prend pour γ le plan de l'infini, les points D_1, D_2, ... deviennent les milieux des diagonales A_1B_1, A_2B_2 .... P. Serret appelle le plan de ces milieux le *plan médian* du tétragone complet.

3. On démontre avec la même facilité que toute quadrique divisant harmoniquement trois diagonales d'un tétragone complet divise harmoniquement la quatrième.

En effet, si l'on exprime que les points A_1 (1, 0, 0, 0), B_1 (0, p_{21}, p_{31}, p_{41}) sont conjugués harmoniques par rapport à la quadrique

$$\Sigma A_{11}x_1^2+2\Sigma A_{12}x_1x_2=0,$$

on trouve

$$A_{12}p_{21}+A_{13}p_{31}+A_{14}p_{41}=0.$$

Par analogie, les points A_2 et B_2, A_3 et B_3, A_4 et B_4 sont conjugués par rapport à la quadrique si l'on a

$$\begin{aligned}A_{21}p_{12}+A_{23}p_{32}+A_{24}p_{42}&=0,\\ A_{31}p_{13}+A_{32}p_{23}+A_{34}p_{43}&=0,\\ A_{41}p_{14}+A_{42}p_{24}+A_{43}p_{34}&=0.\end{aligned}$$

La somme de ces quatre équations donnant identiquement $0=0$,

l'une est une conséquence des trois autres; le théorème est donc démontré.

4. P. Serret a encore énoncé le théorème suivant :

Les sphères décrites sur les quatre diagonales d'un tétragone complet comme diamètres ont même axe radical (deux points communs).

Pour démontrer cette propriété, nous rapportons la figure à trois axes rectangulaires et désignons par (x_i, y_i, z_i), (x'_i, y'_i, z'_i) les coordonnées des points A_i, B_i. La sphère de diamètre A_iB_i étant le lieu des points M tels que les droites MA_i, MB_i sont rectangulaires, son équation a la forme

$$(x - x_i)(x - x'_i) + (y - y_i)(y - y'_i) + (z - z_i)(z - z'_i) = 0. \quad (1)$$

Pour les coordonnées du point B_1 nous pouvons poser

$$x' = \frac{m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{m_2 + m_3 + m_4}, \ldots;$$

la sphère (A_1B_1) (c'est-à-dire de diamètre A_1B_1) aura alors pour équation

$$\Sigma (x - x_1)[m_2(x - x_2) + m_3(x - x_3) + m_4(x - x_4)] = 0,$$

le signe sommatoire s'étendant aux trois lettres x, y, z. Si, pour abréger, on fait

$$(x - x_i)(x - x_k) + (y - y_i)(y - y_k) + (z - z_i)(z - z_k) \equiv S_{ik},$$

on aura, pour la sphère (A_1B_1),

$$m_2S_{12} + m_3S_{13} + m_4S_{14} = 0;$$

la forme de ce résultat indique que la sphère (A_1B_1) passe par les points communs aux trois sphères (A_1A_2), (A_1A_3), (A_1A_4), ce qui s'explique aisément.

La droite u ayant pour équations

$$K \equiv Mx + Ny + Pz + Q = 0, \quad L = M'x + N'y + P'z + Q' = 0,$$

si l'on convient de désigner par K_i, L_i les valeurs des polynômes K, L quand on remplace x, y, z par x_i, y_i, z_i, la condition que le point B_1 soit situé sur u s'exprime par les égalités

$$m_2K_2 + m_3K_3 + m_4K_4 = 0, \quad m_2L_2 + m_3L_3 + m_4L_4 = 0.$$

Il en résulte qu'en désignant le binôme $K_rL_s - K_sL_r$ par μ_{rs}, on a

$$m_2 : m_3 : m_4 = \mu_{34} : \mu_{42} : \mu_{23},$$

et l'équation de la sphère (A_1B_1) est

$$S_{12}\mu_{34} + S_{13}\mu_{42} + S_{14}\mu_{23} = 0.$$

Ecrivons par analogie les équations des sphères A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 et

observons que $S_{ik} = S_{ki}$, $\mu_{ik} = -\mu_{ik}$; nous verrons alors que la somme des quatre équations donne identiquement $0 = 0$.

Ce théorème a pour conséquence que les centres des quatre sphères sont situés dans un même plan.

5. Etant donné un tétraèdre ordinaire $A_1A_2A_3A_4$ ayant pour faces les plans α_1, α_2, α_3, α_4, désignons par β_1, β_2, β_3, β_4 les plans menés par une même droite u et respectivement par les sommets A_1, A_2, A_3, A_4. La figure ainsi formée peut être appelée *tétraèdre complet*; elle a pour *diagonales* les droites $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_3\beta_3$, $\alpha_4\beta_4$, intersections de deux *faces opposées* du tétraèdre complet.

On peut démontrer directement ou par voie de dualité les propriétés suivantes :

Si trois couples de faces opposées d'un tétraèdre complet sont conjugués par rapport à une quadrique, le quatrième couple l'est également. En particulier, *si quatre plans menés par les diagonales concourent en un même point, les conjugués harmoniques de ces plans par rapport aux couples correspondants de faces opposées concourent également en un même point.*

6. Voici encore un théorème qui généralise une proposition de géométrie plane :

Si une droite u rencontre les faces d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ *aux points* B_1, B_2, B_3, B_4 *et que l'on prenne les conjugués* C_1, C_2, C_3, C_4 *de ces points dans une involution marquée sur u, les droites* A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, A_4C_4 *sont les génératrices d'un même mode d'un hyperboloïde.*

Pour le démontrer, soient Y, Z les points doubles de l'involution marquée sur u. Les coordonnées de B_1 étant $y_1z_1 - y_1z_1, y_2z_1 - z_2y_1, \ldots$, celles du point C_1 conjugué harmonique de B_1 par rapport à YZ sont

$$y_1z_1 + y_1z_1 = q_{11}, \quad y_2z_1 + z_2y_1 = q_{12}, \quad \ldots.$$

Le tableau des coordonnées des points C_1, C_2, C_3, C_4, savoir :

$$\begin{array}{cccc} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{array}$$

renferme donc les éléments d'un déterminant symétrique, etc.

Le lecteur énoncera sans peine la proposition corrélative.

NOTES MATHÉMATIQUES.

5. *Sur quelques lieux géométriques relatifs à des coniques semblables.* Pour fixer les idées, nous considérerons des ellipses : le centre, les foyers, les sommets seront désignés par les lettres O, F, F′, A, A′, B, B′, et les pieds des directrices d, d' par H, H′.

1. Si l'on donne le foyer F et un point M d'un système de coniques semblables, la distance de M à d, égale à $\frac{a}{c}$MF, est constante; donc d enveloppe une circonférence U, de centre M. Le point H décrit la podaire de F par rapport à U, c'est-à-dire un limaçon de Pascal. Les points O, A, A′ divisent FH dans des rapports constants; on conclut de là que ces points décrivent des courbes homothétiques au lieu de H ou des limaçons de Pascal. Le triangle FOB étant de forme constante, le lieu de B est également un limaçon de Pascal.

Le lieu de O nous a été communiqué par M. E. N. Barisien.

2. Considérons maintenant des coniques semblables qui ont même foyer F et une tangente commune t.

Soit F_1 le symétrique de F par rapport à t. Comme $F'F_1 = 2a$, le rapport $F'F_1 : F'F$ est constant; il en résulte que F′ décrit une circonférence V. Les lieux des points O, A, A′, H, H′ sont homothétiques à celui de F′ par rapport à F; ce sont donc des circonférences. Le triangle FOB étant d'espèce constante, le point B décrit également une circonférence. La directrice d enveloppe une conique ayant pour foyer F; car elle est perpendiculaire à FH et H décrit une circonférence.

3. Si des coniques semblables ont même directrice d et passent par un même point M, le foyer F décrit une circonférence W de centre M. Rapportons la figure à deux axes rectangulaires dont l'un soit d; nous pourrons passer du lieu de F aux lieux des points O, A, A′, F′, H′ en remplaçant y par my, m étant une constante, et aux lieux des points B, B′, en remplaçant y, x par my, $ny + x$, m et n étant des constantes. Il résulte de là que ces lieux sont des ellipses.

4. Des coniques semblables qui ont même directrice d et une tangente commune t sont *homothétiques*; par suite les points F, F′, A, A′, B, B′ décrivent des droites passant par le point dt. (J. N.)

6. *Sur le triangle dont deux symédianes* BK, CK *sont perpendiculaires.*

a. Les côtés d'un tel triangle (*Mathesis*, 1903, p. 133) vérifient la relation

$$a^4 = b^4 - b^2c^2 + c^4. \qquad (1)$$

Cherchons la relation entre les angles A, B, C. Les angles KBC, KCB étant complémentaires, il en est de même des angles GBA $= \beta$, GCA $= \gamma$. Or,

$$\frac{\sin\beta}{\sin(B-\beta)} = \frac{\sin A}{\sin C}, \quad \frac{\sin\gamma}{\sin(C-\gamma)} = \frac{\sin A}{\sin B};$$

d'où

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin A \sin B}{\sin C + \sin A \cos B}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin A \sin C}{\sin B + \sin A \cos C},$$

de sorte que l'égalité $\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = 1$ devient

$$\sin^2 A \sin B \sin C = \sin B \sin C + \sin^2 A \cos B \cos C + \tfrac{1}{2}\sin A(\sin 2B + \sin 2C).$$

On en conclut

$$2\sin^2 A + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 0. \qquad (2)$$

(A. C.)

b. En faisant la somme des angles des triangles KBC, GBC et observant que les sommes KBC + GBC = B, KCB + GCB = C, on trouve cette relation applicable à deux points inverses quelconques, intérieurs au triangle ABC :

$$BKC + BGC = \pi + A.$$

Par conséquent, dans la question actuelle, l'angle BGC vaut $\frac{\pi}{2} + A$, et le point G se trouve sur l'arc du segment capable de l'angle $\frac{\pi}{2} + A$ construit sur BC. La circonférence de ce segment capable passe par les points de rencontre M, N de AB, AC respectivement avec la perpendiculaire élevée en C sur AC et la perpendiculaire élevée en B sur AB.

Cette circonférence peut être définie autrement. En effet, soit $A_1B_1C_1$ le triangle formé par les tangentes menées en A, B, C au cercle ABC (de centre O). Menons par A_1 une parallèle à B_1C_1 qui rencontre AB en M', AC en N'. Les triangles A_1CN', A_1BM' étant semblables à B_1CA, C_1BA, on a $A_1N' = A_1C = A_1B = A_1M'$; par suite, les angles M'CN', N'BM' sont droits et M'N' se confond avec MN. La circonférence qui nous occupe, a donc pour centre A_1, pour rayon A_1B; elle touche les rayons OB, OC.

Les conditions (1) et (2) admettent donc cette interprétation que $A_1G = A_1B = A_1C$.

La relation (2) indique que l'un des angles B, C est obtus. (J. N.)

c. Supposons le triangle ABC quelconque.

Les droites CM, BN se coupent en l'orthocentre H_a du triangle ANM; H_a est diamétralement opposé à A dans le cercle O. Le rapport de similitude des triangles ABC, ANM est $AB : AN = \cos A$. Il résulte de là que les médianes AA_1, AA' (A' = milieu de BC) de ces triangles sont dans le même rapport. On en conclut les formules suivantes :

$$AA_1 = \frac{m_a}{\cos A}, \quad BB_1 = \frac{m_b}{\cos B}, \quad CC_1 = \frac{m_c}{\cos C}.$$

Les trois cercles (A_1, A_1B), (B_1, B_1C), (C_1, C_1A) ont pour centre radical le point O.

Si l'on mène dans l'angle CBA par B_1 une parallèle PQ à C_1A_1 et dans l'angle ACB par C_1 une parallèle UV à A_1B_1, on a un système de six points M, N, P, Q, U, V jouissant de propriétés intéressantes. (J. N.)

7. *Enveloppe d'une série de coniques homofocales.*

L'équation de la série étant

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1,$$

ou

$$\lambda^2 - \lambda(x^2+y^2-a^2-b^2) - (a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2) = 0,$$

l'enveloppe a pour équation

$$(x^2+y^2-a^2-b^2)^2 + 4(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2) = 0. \qquad (1)$$

L'égalité (1) prend successivement les formes

$$\begin{gathered}(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)(a^2+b^2) + 4(a^2y^2+b^2y^2) + c^4 = 0,\\ (x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2+y^2) + c^4 + 4c^2y^2 = 0,\\ (x^2+y^2-c^2)^2 + 4c^2y^2 = 0,\\ (x^2+y^2-c^2+2ciy)(x^2+y^2-c^2-2ciy) = 0,\\ [x^2+(y+ci)^2][x^2+(y+ci)^2] = 0.\end{gathered} \qquad (2)$$

Il en résulte que l'enveloppe se compose des quatre droites $y \pm ci = \pm is$ ou $y = \pm i(x \mp c)$, c'est-à-dire des droites isotropes menées par les foyers F, F'.

Ce résultat est bien connu, il est intéressant de le déduire de la théorie des enveloppes (Cf. *Mathesis*, (II) 9, p. 91). En outre, de l'identité des équations (1) et (2) résulte cette nouvelle identité

$$(x^2+y^2-a^2-b^2)^2 + (2by)^2 + (2bx)^2 = (2ab)^2 + (x^2+y^2-a^2+b^2)^2.$$

Elle fait connaître une infinité de nombres qui sont à la fois une somme de deux carrés et une somme de trois carrés.

(E. N. Barisien.)

8. *Sur le quadrilatère inscrit à un cercle.* L'article de M. Barisien (*Math.*, 1903, p. 162), était sous presse quand la livraison de juin de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* a publié la recherche de l'aire du triangle IAK par M. Mathieu.

Je profite de l'occasion pour signaler deux autres questions intéressantes sur le quadrilatère inscriptible; les notations sont celles de M. Barisien.

a. Soient M, P les points de rencontre des côtés AB, CD avec la bissectrice de l'angle AFB et soient N, Q ceux des côtés BC, AD avec la bissectrice de l'angle AED. Les points M, N, P, Q sont les sommets d'un losange dont les côtés sont parallèles à AC, BD. On a

$$\mathrm{MP} = \frac{2\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(p-a)(p-c)}}{(a+c)(b+d)},$$

$$\mathrm{NQ} = \frac{2\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(p-b)(p-d)}}{(a+c)(b+d)},$$

$$\frac{\textit{aire}\ \mathrm{MNPQ}}{\textit{aire}\ \mathrm{ABCD}} = \frac{2(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)^2(b+d)^2},$$

$$\mathrm{MN} = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}}{(a+c)(b+d)}.$$

b. Soient M', P', les points de rencontre des côtés AB, CD avec la bissectrice de l'angle AIB, et N', P' ceux des côtés BC, AD avec la bissectrice de l'angle BIC. Chaque côté du quadrilatère ABCD est divisé par l'un de ces points dans le rapport des côtés adjacents. On a

$$\mathrm{M'P'} = 2\frac{bd(a+c)}{(b+d)}\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{(ab+cd)(ad+bc)}},$$

$$\mathrm{N'Q'} = 2\frac{ac(b+d)}{(a+c)}\sqrt{\frac{(p-b)(p-d)}{(ab+cd)(ad+bc)}},$$

$$\frac{\textit{aire}\ \mathrm{M'N'P'Q'}}{\textit{aire}\ \mathrm{ABCD}} = \frac{2abcd}{(ab+cd)(ad+bc)}.$$

$$\textit{aire}\ \mathrm{M'N'P'Q'} \times \textit{aire}\ \mathrm{ABCD} = \tfrac{1}{2}\,abcd \sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B}$$

$$= \sqrt{8\,\mathrm{ABC}\ \mathrm{ABD}.\mathrm{CDA}.\mathrm{CDB}}.$$

(J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1287.

(Voir *Mathesis* (2), X, p. 216).

On donne dans un même plan une parabole π ***et une droite*** μ. ***Une sécante quelconque menée par un point fixe*** P ***de*** π ***rencontre la conique en*** A ***et la droite en*** B. ***On mène la tangente*** t ***en*** A ***et par*** B ***on tire une droite*** d ***parallèle à*** t. ***Trouver l'enveloppe de la droite*** d.

(H. LORENT.)

Solution par M. A. H. COUVERT. Prenons pour axes la tangente et le diamètre qui passent en P ; l'équation de π sera $y^2 - 2px = 0$. Soient d'ailleurs $y = ux + v$ celle de μ et $y = mx$ celle d'une sécante quelconque issue de P. De là on déduit les coordonnées de A : $x_1 = \frac{2p}{m^2}$, $y_1 = \frac{2p}{m}$; et celles de B : $x_2 = \frac{v}{m-u}$, $y_2 = \frac{mv}{m-u}$. Le coefficient angulaire de la tangente en A est $\frac{p}{y_1} = \frac{m}{2}$. Cette droite a donc pour équation

$$y - \frac{mv}{m-u} = \frac{m}{2}\left(x - \frac{v}{m-u}\right),$$

ou

$$2y(m-u) - 2mv - m[x(m-u) - v] = 0$$

ou encore

$$-m^2x + (2y - v + ux)m - 2uy = 0,$$

et l'enveloppe s'obtient en égalant à zéro le discriminant par rapport au paramètre variable m. On trouve

$$(2y + ux - v)^2 - 8uxy = 0,$$

ou

$$(2y - ux)^2 - 2v(2y + ux) + v^2 = 0.$$

Cette enveloppe est donc une parabole.

Solution par G. VERHEUGEN. La droite à l'infini du plan étant tangente à la parabole π, le faisceau (PA) est projectif à la ponctuelle (T) déterminée par le faisceau des tangentes t sur la droite à l'infini. D'autre part, il est perspectif à la ponctuelle (B). Donc, les droites d joignent les

points correspondants de deux ponctuelles projectives et enveloppent une parabole tangente à la droite μ. Le point de la ponctuelle (B), correspondant au point de la ponctuelle (T) déterminé par la direction μ est le point de contact de μ avec l'enveloppe. Pour le trouver, on mène la tangente parallèle à μ à la parabole π; soit Q le point de contact de cette tangente, on joint PQ, la droite PQ coupe μ au point de contact cherché.

La tangente en P à la parabole π joint deux points correspondants des ponctuelles projectives (T) et (B) et est tangente à l'enveloppe.

Ont résolu la même question MM. Emmerich, G. Gérard, Déprez, Lez, Retali, Rose, Droz Farny, Soons et Bastin.

Question 1393.

(Voir *Mathesis*, (3) II, p. 264.)

Par un point P, *on mène une droite quelconque u qui coupe les faces d'un tétraèdre donné* ABCD *aux points* A_1, B_1, C_1, D_1. *Soient* A_1', B_1', C_1', D_1' *les symétriques des points* A_1, B_1, C_1, D_1 *par rapport à* P.

1° *Démontrer que les milieux des droites* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *sont dans un même plan et chercher l'enveloppe de ce plan.*

2° *Démontrer que les milieux des droites* AA_1', BB_1', CC_1', DD_1' *sont les sommets d'un tétraèdre de volume constant.* (Déprez.)

Solution par M. P. Bastin. 1° Prenons le point P pour origine et menons les axes PX, PY, PZ respectivement parallèles aux arêtes AB, AC, AD du tétraèdre.

Les faces ADC, ABD, ABC, BCD ont respectivement pour équations

$$x = \lambda, \quad y = \mu, \quad z = \nu, \quad px + qy + rz + k = 0.$$

Représentons par α, β, γ les coordonnées du point A_1; les équations de u seront

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma},$$

et on trouve facilement pour les coordonnées des points B_1, C_1, D_1 :

$$\lambda, \ \frac{\beta\lambda}{\alpha}, \ \frac{\gamma\lambda}{\alpha}; \quad \frac{\alpha\mu}{\beta}, \ \mu, \ \frac{\gamma\mu}{\beta}; \quad \frac{\alpha\nu}{\gamma}, \ \frac{\beta\nu}{\gamma}, \ \nu.$$

Le sommet A a pour coordonnées λ, μ, ν, et si l'on pose $p\lambda + q\mu + r\nu + k = \varphi$, les coordonnées des sommets B, C, D prennent la forme

$$\lambda - \frac{\varphi}{p},\ \mu,\ \nu;\quad \lambda,\ \mu - \frac{\varphi}{q},\ \nu;\quad \lambda,\ \mu,\ \nu - \frac{\varphi}{r}.$$

On tire de là les doubles des coordonnées des points A_0, B_0, C_0, D_0, milieux de AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 :

$$\begin{array}{lll} \lambda+\alpha, & \mu+\beta, & \nu+\gamma; \\ 2\lambda-\dfrac{\varphi}{p}, & \mu+\dfrac{\beta\lambda}{\alpha}, & \nu+\dfrac{\gamma\lambda}{\alpha}; \\ \lambda+\dfrac{\alpha\mu}{\beta}, & 2\mu-\dfrac{\varphi}{q}, & \nu+\dfrac{\gamma\mu}{\beta}; \\ \lambda+\dfrac{\alpha\nu}{\gamma}, & \mu+\dfrac{\beta\nu}{\gamma}, & 2\nu-\dfrac{\varphi}{r}. \end{array}$$

Il en résulte l'équation du plan $B_0C_0D_0$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & \frac{1}{2} \\ 2\lambda-\dfrac{\varphi}{p} & \mu+\dfrac{\beta\lambda}{\alpha} & \nu+\dfrac{\gamma\lambda}{\alpha} & 1 \\ \lambda+\dfrac{\alpha\mu}{\beta} & 2\mu-\dfrac{\varphi}{q} & \nu+\dfrac{\gamma\mu}{\beta} & 1 \\ \lambda+\dfrac{\alpha\nu}{\gamma} & \mu+\dfrac{\beta\nu}{\gamma} & 2\nu-\dfrac{\varphi}{r} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour la simplifier, retranchons des trois premières colonnes la quatrième multipliée respectivement par λ, μ, ν ; multiplions ensuite les quatre lignes par 2, $p\alpha$, $q\beta$, $r\gamma$; enfin divisons les trois premières colonnes par α, β, γ. Il vient ainsi :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{2x-\lambda}{\alpha} & \dfrac{2y-\mu}{\beta} & \dfrac{2z-\nu}{\gamma} & 1 \\ \lambda p-\varphi & \lambda p & \lambda p & \alpha p \\ \mu q & \mu q-\varphi & \mu q & \beta q \\ \nu r & \nu r & \nu r-\varphi & \gamma r \end{vmatrix} = 0.$$

Si à la première ligne multipliée par k on ajoute les trois autres et

que l'on tienne compte de la relation $\alpha p + \beta q + \gamma r + k = 0$, on voit que la première ligne peut être remplacée par

$$\frac{2x - \lambda}{\alpha} - 1, \quad \frac{2y - \mu}{\beta} - 1, \quad \frac{2z - \nu}{\gamma} - 1, \quad 0;$$

ce qui montre que le plan $B_0C_0D_0$ passe par A_0.

Développons le déterminant ainsi transformé suivant les éléments de la première ligne et les mineurs correspondants suivant les éléments de la quatrième colonne; nous aurons pour l'équation du plan $A_0B_0C_0D_0$

$$\Sigma\left(\frac{2x - \lambda}{\alpha} - 1\right) p(\alpha - \lambda) = 0,$$

ou, plus simplement, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au milieu de la distance AP

$$\Sigma p\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right) x + \varphi = 0. \tag{1}$$

Pour trouver l'enveloppe de ce plan, les paramètres variables étant α, β, γ entre lesquels existe la condition

$$p\alpha + q\beta + r\gamma + k = 0, \tag{2}$$

nous écrivons que les dérivées partielles des premiers membres des équations (1) et (2) sont proportionnelles. Nous aurons ainsi

$$\frac{p\lambda x}{\alpha^2} : \frac{q\mu y}{\beta^2} : \frac{r\nu z}{\gamma^2} = p : q : r,$$

ou

$$\alpha = \rho\sqrt{\lambda x}, \quad \beta = \rho\sqrt{\mu y}, \quad \gamma = \rho\sqrt{\nu z}, \tag{3}$$

ρ étant un facteur de proportionnalité. Substituons ces valeurs de α, β, γ dans les équations (1) et (2) et éliminons l'inconnue auxiliaire ρ; il vient pour l'équation de l'enveloppe

$$k(\Sigma p x + \varphi) = \Sigma^2 p\sqrt{\lambda x},$$

équation qui, rendue rationnelle, est du 4e degré.

Si l'on représente (1) par $ux + vy + wz + 1 = 0$, on a

$$u\varphi = p\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right), \quad v\varphi = q\left(1 - \frac{\lambda}{\beta}\right), \quad w\varphi = r\left(1 - \frac{\lambda}{\gamma}\right);$$

tirant de là les valeurs de α, β, γ pour les porter dans l'équation (2)

on obtient l'équation tangentielle de l'enveloppe :

$$\frac{p^2\lambda}{p-u\varphi}+\frac{q^2\mu}{q-v\varphi}+\frac{r^2\nu}{r-w\varphi}+k=0.$$

Enfin, des relations (3) on déduit les équations paramétriques de la surface :

$$x=\frac{\alpha^2}{\rho^2\lambda},\quad y=\frac{\beta^2}{\rho^2\mu},\quad z=\frac{\gamma^2}{\rho^2\nu},$$

où le facteur ρ se détermine au moyen de l'équation (1) :

$$\rho^2=-\frac{\Sigma p\alpha\left(\frac{\alpha}{\lambda}-1\right)}{\varphi}=-\frac{\Sigma\frac{p\alpha^2}{\lambda}+k}{\varphi}.$$

2° Revenons aux anciens axes. Comme les coordonnées de A_1', B_1', ... ne diffèrent de celles de A_1, B_1, ... que par le signe, les doubles des coordonnées des milieux A_0', B_0', ... des droites AA_1', BB_1', ... sont

$$\lambda-\alpha,\ \mu-\beta,\ \nu-\gamma;\qquad -\frac{\varphi}{p},\ \mu-\frac{\beta\lambda}{\alpha},\ \nu-\frac{\gamma\lambda}{\alpha};$$

$$\lambda-\frac{\alpha\mu}{\beta},\ -\frac{\varphi}{q},\ \nu-\frac{\gamma\mu}{\beta};\qquad \lambda-\frac{\alpha\nu}{\gamma},\ \mu-\frac{\beta\nu}{\gamma},\ -\frac{\varphi}{r}.$$

Pour démontrer que le volume $A_0'B_0'C_0'D_0'$ est constant, il suffit de faire voir que le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix} \lambda-\alpha & \mu-\beta & \nu-\gamma & 1\\ -\frac{\varphi}{p} & \mu-\frac{\beta\lambda}{\alpha} & \nu-\frac{\gamma\lambda}{\alpha} & 1\\ \lambda-\frac{\alpha\mu}{\beta} & -\frac{\varphi}{q} & \nu-\frac{\gamma\mu}{\beta} & 1\\ \lambda-\frac{\alpha\nu}{\gamma} & \mu-\frac{\beta\nu}{\gamma} & -\frac{\varphi}{r} & 1 \end{vmatrix}$$

a une valeur indépendante de α, β, γ si

$$p\alpha+q\beta+r\gamma+k=0.$$

Or, si après avoir retranché des trois premières colonnes la quatrième multipliée respectivement par λ, μ, ν, on multiplie les dernières lignes

par $p\alpha$, $q\beta$, $r\gamma$ et qu'on divise ensuite les trois premières colonnes par $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, on obtient

$$\Delta = -\frac{1}{pqr}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda p+\varphi & \lambda p & \lambda p & p\alpha \\ \mu q & \mu q+\varphi & \mu q & q\beta \\ \nu r & \nu r & \nu r+\varphi & r\gamma \end{vmatrix}.$$

Si l'on retranche encore des trois dernières lignes la première multipliée respectivement par λp, μq, νr, il vient

$$\Delta = -\frac{1}{pqr}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varphi & 0 & 0 & p(\alpha-\lambda) \\ 0 & \varphi & 0 & q(\beta-\mu) \\ 0 & 0 & \varphi & r(\gamma-\nu) \end{vmatrix}.$$

Le dernier déterminant se développe aisément, et l'on trouve

$$\Delta = -\frac{\varphi^2}{pqr}[\Sigma p(\alpha-\lambda)-\varphi] = \frac{2\varphi^3}{pqr}.$$

Solution géométrique partielle. 1° La sécante u coupe CD; elle forme avec le triangle, section du tétraèdre par le plan PCD, un quadrilatère dont les milieux des diagonales sont en ligne droite.

On en conclut aisément que les milieux de AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 pour cette position particulière de la sécante sont dans un même plan.

2° Si la sécante u se meut dans un plan π, les milieux de AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 décrivent quatre ponctuelles projectives deux à deux. On a vu (1°) que lorsque la sécante coupe une arête les quatre milieux sont dans un plan. Cette circonstance se présente pour six positions de la sécante u dans le plan π. Les ponctuelles projectives engendrent donc une seule et même développable osculatrice à une cubique gauche et par suite pour une position quelconque de u, les milieux de AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, sont dans un plan (théorème connu).

3° Quant la sécante u tourne d'une manière quelconque autour de P, les milieux de AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, décrivent des systèmes plans projectifs entre eux, le plan de ces milieux enveloppe donc une surface de troisième classe. (C. Servais.)

Au sujet de cette question, voir notre article *Sur le tétragone complet*, p. 33-36. (J. N.)

Question 1414.

(Voir *Mathesis*, (3) III, p. 80).

Soit C *le centre d'un cercle passant par le sommet d'une parabole et tangent en un point quelconque* M *de la parabole. Démontrer que la parallèle à l'axe menée par* C *et la normale* CM *forment avec les deux autres normales issues de* C *un faisceau harmonique. Trouver le lieu du point* C. (E. N. Barisien.)

La solution suivante emprunte ses éléments aux deux solutions qui nous ont été adressées par MM. Couvert et Lez.

La normale en un point M (x_1, y_1) de la parabole $y^2 = 2px$ a pour équation

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1). \tag{1}$$

Le centre C du cercle qui touche la courbe en M et passe par le sommet O est à l'intersection de la normale (1) avec la perpendiculaire élevée au milieu de OM ; cette seconde droite est représentée par

$$y - \frac{1}{2}y_1 = -\frac{x_1}{y_1}\left(x - \frac{1}{2}x_1\right). \tag{2}$$

De (1) et (2) on tire, pour les coordonnées de C,

$$\alpha = \frac{1}{2}(2p + 3x_1), \quad \beta = -\frac{x_1^2}{y_1} = -\frac{y_1^2}{4p^2}. \tag{3}$$

L'ordonnée de C est donc le quart de celle du centre de courbure en M.

L'équation du lieu de C s'obtient en éliminant x_1, y_1 entre (1), (2) et $y_1^2 = 2px_1$; on trouve

$$y^2 = \frac{4(x-p)^3}{27p}. \tag{4}$$

Cette courbe se déduit de la développée de la parabole en multipliant les ordonnées de celle-ci par $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Introduisons le coefficient angulaire $m = -\frac{y_1}{p}$ de la normale MC ; comme $y_1 = -pm$, $x_1 = \frac{y_1^2}{2p} = \frac{pm^2}{2}$, l'équation (1) devient

$$y + pm = m\left(x - \frac{pm^2}{2}\right). \tag{5}$$

Si l'on y remplace x, y par les coordonnées de C, elle donne trois valeurs de m qui se rapportent l'une à la normale déjà considérée CM et les autres aux deux autres normales CM′, CM″ issues de C; désignons la première valeur par μ, les autres par m' et m''. Les formules (3), pour $y_1 = -p\mu$, $x_1 = \frac{p\mu^2}{2}$, seront

$$\alpha = \frac{p(3\mu^2+4)}{4}, \quad \beta = \frac{p\mu^3}{4};$$

ces expressions étant substituées à x et y dans (5), nous obtenons

$$2m^3 - 3\mu^2 m + \mu^3 = 0. \tag{6}$$

La somme des inverses des racines de (6) est $\frac{3\mu^2}{\mu^3}$; donc

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{m'} + \frac{1}{m''} = \frac{3}{\mu}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m'} + \frac{1}{m''}\right).$$

Cette relation exprime que CM′ et CM″ sont conjugués harmoniques par rapport à CM et une parallèle CX′ à l'axe de la parabole.

Voici une autre démonstration de la même propriété :

L'équation (1), si l'on remplace x_1 par $\frac{y_1^2}{2p}$ et que l'on considère x, y comme les coordonnées d'un point donné, a pour racines les ordonnées des points d'incidence des normales issues de ce point. Elle est, après le changement de y_1 en Y,

$$Y^3 + 2p(p - x)Y - 2p^2 y = 0.$$

Remplaçons x, y par les coordonnées (3) de (C) et x_1 par $\frac{y_1^2}{2p}$; il vient

$$2Y^3 - 3y_1^2 y + y_1^3 = 0,$$

ou, après suppression de la racine $Y = y_1$,

$$2Y^2 + 2Yy_1 - y_1^2 = 0.$$

Les coordonnées des points M′, M″ seront donc

$$y = -\frac{y_1}{2}(1 \mp \sqrt{3}), \quad x = \frac{x_1}{2}(2 \mp \sqrt{3}). \tag{7}$$

Les équations des normales CM′, CM″ menées par l'intersection des droites CM, CX′ sont de la forme

$$p(y - y_1) + y_1(x - x_1) + k(y_1 y + x_1^2) = 0.$$

ont vérifiées par les valeurs (7), on trouve

k étant égales et de signes contraires,

ent un faisceau harmonique.

BRAMESCU, BASTIN, EMMERICH et

4.

. III, p. 216.)

rieurs l'un à l'autre, on mène du centre O
au second, et du centre O′ *du second deux*
les huit points de rencontre de ces droites avec la
ces ne touchent pas, sont situés quatre à quatre sur deux
la ligne des centres. (E. N. BARISIEN.)

tion par M. EMMERICH. Soient OA′ et O′A deux tangentes aux cercles O′, O et situées du même côté de OO′. Désignons leur point d'intersection par L, et soient C, C′ les points où les circonférences O, O′ sont coupées par OA′, O′A respectivement. Des triangles semblables OAL, O′A′L avec les lignes homologues AC, A′C′, on tire OC : CL = O′C′ : C′L ce qui montre que CC′ est parallèle à OO′. Si les prolongements du second couple de tangentes OB′, O′B rencontrent les cercles O, O′ en D et D′, OO′ est bissectrice extérieure aux sommets des triangles isoscèles OCD, O′C′D′; donc OO′ est parallèle aux bases CD, C′D′. Il s'ensuit que les quatre points C, C′, D, D′ sont sur une parallèle à OO′; il en est de même avec leurs symétriques E, E′, F, F′ par rapport à OO′.

REMARQUES. 1° Soient P, Q les points de rencontre de AC, A′C′; AF, A′F′ respectivement. Des quadrilatères inscriptibles ACC′A′, AFF′A′ on conclut que PQ est l'axe radical des cercles O, O′.

2° Le quadrilatère APA′Q est un rectangle.

3° Les droites qui joignent deux quelconques des quatre points de contact produisent des cordes égales dans les deux circonférences.

4° Soient R, S les points de concours de AD, A′D′; AE, A′E′ respectivement. Des triangles isoscèles DD′R, EE′S, on conclut que les points R, S sont concycliques aux six points O, O′, A, A′, B, B′.

5° RS = OO′ et passe au milieu de OO′.

6° Les points de concours des quatre tangentes sont sur le cercle de similitude de O, O′.

La même question a été résolue par MM Abramescu, Bastien, Drechsel, Droz-Farny, Janne, Lez, Patriciu, Plakhovo et Rose; la plupart de ces correspondants observent que les triangles OA′O′, OPC, où P est la projection de C sur OO′, donnent $CP = \frac{RR'}{OO'}$, et que la forme de cette relation démontre le théorème.

Question 1489.

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 240).

Chercher le lieu du foyer de la parabole qui a trois points confondus en un point M ***variable d'une parabole*** P, ***et qui passe par le second point de rencontre de*** P ***avec son cercle osculateur en*** M. (E. N. Barisien).

Solution par M. A. H. Couvert. Soit

$$y = mx + \frac{p}{2m} \tag{1}$$

la tangente à P en M à la parabole $y^2 = 2px$. Les coordonnées de M sont $x = \frac{p}{2m^2}$, $y = \frac{p}{m}$. Soit M′ le second point de rencontre de P avec le cercle osculateur en M; MM′ ayant pour coefficient angulaire $-m$, son équation est $y + mx - \frac{3p}{2m} = 0$.

Le système de sécantes communes à P et à la parabole mobile π est la tangente en M et MM′; en sorte que l'équation de cette parabole est :

$$\lambda(y^2 - 2px) + \left(y - mx - \frac{p}{2m}\right)\left(y + mx - \frac{3p}{2m}\right) = 0,$$

ou

$$-m^2x^2 + (\lambda + 1)y^2 + p(1 - 2\lambda)x - \frac{2p}{m}y + \frac{3p^2}{4m^2} = 0.$$

Ecrivant que cette conique est une parabole, on a $\lambda = -1$ et l'équation devient :

$$-m^2x^2 + 3px - \frac{2py}{m} + \frac{3p^2}{4m^2} = 0.$$

Nous voyons que l'axe de cette parabole est perpendiculaire à celui de P, ce que l'on pouvait prévoir.

Cet axe a pour équation $-2m^2x + 3p = 0$ et le sommet de la parabole π est à l'intersection de la courbe avec son axe; on trouve pour ses coordonnées :

$$x = \frac{3p}{2m^2}, \quad y = \frac{3p}{2m}. \tag{2}$$

Ceci nous montre, en passant, que le sommet de la parabole π décrit une parabole $y^2 = \frac{3}{2}px$. Pour avoir le foyer nous chercherons l'intersection de (1) avec la tangente au sommet de la parabole mobile; par ce point nous mènerons une perpendiculaire à (1) qui coupera l'axe au foyer cherché.

La combinaison de (1) et (2) donne

$$x = \frac{p}{m^2}, \quad y = \frac{3p}{2m},$$

et le foyer est déterminé par les deux équations

$$x = \frac{3p}{2m^2}, \quad y - \frac{3p}{2m} = -\frac{1}{m}\left(x - \frac{p}{m^2}\right).$$

D'où on tire $y = p\,\dfrac{3m^2 - 1}{2m^3}$.

Le lieu est donc une cubique unicursale symétrique par rapport à Ox; son équation cartésienne est

$$y^2 = \frac{x(9p - 2x)^2}{54p}.$$

Elle est composée d'une boucle et de deux branches paraboliques faisant suite à la boucle au point double $x = \dfrac{9p}{2}$, $y = 0$.

Solutions analogues par MM. Emmerich, Rose, Abramescu et Bastin.

Question 1445.

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 264).

D'un point M *donné sur une ellipse on abaisse des perpendiculaires sur deux diamètres conjugués quelconques. Démontrer que la droite joignant les pieds* P *et* Q *de ces perpendiculaires passe par un point fixe* M', *et trouver le lieu décrit par* M' *lorsque* M *parcourt l'ellipse donnée.*

Solution par MM. Mirea (Bucarest), Speckman (Arnhem), Ju… (Brunn). 1° Le faisceau des diamètres conjugués d'une conique involutif, le faisceau des droites (MP, MQ) est en involution. La … PQ passe, d'après un théorème bien connu, par un point fixe M… les points (P, Q) sont toujours situés sur la circonférence de dia… MO. Pour déterminer la position de ce point, soient A et B les p… tions du point M sur les axes de l'ellipse et soit C la projection du … point sur le diamètre ON conjugué à la direction OM : la droite A… la normale MC se coupent en M′, car AB et CM sont deux po… particulières de PQ.

2° Cela étant, les coordonnées du point M′ sont :

$$x' = \frac{a^2 x}{a^2 + b^2}, \quad y' = \frac{b^2 y}{a^2 + b^2}$$

(x, y) étant les coordonnées du point M.

Le lieu de M′ est donc une ellipse de centre O et ayant pour grand des axes les longueurs

$$\frac{2a^2}{a^2 + b^2}, \quad \frac{2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Solution par M. P. Bastin. Soient les équations de deux diamè conjugués

$$Ky - b^2 x = 0, \quad a^2 y + Kx = 0.$$

Les perpendiculaires MP, MQ abaissées du point $M(x', y')$ sur droites ont respectivement pour équations :

$$b^2(y - y') + K(x - x') = 0, \quad K(y - y') - a^2(x - x') = 0.$$

L'équation de la droite PQ résultera de l'identification des d équations :

$$\lambda(Ky - b^2 x) + b^2(y - y') + K(x - x') = 0,$$
$$\mu(a^2 y + Kx) + K(y - y') - a^2(x - x') = 0.$$

On trouve, par un calcul facile,

$$x\{(K^2 - a^2b^2)y' - K(a^2 + b^2)x'\} + y\{K(a^2 + b^2)y' + (K^2 - a^2b^2)\}$$
$$= (K^2 - a^2b^2)x'y' + K(b^2y'^2 - a^2x'^2).$$

Si l'on pose $\frac{K^2 - a^2b^2}{K(a^2 + b^2)} = m$, l'équation peut s'écrire

$$yy' - xx' - \frac{b^2y'^2 - a^2x'^2}{a^2 + b^2} + m(yx' + xy' - x'y') = 0.$$

La droite qu'elle représente passe, quelle que soit la valeur de m et par suite de K, par le point M', intersection des droites ayant pour équations

$$yy' - xx' = \frac{b^2y'^2 - a^2x'^2}{a^2 + b^2}, \quad yx' + xy' = x'y'.$$

Résolvant ces dernières, on trouve $x = \frac{a^2x'}{a^2 + b^2}$, $y = \frac{b^2y'}{a^2 + b^2}$; telles sont les coordonnées de M'.

On vérifie aisément que la droite MM' n'est autre que la normale à l'ellipse; le point M' est donc à l'intersection de cette normale et de la droite qui joint les projections de M sur les axes.

On trouve pour coordonnées de M, en fonction de celles de M' : $x' = \frac{a^2 + b^2}{a^2}x$, $y' = \frac{a^2 + b^2}{b^2}y$. Portant ces valeurs dans l'équation de condition $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ et posant $\frac{a^2}{a^2 + b^2} = \alpha$, $\frac{b^2}{a^2 + b^2} = \beta$, on arrive à l'équation $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

Le point M' décrit donc une ellipse.

Autres solutions analytiques par MM. Emmerich, Couvert, Lez et Abramescu.

La même question a été résolue par M. Droz-Farny, qui a observé que le point M' est le milieu de la distance de M au point de Frégier F relatif à M. Pour démontrer cette dernière propriété, observons que F est à l'intersection de la normale MM' avec le diamètre symétrique de OM par rapport à l'axe focal de l'ellipse, et que ce diamètre OF est parallèle à la droite joignant les projections de M sur les axes.

QUESTIONS D'EXAMEN

1198. Résoudre l'équation

$$x = \sqrt{b - x}\sqrt{c - x} + \sqrt{c - x}\sqrt{a - x} + \sqrt{a - x}\sqrt{b - x},$$

où a, b, c sont des nombres donnés, différents de zéro, et où les radicaux ont la signification arithmétique.

Ayant posé, pour abréger,

$$A = ab + ac - bc, \quad B = bc + ba - ac, \quad C = ca + cb - ab,$$

on établira les conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème

soit possible et que la valeur de x soit différente des trois nombres a, b, c sous l'une des deux formes suivantes, dont on montrera l'équivalence :

1° le produit abc doit être positif et les trois nombres A, B, C doivent être de même signe; 2° les six nombres a, b, c, A, B, C doivent être positifs.

(Concours généraux, Math. élém., 10 juin 1903, de 8 $\frac{1}{2}$ à 2 $\frac{1}{2}$.)

1129. Déterminer p et q de manière que

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{mx+n}{ax+b} - \operatorname{arc\,tg}(px+q) \qquad (1)$$

ait une valeur indépendante de x. (Petit-Bois).

Comme

$$\operatorname{arc\,tg}\alpha - \operatorname{arc\,tg}\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta},$$

la question revient à supposer la fraction

$$\frac{mx+n-(ax+b)(px+q)}{ax+b+(mx+n)(px+q)} \equiv \frac{-apx^2+(m-bp-aq)x+n-bq}{mpx^2+(a+mq+np)x+b+nq}$$

égale à une constante, ce qui exige que les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux termes de la fraction soient proportionnels. Donc

$$-\frac{a}{m} = \frac{m-bp-aq}{a+mq+np} = \frac{n-bq}{b+nq}.$$

En combinant le premier rapport successivement avec les deux autres, on trouve

$$p = \frac{a^2+m^2}{bm-an}, \qquad q = \frac{ab+mn}{bm-an}.$$

1130. Une ellipse dont le centre C se meut sur l'axe Ox et dont le plan est constamment perpendiculaire à cet axe, se déplace (et se déforme) de manière que l'un de ses sommets A décrive une droite OD dans le plan xy et qu'un autre sommet B décrive une circonférence située dans le plan xz et ayant pour diamètre un segment OE de l'axe Ox.

Déterminer l'angle $DOx = \varphi$ par la condition que le volume engendré par l'ellipse soit équivalent à la sphère de diamètre OE. (Petit-Bois.)

Si $OC = x$, les demi-axes de l'ellipse variable sont $OA = x \operatorname{tg}\varphi$, $OB = \sqrt{x(2R-x)}$, et le volume engendré est

$$V = \pi \operatorname{tg}\varphi \int_0^{2R} x\sqrt{x(2R-x)}\,dx.$$

Posons $x = 2R \sin^2 \alpha$; alors

$$V = 16\pi R^3 \operatorname{tg} \varphi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha \, d\alpha.$$

Remplaçons $\cos^2 \alpha$ par $1 - \sin^2 \alpha$ et appliquons la formule

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2m} x = \frac{3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2m} \frac{\pi}{2};$$

il vient $V = \frac{1}{3}\pi^2 R^3 \operatorname{tg} \varphi$. La condition du problème donne ensuite

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{8}{3\pi} = 0{,}8488, \qquad \varphi = 40°19'30''.$$

1131. Dans un triangle variable ABC, on donne les milieux P et Q des côtés AB, AC et l'angle en B. On demande :

1° le lieu du point de concours G des médianes du triangle ABC ; 2° le lieu de l'orthocentre H de ABC ; 3° le lieu du milieu M du rayon OA du cercle circonscrit.

(*École normale primaire supérieure de St-Cloud.*)

L'angle APQ, égal à B, détermine le côté (indéfini) AB et la droite Qx qui passe par le milieu R de BC. Le lieu de G est une parallèle à AB qui divise la distance des droites AB, Qx dans le rapport 2 : 1. Menons Py perpendiculaire à AP et soient H′ le milieu de AH, R′ celui de PQ. Comme AH′ est égal et parallèle à OR, le lieu de H′ est la droite symétrique de Py par rapport à R′. Le lieu de H est une droite menée par le point de rencontre de AB avec le lieu de H′. M étant le centre du cercle circonscrit au quadrilatère APOQ se trouve sur la perpendiculaire élevée en R′ sur PQ.

1132. Soient M, M′ deux points de l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$; tels que les tangentes en M et M′ soient rectangulaires. Démontrer :

1° que les droites OM, OM′ sont dirigées suivant deux diamètres conjugués d'une ellipse dont les axes sont proportionnels à a^2 et b^2 ; 2° que les diamètres qui passent par les points correspondant à M et M′ sur le cercle principal sont dirigés suivant deux diamètres conjugués de l'ellipse proposée.

1133. Soient α et β les angles que deux diamètres conjugués d'une conique à centre font avec l'axe focal ; démontrer la relation

$$\frac{d\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{d\beta}{\sin 2\beta} = 0.$$

1134. Décomposer en facteurs

$$(b-c)(x^2+2yz) + (c-a)(y^2+2zx) + (a-b)(z^2+2xy).$$

Égaler à zéro et résoudre par rapport à x.

1135. Par un point I pris sur la diagonale AC d'un parallélogramme ABCD, on mène aux côtés des parallèles qui divisent la figure en quatre parallélogrammes. Démontrer : 1° que les deux parallélogrammes qui admettent les points B et D pour sommets ont des surfaces égales; 2° que la droite qui joint leurs centres a une direction fixe et une grandeur fixe lorsque le point I se déplace sur AC.

(*École supérieure des Postes et des Télégraphes*, 1903).

QUESTIONS PROPOSÉES.

***1457.** Dans tout triangle sphérique ABC, on a

$$\left(\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}+\cot\frac{c}{2}\cot\frac{a}{2}+\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}-1\right)$$
$$\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}-1\right)=4.$$

(R. Guntsche).

1458. Soient M, M' deux points d'une parabole symétriques par rapport à l'axe. En un point quelconque P de la courbe, on élève sur la corde PM une perpendiculaire, qui rencontre en Q le diamètre mené par M'. Démontrer que la projection de PQ sur l'axe est constante.

(J. Neuberg).

1459. Etant donné un rectangle ABCD, on construit deux cercles O, O' qui se touchent extérieurement en M et qui touchent le premier AB en B, le second AD en D. Trouver :

1° le lieu du point M et celui du milieu de OO';

2° l'enveloppe de la ligne des centres OO';

3° l'enveloppe de la tangente commune en M;

4° l'enveloppe des autres tangentes communes;

5° le lieu du centre de similitude externe;

6° le lieu du point de rencontre de la circonférence O avec la droite DM;

7° les lieux des points où la droite OO' rencontre une seconde fois les deux circonférences O, O'.

1460. Le lieu des foyers des hyperboles équilatères qui passent par deux points fixes d'une circonférence donnée et par les extrémités d'un diamètre variable de cette circonférence, est une lemniscate de Bernoulli.

(E. N. Barisien.)

SUR LE PENTAGONE PLAN SIMPLE(*),

par M. J. Neuberg.

Etant donné un pentagone plan simple ABCDEA, nous prenons pour *côtés orientés* AB, BC, CD, DE, EA et nous les désignons respectivement par d, e, a, b, c; un côté est donc représenté par la même lettre que le sommet opposé.

Nous appelons *médianes* du pentagone les droites joignant un sommet au milieu du côté opposé, et *hauteurs* les perpendiculaires abaissées d'un sommet sur le côté opposé. Si les cinq médianes concourent en un même point, le pentagone est dit *médianocentrique;* si les cinq hauteurs sont concourantes, il est dit *orthocentrique*. Un pentagone régulier est à la fois médianocentrique et orthocentrique.

1. *Toute transversale u rencontre les côtés a, b, c, d, e d'un pentagone en des points* A', B', C', D', E' *tels que le produit des rapports de section qu'ils déterminent sur ces côtés est égal à l'unité.*

Il faut démontrer que

$$\frac{A'C}{A'D}\cdot\frac{B'D}{B'E}\cdot\frac{C'E}{C'A}\cdot\frac{D'A}{D'B}\cdot\frac{E'B}{E'C}=1. \qquad (1)$$

En effet, si α, β, γ, δ, ε sont les perpendiculaires abaissées de A, B, C, D, E sur u, ces droites étant assujetties à la règle des signes, on a

$$\frac{A'C}{A'D}=\frac{\gamma}{\delta}, \quad \frac{B'D}{B'E}=\frac{\delta}{\varepsilon}, \cdots;$$

en multipliant ces égalités membre à membre, on obtient la relation (1).

2. Réciproquement, *si cinq points* A', B', C', D', E' *marqués sur les côtés a, b, c, d, e d'un pentagone sont tels que le produit des rapports de section correspondants est égal à l'unité, et si quatre de ces points sont situés sur une même droite, le cinquième point est aussi sur cette droite.*

3. *Désignons par a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 les droites qui joignent les sommets* A, B, C, D, E *à un point quelconque* M, *et par* A_1, B_1, C_1 D_1, E_1 *où ces*

(*) Le présent article sert en quelque sorte d'introduction à un article de M. Majcen sur le pentagone orthocentrique, qui sera publié prochainement.

droites rencontrent respectivement les côtés opposés; on a

$$\frac{A_1C}{A_1D}\cdot\frac{B_1D}{B_1E}\cdot\frac{C_1E}{C_1A}\cdot\frac{D_1A}{D_1B}\cdot\frac{E_1B}{E_1C}=-1, \tag{2}$$

$$\frac{\sin a_1c}{\sin a_1d}\cdot\frac{\sin b_1d}{\sin b_1c}\cdot\frac{\sin c_1e}{\sin c_1a}\cdot\frac{\sin d_1a}{\sin d_1b}\cdot\frac{\sin e_1b}{\sin e_1c}=-1. \tag{3}$$

En effet,

$$\frac{A_1C}{A_1D}=\frac{MAC}{MAD},\quad \frac{B_1D}{B_1E}=\frac{MBD}{MBE},\ \ldots \tag{4}$$

où MAC, MAD, ... représentent les aires des triangles qui ont pour sommet commun le point M et pour base une diagonale du pentagone, ces aires étant soumises à la règle des signes, de sorte que MAC = — MCA, MAD = — MDA, ... En multipliant les égalités (4) membre à membre, on obtient la relation (2).

Soient maintenant α, β, γ, δ, ε, les perpendiculaires abaissées de M sur les côtés a, b, c, d, e, la région positive pour chaque perpendiculaire étant celle qui se trouve à la gauche d'un observateur parcourant le côté correspondant, orienté comme nous l'avons dit ci-dessus. D'après cette convention on peut écrire

$$\frac{\sin a_1c}{\sin a_1d}=-\frac{\gamma}{\delta},\quad \frac{\sin b_1d}{\sin b_1e}=-\frac{\delta}{\varepsilon},\ \ldots;$$

d'où l'on conclut aisément la relation (3).

4. Réciproquement, *si cinq droites* a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 *menées par les sommets d'un pentagone vérifient l'une des égalités* (2) *et* (3) *et si quatre de ces droites passent par un même point, la cinquième droite passera également par ce point.*

5. *Soient* A', B', C', D', E' *les pieds des perpendiculaires abaissées d'un même point* M *sur les côtés a, b, c, d, e d'un pentagone; on a*

$$\begin{aligned}&\overline{CA'}^2+\overline{DB'}^2+\overline{EC'}^2+\overline{AD'}^2+\overline{BC'}^2\\&=\overline{DA'}^2+\overline{EB'}^2+\overline{AC'}^2+\overline{BD'}^2+\overline{CE'}^2.\end{aligned} \tag{5}$$

En effet, de $\overline{MA'}^2=\overline{MC}^2-\overline{CA'}^2=\overline{MD}^2-\overline{DA'}^2$ on déduit

$$\overline{CA'}^2-\overline{DA'}^2=\overline{MC}^2-\overline{MD}^2.$$

De même

$$\overline{DB'}^2-\overline{EB'}^2=\overline{MD}^2-\overline{ME}^2,\quad \overline{EC'}^2-\overline{AC'}^2=\overline{ME}^2-\overline{MA}^2,\quad \ldots;$$

en faisant la somme de ces égalités on obtient la relation (5).

6. Réciproquement, *si cinq points marqués sur les côtés d'un pentagone vérifient la relation* (5) *et si quatre des perpendiculaires élevées en ces points sur les côtés correspondants concourent en un même point, la cinquième perpendiculaire passe également par ce point.*

7. Du § 4 on conclut immédiatement que *si quatre médianes d'un pentagone concourent en un même point, la cinquième médiane passe également par ce point.*

On peut prendre arbitrairement quatre sommets B, C, D, E d'un pentagone médianocentrique. En effet, soit G le point de concours des médianes BB', EE' (B', E', ... désignant les milieux des côtés b, e ,..); menons par E une droite telle que le segment EA limité à A'G soit divisé en deux parties égales par CG : alors quatre médianes du pentagone ABCDE concourent en G.

La démonstration analytique de la proposition énoncée ci-dessus se fait aisément. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... les coordonnées cartésiennes des points A, B, ... et posons $u_{mn} = y_m x_n - y_n x_m$; l'équation de la médiane AA', par exemple, est

$$U_1 \equiv y(2x_1 - x_2 - x_4) - x(2y_1 - y_2 - y_4) + u_{12} + u_{14} = 0.$$

Des permutations tournantes donneront les équations des autres médianes. Or, on voit facilement que

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 \equiv 0;$$

donc s'il existe des valeurs de x, y qui annulent U_1, U_2, U_3, U_4, elles annulent aussi U_5.

Les conditions analytiques d'un pentagone medianocentrique sont

$$\left\| \begin{array}{cccc} 2x_1 - x_3 - x_4 & 2y_1 - y_3 - y_4 & u_{13} + u_{14} \\ 2x_2 - x_4 - x_5 & 2y_2 - y_4 - y_5 & u_{24} + u_{25} \\ 2x_3 - x_5 - x_1 & 2y_3 - y_5 - y_1 & u_{35} + u_{31} \\ 2x_4 - x_1 - x_2 & 2y_4 - y_1 - y_2 & u_{41} + u_{42} \\ 2x_5 - x_2 - x_3 & 2y_5 - y_2 - y_3 & u_{52} + u_{53} \end{array} \right\| = 0;$$

cette notation signifie que tous les déterminants formés avec trois lignes du tableau rectangulaire sont nuls, conditions qui se réduisent à deux conditions distinctes.

8. *Si quatre hauteurs* AA', BB', CC', DD' *d'un pentagone* ABCDE

concourent en un même point H, *la cinquième hauteur* EE' *passe aussi par* H.

La démonstration de ce théorème peut se déduire du § 6; car

$$\overline{CA'}^2 - \overline{DA'}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2, \quad \overline{DB'}^2 - \overline{EB'}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BE}^2, \quad \ldots,$$

et en faisant la somme de ces égalités on obtient pour second membre zéro.

On peut également s'appuyer sur le § 4. En effet, si a_1, b_1, ... désignent les hauteurs, les angles aigus a_1d et ad, a_1c et ac sont complémentaires; mais en tenant compte de l'*orientation* des côtés, on peut écrire

$$\frac{\sin a_1c}{\sin a_1d} = -\frac{\cos ac}{\cos ad},$$

et des égalités analogues pour b_1, c_1, d_1, e_1, etc.

En posant $v_{mn} = x_m x_n + y_m y_n$, on trouve pour l'équation de la hauteur a_1

$$V_1 \equiv x(x_3 - x_4) + y(y_3 - y_4) + v_{25} - v_{24} = 0.$$

On voit immédiatement que

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 \equiv 0;$$

donc, si les équations $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$, $V_4 = 0$ admettent une solution commune (x, y), cette solution vérifie également l'équation $V_5 = 0$.

Remarquons aussi qu'étant donnés arbitrairement quatre sommets B, C, D, E d'un pentagone orthocentrique, on peut déterminer le cinquième.

Les conditions d'un pentagone orthocentrique sont

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & v_{35} - v_{34} \\ x_4 - x_5 & y_4 - y_5 & v_{45} - v_{55} \\ x_5 - x_3 & y_5 - y_3 & v_{53} - v_{54} \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & v_{11} - v_{12} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & v_{21} - v_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1903 (BELGIQUE).

Solution de la question de Géométrie analytique,

par PAUL BASTIN.

QUESTION. Dans une ellipse donnée rapportée à ses axes de symétrie, on mène par le foyer F deux rayons vecteurs FM, FN tels que

$$\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}=\frac{1}{k},$$

k désignant une constante.

1° Rechercher l'équation du lieu géométrique du point de rencontre P des tangentes à l'ellipse aux points variables M et N;

2° On demande une discussion algébrique de l'équation trouvée, pour les diverses valeurs positives de k, afin de reconnaître la nature du lieu;

3° Pour $k=\frac{b^2}{2a}$, la courbe dégénère en deux droites dont l'une est la directrice correspondant au foyer F de l'ellipse donnée. Démontrer directement que la polaire de tout point P de cette droite rencontre l'ellipse en deux points M, N tels que

$$\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}=\frac{2a}{b^2}.$$

Se servir à cet effet des propriétés de l'ellipse et de l'équation de cette conique en coordonnées polaires, le pôle étant au foyer F et l'axe polaire se confondant avec le grand axe de l'ellipse.

4° Pour $k=\frac{1}{2}a$, le lieu est une parabole; trouver l'équation de cette courbe rapportée à son axe de symétrie et à la tangente au sommet.

5° Quelle valeur faut-il attribuer à k pour que le lieu soit une hyperbole équilatère? Rapporter cette hyperbole à son centre et à ses axes, puis à ses asymptotes.

SOLUTION. 1° Soient x', x'' les abcisses des points M et N; α, β les coordonnées du point P.

La relation $\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}=\frac{1}{k}$ se traduit par

$$2a^2k-ack(x'+x'')=a^4-a^2c(x'+x'')+c^2x'x''. \qquad (1)$$

L'ellipse donnée et la droite MN, polaire du point P, ont respectivement pour équations

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \qquad (2)$$
$$a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b^2. \qquad (3)$$

L'élimination de y entre (2) et (3) conduit à l'équation suivante, qui fournit les abcisses des points M et N :

$$x^2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2) - 2a^2b^2\alpha x + a^4(b^2 - \beta^2) = 0.$$

On en tire

$$x' + x'' = \frac{2a^2b^2\alpha}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}, \quad x'x'' = \frac{a^4(b^2 - \beta^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

Si l'on transporte ces valeurs dans l'équation (1), on trouve

$$a\beta^2(2ak - b^2) + b^2\alpha^2(2k - a) - 2b^2c\alpha(k - a) - ab^2c^2 = 0.$$

Les coordonnées de P vérifient donc l'équation du 2e degré

$$ay^2(2ak - b^2) + b^2x^2(2k - a) - 2b^2cx(k - a) - ab^2c^2 = 0. \qquad (4)$$

Le lieu demandé est généralement une courbe du second ordre dont l'un des axes coïncide avec le grand axe de l'ellipse donné et dont l'autre est parallèle au petit axe.

2° Pour reconnaître la nature de la courbe, il y a lieu de considérer l'expression

$$\Delta = -4ab^2(2ak - b^2)(2k - a) = -16a^2b^2\left(k - \frac{b^2}{2a}\right)\left(k - \frac{a}{2}\right).$$

Si k est inférieur à $\frac{b^2}{2a}$ ou supérieur à $\frac{a}{2}$, Δ est négatif et la courbe est une ellipse. Δ est nul pour $k = \frac{b^2}{2a}$ ou $k = \frac{a}{2}$. Dans le premier cas, la coordonnée y disparaissant de l'équation, celle-ci représente deux droites; dans le second cas, l'équation représente une parabole. k variant de $\frac{b^2}{2a}$ à $\frac{a}{2}$, Δ est positif et la courbe est une hyperbole.

L'équation (4) est vérifiée par $x = c$, $y = 0$; le foyer F est donc un sommet de la courbe obtenue. On remarquera qu'il y a toujours une partie de cette courbe intérieure à l'ellipse donnée, partie à laquelle le point P ne saurait appartenir, si l'on exige que M et N soient réels.

Si l'on élimine y entre les équations (2) et (4), on trouve

$$c^2x^2 + 2ac(k-a)x - a^2(2k-a) = 0,$$

équation qui se décompose en

$$x = \frac{a^2}{c}, \quad x = -\frac{a(2k-a)}{c}.$$

La première de ces droites est extérieure à l'ellipse donnée. S'il en était de même de la deuxième, la courbe obtenue serait tout entière intérieure à l'ellipse; de là les inégalités

$$-a < \frac{-a(2k-a)}{c} < a,$$

qui se transforment en

$$\frac{a-c}{2} < k < \frac{a+c}{2}.$$

Ce sont bien là les limites de k, puisque les rayons vecteurs FM et FN sont compris entre $a-c$ et $a+c$.

On voit par ce qui précède que la partie parasite du lieu est comprise entre les ordonnées $x = c$ et $x = -\frac{a(2k-a)}{c}$. Si l'on attribue à k l'une de ses valeurs limites, le point P occupera l'une des extrémités du grand axe de l'ellipse donnée.

3° Si l'on fait $k = \frac{b^2}{2a}$ dans l'équation (4), celle-ci devient

$$cx^2 - x(a^2+c^2) + a^2c = 0$$

ou

$$(x-c)(cx-a^2) = 0.$$

Le lieu se compose donc de deux droites : l'ordonnée indéfinie menée par le foyer F et la directrice correspondant à ce foyer.

On sait que la polaire MN de tout point P d'une directrice passe par le foyer correspondant. Appelant ω l'angle que fait FM avec le grand axe de l'ellipse, l'angle que fait FN avec le même axe sera $\pi + \omega$. On aura donc

$$FM = \frac{\left(\frac{b^2}{a}\right)}{1+e\cos\omega}, \quad FN = \frac{\left(\frac{b^2}{a}\right)}{1+e\cos(\pi+\omega)} = \frac{\left(\frac{b^2}{a}\right)}{1-e\cos\omega},$$

puis

$$\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN} = \frac{2a}{b^2}.$$

4° Pour $k = \frac{a}{2}$, l'équation (4) devient $cy^2 + b^2x - b^2c = 0$ et représente une parabole. Transportant l'origine des coordonnées au point F, sommet de la parabole, on trouve pour équation simplifiée $y^2 = -\frac{b^2}{c}x$.

5° Ecrivant que la somme des coefficients de x^2 et de y^2 est nulle, on trouve $k = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$; telle est la condition pour que le lieu soit une hyperbole équilatère.

L'équation (4) devient en conséquence

$$y^2 - x^2 + 2\frac{a^2}{c}x - (a^2 + b^2) = 0.$$

Si l'on transporte l'origine au centre de la courbe, point dont l'abcisse est $\frac{a^2}{c}$, l'équation se réduira à : $x^2 - y^2 = \frac{b^4}{c^2}$. Rapportée à ses asymptotes, l'hyperbole serait représentée par l'équation $xy = \frac{b^4}{2c^2}$.

Remarques. I. La partie parasite du lieu s'explique par cette circonstance que la polaire d'un point intérieur à l'ellipse peut rencontrer cette courbe en deux points imaginaires dont les abscisses, de la forme $\lambda + \mu\sqrt{-1}$, $\lambda - \mu\sqrt{-1}$ vérifient l'équation (1). Pour la même raison, on peut admettre des valeurs négatives de k.

II. L'hypothèse $k = \frac{b^2}{2a}$ donne encore pour une partie du lieu cherchés la droite $x - c = 0$, c'est-à-dire la perpendiculaire FE élevée par le foyer sur l'axe focal. La polaire MN d'un point P de cette droite passe par le pied de la directrice, et il est facile de voir que FE est la bissectrice de l'angle MFN. Donc, si FM rencontre l'ellipse une seconde fois en N', on a FN' = FN. Mais on a vu ci-dessus que $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN'} = \frac{2a}{b^2}$; par conséquent $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN} = \frac{2a}{b^2}$, ce qui démontre de nouveau que FE fait partie du lieu. (J. N.)

BIBLIOGRAPHIE.

H. G. Zeuthen. Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsche Ausgabe, unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von R. Mayer. Leipzig, Teubner, 1903 (In-8° de VIII-434 pp. in-8; 32 fig. dans le texte). **Prix : 16 marcs.**

Cet ouvrage fait suite à l'*Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge* du savant professeur de Copenhague. L'auteur tâche surtout de mettre en relief le développement et l'enchaînement des idées et des méthodes. Voici le sommaire du volume :

I. *Aperçu historique et biographique* (pp. 1-80). II. *Analyse des quantités finies.* 1-6. Algèbre, trigonométrie, logarithmes. 7-9. Théorie des nombres et probabilités. 10-12. Géométrie. 13. L'analyse des quantités finies après Descartes. III. *Origine et premiers développements du Calcul infinitésimal.* 1. La mécanique. 2-5. Quadratures, séries, problème des tangentes. 6-7. La méthode inverse des tangentes chez Barrow et Newton. 8-11. Newton : séries, fluxions. Principes. 12. Leibniz jusqu'à la fondation du Calcul différentiel. 13. Ère nouvelle dans l'histoire des mathématiques.

Nous recommandons vivement ce bon livre à tous ceux qui s'occupent d'histoire des mathématiques, même s'ils possèdent le grand ouvrage de Cantor.

Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis der wichstigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften von Dr. E. Wölffing, Professor a. d. Kgl. technischen Hochschule zu Stuttgart. In zwei Teilen. I. Teil : Reine Mathematik, mit einer Einleitung : Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. Leipzig, Teubner, 1903 (In-8 de XXXVI-416 pp.). Prix : 14 marcs.

L'auteur répartit les titres d'environ 13000 ouvrages, en 313 sections : 1-6. Histoire, philosophie, pédagogie. 7-26. Théorie des nombres. 27-56. Algèbre. 57-84. Séries. 85-107. Analyse infinitesimale. 108 138. Théorie des fonctions. 139-182. Géométrie élémentaire. 183-311. Géometrie de position, théorie des courbes, des surfaces, géométrie infinitésimale, géométrie pluckerienne, etc. 312. Collections de formules. 313. Récréations mathématiques. Vient ensuite une table des matières (pp. 360-371), une des auteurs (pp. 372-414); puis des corrections (pp. 415-416)(*).

G. Enestrŏm a publié un compte rendu critique de cet ouvrage dans la *Bibliotheca mathematica*, (3), IV, pp. 302-313.

(*) L'auteur demande qu'on veuille bien lui signaler les erreurs qui peuvent se rencontrer dans son livre; elles sont assez nombreuses. En voici une. Nous ne sommes pas l'auteur du livre signalé p. 231 : *P. A. Mansion. Quadrature du cercle. Paris* 1871. *Gauthier-Villars*, 10 *fr.* Dans l'index des noms, p. 396, il faut donc nous séparer de P. A. Mansion, le quadrateur. (P. Mansion).

Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance herausgegeben von M. CURTZE. In zwei Theilen. Erster Theil. (In-8 de X-336 pp. avec 127 fig. dans le texte). Zweiter Theil (In 8 de IV pp. et pp. 337-638 avec 117 fig. dans le texte). Leipzig, Teubner, 1902. Prix : 16 + 14 marcs.

Ces deux volumes renferment quatre ouvrages. 1. *Liber Embadorum* de Savasorda, juif espagnol de la fin du onzième siècle, traité de géométrie pratique, l'une des sources de Léonard de Pise. Curtze donne le texte latin et une traduction allemande. 2. *Correspondance de Regiomontanus* avec J. Bianchini, J. von Speyer et Ch. Röder. Regiomontanus y manie très bien le calcul, l'algèbre et la trigonométrie. 3. *Pratica geometriae* de Leonardo Mainardi de Cremone, texte latin, avec traduction allemande. 4. *Die Algebra des Initius Algebras ad Ylem geometram magistrum suum.* Livre étrange où les titres et les énoncés sont en latin, avec traduction et commentaire en allemand du 16e siècle; on y trouve des choses assez remarquables.

L'ouvrage de Curtze se termine par une excellente table des auteurs et des matières.

Elementi di Aritmetica et di Algebra ad uso dell' istruzione secondaria par A. CAPELLI, Professore ordinario nella R. Universita di Napoli Libro III. I numeri negativi. Napoli, Pellerano, 1904 (In-12 de VIII-112 pp.). Prix : Lire 1,80.

Opérations fondamentales. Équation $ax+by+c=0$; équation du second degré à une inconnue, etc.; congruences, théorèmes de Fermat et de Wilson. Bon livre pour les professeurs; beaucoup d'exercices.

F. Amodeo. Elementi di Algebra. Napoli, L. Pierro, 1903 (In-12 de XV-160 pp.). Prix: Lire 2,00.

Sommaire. 1. Fonctions, équations, inéquations; 2. Équations équivalentes; 3-5. Équations linéaires; 6-8. Équations du second degré; 9. Équations exponentielles et logarithmiques. — Beaucoup d'exercices. — Bon livre pour les professeurs et sans doute pour les élèves auxquels il est destiné.

Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen von J. KÖNIG. Aus dem Ungarichen übertragen vom Verfasser. Leipzig, Teubner, 1903 (In-8 de X-564 pp. in-8). Prix : 18 marcs.

Exposé complet, avec maintes recherches personnelles de l'auteur, de la profonde et difficile théorie (purement arithmétique) de l'algèbre due à Kronecker.

Vorlesungen über Mathematik von L. KRONECKER. Zweiter Teil. Zweiter Abschnitt. **Vorlesungen über Determinantentheorie.** Erster Band. Leipzig, Teubner, 1903 (In-8 de XII 390 pp.). Prix : 20 marcs.

K. Hensel publie ici les vingt et une premières leçons de Kronecker sur les déterminants. On y trouve les applications les plus inattendues aux questions les plus difficiles de l'algèbre et de l'analyse arithmétisées par l'illustre mathématicien.

NOTES MATHÉMATIQUES.

9. *Sur un groupe de trois paraboles.* Dans l'article qui porte ce titre (*Mathesis*, 1903, p. 249), je dis que les courbes considérées ont probablement déjà été étudiées. M. Droz-Farny nous rappelle qu'il s'en est occupé dans *Mathesis*, 1895, p. 227. (J. N.)

10. *Sur le quadrilatère circonscriptible.* Dans le n° de janvier 1904 de *Mathesis*, p. 14, vous demandez s'il existe pour un quadrilatère non convexe dans lequel $AB \pm CD = AD \pm BC$, une démonstration analogue à celle que vous donnez p. 13 pour le quadrilatère convexe et que vous attribuez à M. Fricke (1903). J'ai donné la démonstration générale que vous désirez dans le n° du 1ᵉʳ janvier 1901 du *Bulletin de Mathématiques élémentaires*. Ma démonstration est la même que celle de M. Fricke ; de plus je remarque que, dans les applications, il s'agit de reconnaître si un cercle tangent à trois côtés du quadrilatère ABCD est tangent au quatrième. Pour cela, il importe peu de savoir que le quadrilatère est circonscriptible ; car il existe quatre cercles tangents à trois droites. Il faut choisir sur les côtés quatre directions x, y, z, t ; il existe un *cycle* et un seul tangent aux trois axes x, y, z ; pour qu'il soit tangent au quatrième axe t, il faut et il suffit qu'on ait, en tenant compte des signes, $AB - BC + CD - DA = 0$.

L'année dernière, un des lecteurs de *Mathesis* demandait des renseignements sur le problème de Malfatti dans les cas autres que le cas classique. Le problème a été traité par M. Fontené et moi d'une façon absolument générale et complète (avec démonstration de la réciproque) dans le *Bulletin de Mathématiques élémentaires* du 15 avril 1900.

(L. Gérard.)

Les démonstrations de M. Fricke s'appliquent également aux quadrilatères non convexes pourvu que l'on tienne compte de *l'orientation* des côtés. (N. Quint, de La Haye.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

*Question 1412.

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 80).

Si $a^2 = bc$, ***la circonférence qui passe par les points de contact des côtés*** AB, AC ***du triangle*** ABC ***avec les circonférences exinscrites correspondantes*** I_c, I_b, ***et par le point de contact du côté*** BC ***avec la circonférence inscrite*** I, ***touche le côté*** BC. (J. NEUBERG.)

Solution par M. G. VERHEUGEN. Soient M, N, P les points de contact correspondant respectivement aux circonférences I_c, I_b, et I. Si BC touche la circonférence MNP, il faut qu'on ait

$$\text{l'angle PMN} = \text{l'angle NPC}, \quad \text{l'angle PNM} = \text{l'angle BPM},$$

d'où

$$\frac{\sin \text{PMN}}{\sin \text{PNM}} = \frac{\sin \text{NPC}}{\sin \text{BPM}}.$$

Or,

$$\frac{\sin \text{PMN}}{\sin \text{PNM}} = \frac{\text{PN}}{\text{PM}}; \quad \sin \text{NPC} = \frac{\text{NC}}{\text{PN}} \sin \text{C}, \quad \sin \text{BPM} = \frac{\text{MB}}{\text{PM}} \sin \text{B},$$

donc il faut que

$$\frac{\text{CN} \sin \text{C}}{\text{BM} \sin \text{B}} = \frac{\overline{\text{PN}}^2}{\overline{\text{PM}}^2}.$$

Mais

$$\text{BM} = \text{NC} = p - a; \quad \text{BP} = p - b; \quad \text{PC} = p - c; \quad \frac{\sin \text{C}}{\sin \text{B}} = \frac{c}{b};$$

donc

$$c \cdot \overline{\text{PM}}^2 - b \cdot \overline{\text{PN}}^2 = 0.$$

En introduisant les valeurs

$$\overline{\text{PM}}^2 = (p-b)^2 + (p-a)^2 - 2(p-a)(p-b)\cos \text{B}$$
$$\overline{\text{PN}}^2 = (p-c)^2 + (p-a)^2 - 2(p-a)(p-c)\cos \text{C}$$

et exprimant cos B, cos C, en fonction des côtés, on trouve

$$c \cdot \overline{\text{PM}}^2 - b \cdot \overline{\text{PN}}^2 = (c-b)(a^2 - bc);$$

donc il faut que le triangle ABC soit isoscèle ou que

$$a^2 = bc.$$

Solution par M. E. N. BARISIEN. Soient C', B' et A' les trois points de

contact de l'énoncé. La circonférence A'B'C' rencontre de nouveau les côtés BC, AC et AB en A'', B'', C''. Et l'on a

$$C'A = A'B = p - b, \quad B'A = A'C = p - c, \quad B'C = C'B = p - a.$$

Les points A'', B'', C'' sont définis par les relations

$$AC''.AC' = AB''.AB', \quad BC''.BC' = BA''.BA', \quad CA''.CA' = CB''.CB',$$

ou, en supposant que B'' et C'' tombent sur C'A, B'A et A'' entre A' et C,

$$\begin{aligned}(C'C'' - AC')\,AC' &= (B'B'' - AB')\,AB',\\ (C'C'' + BC')\,BC' &= (A'A'' + BA')\,BA',\\ (CA' - A'A'')\,CA' &= (B'B'' + CB')\,CB'.\end{aligned}$$

Ces égalités deviennent, en tenant compte des valeurs de AC', ...

$$\begin{aligned}[C'C'' - (p-b)]\,(p-b) &= [B'B'' - (p-c)]\,(p-c),\\ [C'C'' + (p-a)]\,(p-a) &= [A'A'' + (p-b)]\,(p-b),\\ [(p-c) - A'A'']\,(p-c) &= [B'B'' + (p-a)]\,(p-a),\end{aligned}$$

ou

$$(p-b)\,C'C'' - (p-c)\,B'B'' = a\,(c-b), \tag{1}$$

$$(p-a)\,C'C'' - (p-b)\,A'A'' = c\,(a-b), \tag{2}$$

$$(p-c)\,A'A'' + (p-a)\,B'B'' = b\,(a-c). \tag{3}$$

On a donc ainsi trois équations ayant pour inconnues A'A'', B'B'', C'C''.

Si le cercle A'B'C' doit être tangent au côté BC en A', il faut que A'A'' = 0. Alors (2) et (3) donnent

$$C'C'' = \frac{c\,(a-b)}{p-a}, \quad B'B'' = \frac{b\,(a-c)}{p-a}.$$

Ces valeurs substituées dans (1) donnent

$$c\,(a-b)\,(p-b) - b\,(a-c)\,(p-c) = a\,(c-b)\,(p-a),$$

ou

$$p\,[c(b-a) - b(c-a) - a(b-c)] = bc(b-a) - bc(c-a) - a^2(b-c);$$

le premier membre étant nul, on a

$$bc(b-c) - a^2(b-c) = 0, \quad \text{ou} \quad (b-c)\,(bc - a^2) = 0.$$

Le cercle sera donc tangent en A', si

$$b = c \quad \text{ou} \quad a^2 = bc.$$

Le cas $b = c$ correspond au cas évident du triangle isocèle. — La relation $a^2 = bc$ est celle de l'énoncé.

MM. Delahaye, Droz-Farny, Patriciu, Bastin et Weber ont résolu la même question par une méthode analogue : la condition que le cercle A'B'C' touche B'C' en A' s'exprime par l'égalité

$$(p-b)^2-(p-c)^2+(p-a)(p-c)b-(p-a)(p-b)c=0$$

que l'on ramène à $(b-c)(a^2-bc)=0$.

Généralisation par M. Emmerich. Imaginons un cercle qui touche le côté BC en un point D donné quelconque et qui coupe les droites AC en E, E' et AB en F, F'. Si l'on ajoute la condition $BF=CE=q$, on peut se proposer de calculer q en fonction des côtés b, c et des segments $BD=l$, $CD=m$ de $BC=a$.

En évaluant les puissances des sommets B, C, A, on trouve

$$q\cdot BF'=l^2,\ (1);\quad q\cdot CE'=m^2,\qquad (2)$$
$$AF.AF'=AE.AE'.$$

Si les quatre points E, E', F, F' sont situés sur les côtés eux-mêmes, la dernière relation peut s'écrire

$$(c-q)(c-BF')=(b-q)(b-CE'). \qquad (3)$$

En étudiant les diverses positions possibles des points en question on s'assure que la relation (3) subsiste dans tous les cas, parce que les deux facteurs d'un seul membre ou un facteur de chaque membre subissent simultanément des changements de signe.

En éliminant BF', CE' des équations (1), (2), (3) nous trouvons

$$l^2(c-q)-m^2(b-q)=cq(c-q)-bq(b-q),$$

ou bien

$$(b-c)q^2-(b^2-c^2-l^2+m^2)q-(cl^2-bm^2)=0. \qquad (4)$$

Si $b=c$, cette égalité prend la forme $q(l^2-m^2)=b(l^2-m^2)$ laquelle donne les deux solutions évidentes 1° $q=b$, l et m quelconques; 2° $l=m$, q quelconque.

Soit donc $b-c$ différent de zéro. Le discriminant de (4), savoir

$$\Delta=(b^2-c^2-l^2+m^2)^2+4(b-c)(cl^2-bm^2)$$

se transforme successivement en

$$(b^2-c^2)^2+(l^2-m^2)^2-2(b-c)^2(l^2+m^2);$$
$$(b-c)^2(b+c)^2+(l-m)^2(l+m)^2-(b-c)^2(l+m)^2$$
$$-(l-m)^2(b-c)^2,$$
$$(b-c)^2[(b+c)^2-a^2]+(l-m)^2[a^2-(b-c)^2].$$

Il est donc toujours positif. Ainsi, à toute position de D sur BC correspondent deux cercles réels qui touchent BC en D et qui produisent sur BA et CA des segments égaux BF = CE.

Examinons quelques exemples.

I. Si D est le point de contact du cercle inscrit, on a

$$l = p - b, \quad m = p - c, \quad l^2 - m^2 = -a(b - c),$$
$$cl^2 - bm^2 = (bc - p^2)(b - c),$$

et l'équation (4) se réduit à

$$q^2 - 2pq + p^2 - bc = 0,$$

de sorte que $q = p \pm \sqrt{bc}$. Si $bc = a^2$, le premier cercle est celui de l'énoncé, le second cercle correspond à $BF = CE = \frac{1}{2}(3a + b + c)$.

II. En prenant pour D le point de contact du cercle exinscrit I_a, on trouve avec

$$l = p - c, \quad m = p - b, \quad l^2 - m^2 = a(b - c),$$
$$cl^2 - bm^2 = [bc - (p - a)^2](b + c)$$
$$q^2 - 2(p - a)q + (p - a)^2 - bc = 0,$$
$$q = p - a \pm \sqrt{bc}.$$

Si $a^2 = bc$, on a $q_1 = p$, c'est-à-dire le cercle qui passe par D et par les points de contact des côtés AC, AB avec les cercles exinscrits I_c, I_b touche le côté BC.

III. Si D est l'isotomique du pied de la hauteur issue de A, nous aurons

$$l = b\cos C, \quad m = c\cos B, \quad l^2 - m^2 = b^2 - c^2,$$
$$cl^2 - bm^2 = cb^2(1 - \sin^2 C) - bc^2(1 - \sin^2 B)$$
$$= bc(b - b)(1 + \sin B \sin C),$$
$$q = \pm\sqrt{bc(1 + \sin B \sin C)} = \pm\sqrt{bc + h_a^2}.$$

Ce cas est remarquable puisqu'il offre deux cercles qui touchent le côté BC au même point et qui interceptent sur AC des segments égaux b' et sur AB des segments égaux c'. L et M étant les milieux de b' et c' respectivement, on a encore

$$BM : CL = b : c.$$

IV. Si nous posons $al^2 - bm^2 = 0$, d'où

$$\frac{l}{m} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}, \quad l^2 - m^2 = \frac{a^2(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{\sqrt{b} + \sqrt{c}},$$

le résultat $q_1 = 0$ nous dit que le premier cercle devient infini en se confondant avec la droite BC; pour le second on aura

$$q_2 = b + c - \frac{a^2}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2}.$$

Question 1428.

(Voir *Mathesis* (3), III, p. 128.)

On considère les coniques qui touchent les côtés d'un triangle fixe ABC ***et deux transversales réciproques variables m, m' de ce triangle. Lorsque le centre d'une telle courbe parcourt une droite donnée, trouver le lieu des pôles trilinéaires*** M, M' ***des transversales réciproques m, m'. Démontrer que la droite*** MM' ***passe par un point fixe.*** (Boutin.)

Solution par M. P. Bastin. Une conique tangente aux côtés du triangle ABC, pris pour triangle de référence, a pour équation en coordonnées normales :

$$\sqrt{Fx} + \sqrt{Gy} + \sqrt{Hz} = 0. \tag{1}$$

Soient pour équations des transversales réciproques m et m' :

$$Ax + By + Cz = 0, \quad \frac{a^2x}{A} + \frac{b^2y}{B} + \frac{c^2z}{C} = 0.$$

La conique (1) étant également tangente aux droites m et m', les coefficients F, G, H seront déterminés par les relations

$$\frac{F}{A} + \frac{G}{B} + \frac{H}{C} = 0, \quad \frac{FA}{a^2} + \frac{GB}{b^2} + \frac{HC}{c^2} = 0. \tag{2}$$

On trouve, à un facteur constant près :

$$F = Aa^2(B^2c^2 - C^2b^2), \quad G = Bb^2(C^2a^2 - A^2c^2), \quad H = Cc^2(A^2b^2 - B^2a^2).$$

Le centre de la conique (1) a pour coordonnées $(bH + cG, aH + cF, aG + bF)$.

En désignant par p, q, r les coefficients de l'équation de la droite parcourue par ce centre, on a la relation

$$p(bH + cG) + q(cF + aH) + r(aG + bF) = 0. \tag{3}$$

Cette relation devient, si l'on remplace F, G, H par les valeurs trouvées ci-dessus :

$$\Sigma A a (C^2 b^2 - B^2 c^2)\left(\frac{q}{b} + \frac{r}{c}\right) = 0. \qquad (4)$$

Les coordonnées de M, pôle trilinéaire de m, sont :

$$x = \frac{1}{A}, \quad y = \frac{1}{B}, \quad z = \frac{1}{C}. \qquad (5)$$

L'élimination de A, B, C entre les relations (4) et (5) donne pour équation du lieu de M :

$$\Sigma a x (b^2 y^2 - c^2 z^2)\left(\frac{q}{b} + \frac{r}{c}\right) = 0.$$

Ce lieu est une cubique circonscrite au triangle ABC ; elle passe par le centre de gravité de ABC et par les sommets du triangle formé en menant par A, B, C des parallèles aux côtés opposés.

M', pôle trilinéaire de m', a pour coordonnées $\left(\frac{A}{a^2}, \frac{B}{b^2}, \frac{C}{c^2}\right)$ et l'on voit aisément que le lieu de M' se confond avec celui de M.

On conclut des relations (2) que les points M et M' appartiennent à la droite ayant pour équation

$$Fx + Gy + Hz = 0.$$

L'équation (3) peut s'écrire :

$$F(br + cq) + G(cp + ar) + H(aq + bp) = 0.$$

La droite MM' passe donc par le point $(br + cq, cp + ar, aq + bp)$.

Question 1428.

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 184).

ABCD *étant un tétraèdre équifacial* (*dont les arêtes opposées sont égales*), *soient* O_a, O_b, O_c, O_d, *les centres des cercles circonscrits aux faces, et soient* O'_a, O'_b, O'_c, O'_d *les réciproques de ces centres dans les faces correspondantes. Démontrer que les droites* AO_a, BO_b, CO_c, DO_d *sont des génératrices d'un même mode d'un hyperboloïde et que les droites* AO'_a, BO'_b, CO'_c, DO'_d *sont des génératrices du second mode du même hyperboloïde.*

Calculer en fonction des angles d'une face le rapport des volumes des tétraèdres $O_aO_bO_cO_d$, ABCD. (J. Neuberg.)

Solution par M. Emmerich. Prenons d'abord pour O_a, O_b, O_c, O_d quatre points correspondants quelconques des triangles égaux DCB, CDA, BAD, ABC, et soient O'_a, O'_b, O'_c, O'_d leurs réciproques dans les faces correspondantes. Menons les plans ADO_a, BDO_b, CDO_c, et appelons D_a, D_b, D_c les points où ils rencontrent les arêtes BC, CA, AB respectivement. Les triangles ABC, DCB ayant les angles à la base BC permutés, le point D_a du triangle ABC correspond à l'isotomique du point D_a rapporté au triangle DCB; AD_a passe donc par le réciproque O'_d de O_d. La même propriété convenant à BD_b, CD_c, on en conclut que les plans ADO_a, BDO_b, CDO_c se coupent suivant la droite DO'_d. Or, les sommets A, B, C satisfont à des conditions analogues. Il s'ensuit que chacune des droites AO_a, BO_b, CO_c, DO_d est rencontrée par chacune des droites AO'_a, BO'_b, CO'_c, DO'_d; ces deux quadruples de droites sont donc des génératrices de l'un et l'autre mode d'un même hyperboloïde.

Désignons maintenant les coordonnées barycentriques de O_d par a, b, c, o; on aura pour les coordonnées de O_a: o, c, b, a; O_b: c, o, a, b; O_c: b, a, o, c.

Posons le volume du tétraèdre ABCD $= V$; on obtient les coordonnées barycentriques absolues des quatre points en divisant les quantités ci-dessus par $a+b+c$. Le rapport des volumes v, V des tétraèdres $O_aO_bO_cO_d$, ABCD aura pour expression

$$\frac{v}{V} = \begin{vmatrix} o & c & b & a \\ c & o & a & b \\ b & a & o & c \\ a & b & c & o \end{vmatrix} : (a+b+c)^4$$

$$= -\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)^3}.$$

En remplaçant a, b, c par leurs valeurs réciproques on trouve pour le rapport des volumes des tétraèdres $O'_aO'_bO'_cO'_d$, ABCD,

$$\frac{v'}{V} = -\frac{(-bc+ca+ab)(bc-ca+ab)(bc+ca-ab)}{(bc+ca+ab)^3}.$$

Si O_a, O_b, O_c, O_d sont les centres des cercles circonscrits aux faces, on a

$$a = \sin 2A, \quad b = \sin 2B, \quad c = \sin 2C,$$

A, B, C désignant les angles du triangle ABC. Alors

$$v : V = -\cot^2 A \cot^2 B \cot^2 C. \qquad (1)$$

Pour exprimer V et φ en fonction de A, B, C et du rayon ρ de la sphère inscrite, rappelons deux propriétés métriques du tétraèdre équifacial :

1° Si λ, μ, ν désignent les angles dièdres aux arêtes BC et AD, CA et BD, AB et CD respectivement, on a

$$\sin B \sin C \sin \lambda = \sin C \sin A \sin \mu = \sin A \sin B \sin \nu = 2\sqrt{\cos A \cos B \cos C}.$$

Car les arêtes AB, AC, AD marquent sur une sphère de centre A les sommets d'un triangle sphérique avec les côtés A, B, C et l'angle λ opposé à A. On a donc

$$\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \lambda;$$

d'où

$$\sin^2 B \sin^2 C \sin^2 \lambda = \sin^2 B \sin^2 C - (\cos A - \cos B \cos C)^2$$
$$= 2 \cos A \cdot 2 \cos B \cos C = 4 \cos A \cos B \cos C.$$

2° r étant le rayon des cercles circonscrits aux faces, on a

$$r^2 \cos A \cos B \cos C = \rho^2.$$

En effet, si l'on abaisse les perpendiculaires DD′, DD'_a sur la face ABC et sur l'arête BC, on tire du triangle $DD'D'_a$:

$$\sin \lambda = \frac{DD'}{DD'_a} = \frac{4\rho}{2r \sin B \sin C}, \quad r \sin B \sin C \sin \lambda = 2\rho, \quad \ldots$$

Cela posé, un calcul simple donne

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot 2r^3 \sin A \sin B \sin C, \quad 4\rho = \tfrac{8}{3} \rho^3 \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

ce qui entraîne, d'après la relation (1),

$$\varphi = -\tfrac{8}{3} \rho^3 \cot A \cot B \cot C.$$

Solution entièrement analytique par M. P. Bastin.

Question 1432.

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 216).

Sur les faces d'un tétraèdre quelconque ABCD *on construit les tétraèdres équifaciaux* BCDA′, CDAB′, DABC′, ABCD′. *Démontrer que les perpendiculaires abaissées des points* A′, B′, C′, D′ *respectivement sur les plans* BCD, CDA, DAB, ABC *sont les génératrices d'un même hyperboloïde.* (J. Neuberg.)

Solution par MM. A. Droz-Farny et Emmerich. Au point H_a, orthocentre de la face BCD d'un tétraèdre quelconque ABCD, élevons sur cette face une perpendiculaire Δ_a. Δ_a rencontre évidemment les trois hauteurs du tétraèdre, menées par les sommets B, C, D ainsi que la hauteur menée par A puisqu'elle lui est parallèle.

Il en résulte que les quatre perpendiculaires, élevées sur les faces d'un tétraèdre en leurs orthocentres sont les génératrices du second système de l'hyperboloïde des hauteurs.

Or, on sait que dans un tétraèdre équifacial la hauteur abaissée d'un des sommets a pour pied sur la base opposée le symétrique H'_a de son orthocentre H_a par rapport au centre de la circonférence circonscrite à cette base. Mais la droite élevée en H'_a perpendiculairement à BCD est la symétrique de Δ_a par rapport au centre O de la sphère circonscrite à ABCD. Les quatre droites considérées appartiennent donc à un hyperboloïde symétrique de celui des hauteurs par rapport à O.

Question 1435.

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 216).

Chercher le lieu des ombilics d'une série d'ellipsoïdes homofocaux, ainsi que l'enveloppe des plans tangents en ces points. (G. Andrien.)

Solution par M. P. Bastin. On sait que l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ($a>b>c$) possède quatre ombilics dont les coordonnées sont :

$$y=0, \quad x=\pm\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}, \quad z=\pm\frac{c\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}.$$

Si, dans ces expressions, on remplace a^2, b^2, c^2 respectivement par $a^2+\lambda$, $b^2+\lambda$, $c^2+\lambda$, λ étant une quantité arbitraire non inférieure à $-c^2$, on aura les coordonnées des ombilics d'une série d'ellipsoïdes homofocaux :

$$y=0, \quad x=\pm\frac{\sqrt{(a^2+\lambda)(a^2-b^2)}}{\sqrt{a^2-c^2}}, \quad z=\pm\frac{\sqrt{(c^2+\lambda)(b^2-c^2)}}{\sqrt{a^2-c^2}}.$$

L'élimination de λ entre les valeurs de x et de z conduit à l'équation

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1.$$

Le lieu des ombilics de ces divers ellipsoïdes est donc une hyperbole (H) située dans le plan XOZ; cette hyperbole a mêmes foyers que les ellipses $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$ et coupe orthogonalement ces dernières.

Le plan tangent en un ombilic est perpendiculaire au plan XOZ et sa trace sur ce plan est normale à l'hyperbole (H); il enveloppe donc un cylindre parallèle à OY et dont la directrice est la développée de (H).

MM. Emmerich, Abramescu, R. Desprets ont résolu la même question en traitant la seconde partie par le calcul.

Solution géométrique par C. Servais. Les génératrices d'une quadrique (Σ) passant par un ombilic sont isotropes; un ombilic est donc un foyer et il est situé sur l'une des coniques focales de (Σ). Ces coniques focales constituent le lieu des ombilics des quadriques homofocales à (Σ). Le plan tangent en un ombilic est normal à la conique focale, l'enveloppe de ce plan se compose donc des cylindres normaux aux plans de symétrie et ayant pour bases les développées des coniques focales.

×Question 1442.

(Voir *Mathésis* (3), III, p. 240).

Soit ABCD *un quadrilatère inscrit à un cercle. La perpendiculaire en* A *sur* AB *rencontre* CD *au point* A', *et la perpendiculaire en* C *sur* CD *coupe* AB *au point* C'. *Démontrer* 1° *que la droite* A'C' *est parallèle à la diagonale* BD; 2° *que le point de concours des droites* AA' *et* CC', *celui des droites* AD *et* BC *sont en ligne droite avec le centre* O *du cercle* ABCD.

(A. C.)

Solution par MM. J. Rose et Bastin. 1° Le quadrilatère AC'CA' est inscriptible. Par suite les angles C'A'C, CAC' sont égaux. Mais, dans le cercle O, BDC et CAC' sont aussi égaux. Donc les angles C'A'C et BDC sont égaux; par suite C'A' et BD sont parallèles.

2° Si l'on désigne par A'' et C'' les points où AA', CC' coupent à nouveau la circonférence O, A''C'' est aussi parallèle à BD, car BA'' et DC'' sont deux diamètres du cercle O.

Les triangles A''A'B, C''C'D sont donc homologiques, le centre d'homologie étant à l'infini; les points d'intersection des côtés homologues (AA', CC') ≡ E, (A'B, C'D) ≡ E', (A''B, C''D) ≡ O sont donc en

ligne droite. Mais si l'on considère l'hexagone A'BCC'DA inscrit aux deux droites CD, AB, on voit que les points d'intersection des côtés opposés, savoir E', (BC, DA) ≡ F et E sont en ligne droite.

Solution partielle par M. Plakhovo.

Note. M. Emmerich démontre la seconde partie de la question en faisant voir que les faisceaux A(A'DCO), C(BC'OA) étant égaux, les faisceaux A(A'DCO), C(C'BAO) qui ont un élément uni AC sont perspectifs. Sa solution est accompagnée des remarques suivantes :

1. A'B et C'D se coupent sur EF, car ADC'BCA' est un hexagone inscrit aux deux droites AB, A'C.

2. Si les perpendiculaires en A sur AD et en C sur BC rencontrent respectivement BC, AD en A_1, C_1, la droite A_1C_1 est parallèle à BD, et les droites $A'A_1$, $C'C_1$ passent par O.

3. Soient G, H les points (AA_1, CC_1), (AB, CD); la droite GH passe par O, les droites A_1D et C_1B se coupent sur GH.

4. EH et GF sont perpendiculaires à BD.

5. EG et FH se coupent au pôle de AC par rapport au cercle O.

M. Speckman (Arnhem) a démontré la question 1442 et même un théorème plus général au moyen de propositions qu'il a établies dans son mémoire *Sur les triangles homologiques inversement semblables* (Congrès de la Haye, 1903). Nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de reproduire cette démonstration en l'accompagnant des développements nécessaires.

M. Droz Farny observe que AA''C''CDB étant un hexagone inscrit les points de concours des côtés opposés (AA'', CD) ≡ A', (A''C'', DB) ≡ I, (C''C, BA) ≡ C' sont en ligne droite; I étant à l'infini, A'C' est parallèle à BD et A''C''. De même, si l'on considère l'hexagone inscrit AA''BCC''D, on voit que EF passe par O. (J. N.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

1488. Résoudre le système

$$\begin{aligned} ax - by + cz &= p, \\ -bx + cy + az &= 0, \\ cx + ay - bz &= 0. \end{aligned}$$

A quelles conditions les valeurs des trois inconnues sont-elles trois termes consécutifs d'une progression par quotient ?

1137. On donne le rayon R de la base d'un cône et le côté a. A quelle distance du sommet sur l'arête faut-il mener un plan parallèle à la base pour que la base du cône soit moyenne proportionnelle entre la surface latérale du petit cône et la surface latérale du tronc de cône ainsi formé? Discuter. — Maximum du produit des deux surfaces latérales. (*Bacc. lettres-math., Nancy*, 1902).

1138. La huitième puissance d'un nombre entier est de l'une des formes

$$17n \quad \text{ou} \quad 17n \pm 1.$$

1139. On marque sur les arêtes DA, DB, DC du tétraèdre ABCD les couples de points isotomiques (symétriques par rapport au milieu de l'arête) $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$. Démontrer que les plans $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ rencontrent les autres arêtes en des couples de points isotomiques.

1140. Ramener l'intégration de l'équation $xy'' = y'f(xy' - y)$ aux quadratures. (Abramescu).

En posant $xy' - y = u$, on trouve $dy = du : f(u)$.

1141. Si a, b, c, d sont les côtés successifs d'un quadrilatère de surface S inscrit dans une circonférence de rayon R, on peut inscrire dans la même circonférence deux autres quadrilatères (a, b, d, c), (a, d, b, c) de même surface S. Ces trois quadrilatères n'ont que trois diagonales distinctes x, y, z telles que $xyz = 4RS$. (G. Fontené.)

Chasles, dans l'Aperçu historique (p. 440), dit que la relation $xyz = 4RS$ paraît due à Albert Girard. (J. N.)

1142. On a $6^6 + 1 = 37 \times 13 \times 97$

(*Bull. des Sc. math. et phys. él.*)

1143. Déterminer les chiffres x, y, z de manière que le nombre $xy243z$ soit divisible par 396. (*Ibid.*)

R. Les nombres répondant à la question sont 432432, 392436.

1144. Trouver la relation qui existe entre les quatre côtés d'un trapèze dont les diagonales sont rectangulaires.

Soient a, b, c, d les côtés consécutifs AB, BC, CD, DA d'un quadrilatère ABCD. Si les diagonales sont rectangulaires, on voit facilement que $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Réciproquement, si cette égalité a lieu, les diagonales sont rectangulaires; car si les points B, D se projettent sur AC en B', D', on a $a^2 - b^2 = \overline{AB'}^2 - \overline{B'C}^2$, $c^2 - d^2 = \overline{AD'}^2 - \overline{D'C}^2$, d'où l'on conclut que les points B' et D' se confondent.

Cela posé, si l'on peut former un trapèze avec les longueurs a, b, c, d qui vérifient l'égalité $a^2 + b^2 = b^2 + d^2$, les diagonales sont nécessairement rectangulaires.

La question précédente nous a été soumise par un honorable correspondant.

Plus généralement, si dans un quadrangle complet la somme des carrés de deux côtés opposés est égale à la somme des carrés de deux côtés opposés, les côtés restants sont rectangulaires. (J. N.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

1461. La tangente et la normale en un point M d'une courbe rencontrant l'axe OX en T et N, l'axe OY en T′ et N′.

Déterminer une courbe telle que l'on ait

$$OT + ON = OT' + ON'.$$ (PIRONDINI.)

1462. On considère tous les triangles ABC ayant même sommet A, même pied A′ de la bissectrice intérieure issue de A, et tels que $\frac{AB}{AC} = k$.

Trouver les lieux de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit au triangle ABC. (E. N. BARISIEN.)

×**1463.** Si par les sommets B, C d'un triangle ABC on élève sur BC les perpendiculaires $BB_a = b$, $CC_a = c$, les points B_a, C_a sont à la même distance du pied H_a de la hauteur AH_a. Si on rabat H_aB_a, HC_a sur BC en B'_a, C'_a et qu'on fasse des constructions analogues sur CA, AB, les six points B'_a, C'_a, C'_b, A'_b, A'_c, B'_c sont sur une même circonférence ayant pour centre l'orthocentre H de ABC. Les droites B_aC_a, C_bA_b, A_cB_c rencontrent respectivement BC, CA, AB en trois points D_a, D_b, D_c qui sont en ligne droite. (A. C.)

1464. On donne un plan P et une droite d oblique à P. Par d on mène un plan quelconque Q. Soit AB une droite perpendiculaire à Q en A et rencontrant P en B; on suppose la longueur AB constante. Alors pour un même plan Q, les lieux des points A, B sont des couples de parallèles (a, a'), (b, b'). On demande : 1° la surface engendrée par les droites a, a'; 2° l'enveloppe des droites b, b', lorsque le plan Q tourne autour de d; 3° l'enveloppe des droites a, a' considérées dans le plan Q tournant autour de d. (J. NEUBERG.)

SUR LES PENTAGONES ORTHOCENTRIQUES,

par G. Majcen, à Agram.(*)

1. J'appelle *pentagone orthocentrique* un pentagone simple ABCDE tel, que les perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C, D, E respectivement sur les côtés opposés CD, DE, EA, AB, BC concourent en un même point H. Ces perpendiculaires sont les *hauteurs* du pentagone; leurs pieds seront désignés par A′, B′, C′, D′, E′; H est *l'orthocentre* de ABCDE.

On peut prendre arbitrairement quatre sommets B, C, D, E d'un tel pentagone(**); l'orthocentre H sera déterminé par l'intersection des hauteurs BB′, EE′. Les perpendiculaires abaissées de B sur DH et de E sur CH se couperont au cinquième sommet A. Mais il reste à démontrer que AH est perpendiculaire à CD.

A cet effet, désignons par a, b, c, d, e les côtés CD, DE, EA, AB, BC; par a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, les diagonales BE, CA, DB, EC, AD; enfin par A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 les points de rencontre des deux côtés adjacents à a, b, c ... ($A_1 \equiv be$, $B_1 \equiv ac$, ...). H étant l'orthocentre des triangles A_1BE, C_1BD, D_1CE, on a d'après un théorème connu,

$$HB \cdot HB' = HE \cdot HE' = HD \cdot HD' = HC \cdot HC'. \qquad (1)$$

Si donc de H comme centre, avec le rayon $\sqrt{HB \cdot HB'}$ (qui peut être de la forme $R\sqrt{-1}$), on décrit une circonférence Σ, on conclut des égalités (1) que les polaires des points B, C, D, E par rapport à Σ sont précisément les droites b, c, d, e. Par conséquent, l'intersection A des polaires des points C, D est le pôle de la droite CD; donc CD est perpendiculaire au diamètre HA de Σ.

2. Chaque sommet du pentagone orthocentrique ABCDE étant le pôle du côté opposé, ce polygone est *autopolaire* par rapport à Σ. Réciproquement, tout pentagone autopolaire par rapport à un cercle est orthocentrique.

Etant donné un cercle quelconque Σ, il existe ∞^5 pentagones autopolaires ABCDE par rapport à Σ. En effet, prenons arbitrairement le

(*) Je remercie M. J. Neuberg qui a bien voulu me communiquer quelques simplifications de mes démonstrations et la démonstration donnée § 4bis.

(**) Nous prions le lecteur de faire les figures

sommet A et sur sa polaire a arbitrairement deux points C, D ; traçons la polaire c de C et la polaire d de D, ces droites passent nécessairement par A. Prenons encore arbitrairement le point B sur d, et traçons la polaire b de B, qui passe nécessairement par D, et coupe c en un point E; la droite CB qui joint les pôles des droites b et c sera la polaire du point E.

Le point A_1, intersection des polaires des points B, E est le pôle de la droite BE. Donc le pentagone simple $A_1B_1C_1D_1E_1$ et le pentagone simple formé par les diagonales a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 sont polaires réciproques par rapport à Σ. Les perpendiculaires abaissées des sommets du premier sur les côtés correspondants du second concourent en H; il en est de même des perpendiculaires abaissées des sommets du second sur les côtés correspondants du premier. Ces deux polygones peuvent être dits *orthologiques*.

Les deux polygones simples $A_1C_1E_1B_1D_1$, $a_1c_1e_1b_1d_1$ dont le premier a les mêmes côtés et le second les mêmes sommets que ABCDE (à l'ordre près) sont orthologiques; mais ce n'est là qu'une autre façon d'énoncer des résultats déjà acquis. H est un centre radical commun aux cinq circonférences décrites sur les diagonales BE, CA, ... comme diamètres.

3. Appelons k la conique circonscrite et K la conique inscrite au pentagone orthocentrique ABCDE. Comme cinq points A, B, C, D. E de k ont pour polaires cinq tangentes a, b, c, d, e de K, les deux coniques k et K sont polaires réciproques par rapport au cercle Σ.

D'après un théorème connu(*), il existe une infinité d'autres pentagones qui sont inscrits à k et circonscrits à K.

Tous ces pentagones sont autopolaires par rapport à Σ, c'est-à-dire *orthocentriques ayant l'orthocentre commun* H(**).

4. Etant donnée une conique k, proposons-nous de lui inscrire un pentagone orthocentrique ABCDE, dont on donne trois sommets consécutifs B, C, D.

A cet effet, nous considérons tous les pentagones orthocentriques αBCDE dont le sommet E est un point variable sur k. L'orthocentre H est à l'intersection de la perpendiculaire BB′ abaissée de B sur DE et de la perpendiculaire EE′ menée sur BC. Or, il existe entre le faisceau des

(*) Voir PONCELET, *Traité des propriétés projectives des figures*, 2e éd., T. I, p. 316.

(**) G. KOHN, *Wiener Berichte*, 101, Abt. II a (1892), p. 615.

droites BB′ de centre B, et le faisceau de parallèles EE′ une correspondance (2, 1). Car, lorsqu'on donne la droite BB′, la corde perpendiculaire DE et ensuite la droite EE′ sont déterminées ; mais lorsqu'on donne pour EE′ une perpendiculaire quelconque à BC, on peut prendre pour E l'un ou l'autre des points où cette perpendiculaire rencontre k, ce qui donne deux droites DE et par suite deux droites BB′. Le lieu de H est donc une *cubique* Γ. (*)

Pour obtenir ensuite le point α, on abaisse de B une perpendiculaire sur la droite DH, et de H une perpendiculaire Hα' par CD ; ces perpendiculaires se coupent en α. Le sommet α est donc l'intersection des rayons homologues de deux faisceaux, dont l'un a pour sommet B et dont l'autre est formé de perpendiculaires à CD. La correspondance entre ces deux faisceaux est du genre (3, 3) ; car, si l'on trace la droite indéfinie Bα, on peut prendre pour H l'un des trois points où la cubique Γ est rencontrée par la perpendiculaire abaissée de D sur Bα ; si l'on se donne la droite $\alpha\alpha'$ perpendiculaire à CD, l'orthocentre H est l'un des trois points où $\alpha\alpha'$ coupe Γ et l'on a ainsi trois droites possibles pour DH et autant pour Bα. Il suit de là que le lieu de α est une courbe du *sixième ordre*. Chacun des neuf points où cette courbe rencontre k (en dehors du point triple B) peut être pris pour le sommet A du pentagone cherché ABCDE.

D'après cela, si l'on prend pour C un sommet de la conique k situé sur l'axe u de cette courbe, pour CB et CD deux cordes de k symétriques par rapport à u, les points de rencontre de la cubique Γ avec u sont, chacun, l'orthocentre d'un pentagone orthocentrique ABCDE inscrit à la conique k et ayant pour axe de symétrie la droite u.

On pourrait traiter de la même manière le problème corrélatif : *Circonscrire à une conique donnée* K *un pentagone orthocentrique dont trois côtés consécutifs b, c, d sont des tangentes données de* K.

4bis. Soit encore à inscrire à une conique donnée k un pentagone orthocentrique ABCDE, étant donnés le sommet A et le côté opposé CD.

A cet effet, nous considérons tous les pentagones orthocentriques ABCDE, dont le sommet B est un point variable sur k. Si l'on donne la direction de AE, la perpendiculaire abaissée de C sur AE rencontre la hauteur AA′ en l'orthocentre H ; la perpendiculaire abaissée de A sur DH

(*) Voir E. Weyr, *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde*, I.

rencontre k au sommet B, et la perpendiculaire abaissée de D sur BH rencontre AE au point cherché E. Donnons-nous maintenant la direction de DE; alors si l'on joint D à un point k mobile sur AA', la perpendiculaire abaissée de A sur la droite Dk et la perpendiculaire abaissée de k sur DE se rencontrent en un point β, qui engendre une conique parce que les droites Aβ, $k\beta$ se correspondent dans deux faisceaux projectifs; cette conique passe par A et rencontre k en trois autres points qui peuvent être pris chacun pour le sommet B, et les positions correspondantes de k sont les orthocentres correspondants H; il ne reste plus qu'à abaisser de A sur CH une perpendiculaire qui coupe DE au point cherché E.

D'après cela, il existe entre les faisceaux des droites AE, DE une correspondance (3, 1); par conséquent le point E engendre une *quartique* qui admet D comme point simple et A comme point triple, et celle-ci rencontre k en des points autres que B et D qui sont chacun une position de E.

5. Considérons maintenant un pentagone orthocentrique ABCDE inscrit à une circonférence k de centre O; soient K la conique inscrite et Σ le cercle autopolaire.

Il résulte d'un théorème de Poncelet que la conique K transformée par polaires réciproques du cercle k par rapport au cercle Σ a un foyer au centre H du second cercle.

Les pieds A', B', C', D', E' *des hauteurs de* ABCDE *sont sur une même circonférence* L, que l'on peut regarder soit comme la transformée par rayons vecteurs réciproques de k par rapport à Σ, soit comme la podaire (cercle principal) du foyer H de K.

Soient A_1, B_1, ... les points d'intersection de deux côtés non consécutifs ($A_1 \equiv be$, $B_1 \equiv ac$, ...). Les triangles A_1BE, A_1DC sont symétriquement semblables; par suite leurs hauteurs $A_1A'_1$, $A_1A''_1$ (A'_1 sur BE, A''_1 sur CD) sont également inclinées sur les droites A_1D, A_1C, qui sont tangentes à K. La première $A_1A'_1$ passant par le foyer H de K, la seconde $A_1A''_1$ passe par le foyer H' de cette courbe. Ainsi, *si un pentagone orthocentrique* ABCDE *est inscrit à un cercle k, et que* A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 *désignent les points de rencontre eb, ac, bd, ce, da des côtés non consécutifs, les perpendiculaires abaissées de ces points sur les côtés a, b, c, d, e concourent en un même point* H', *foyer de la conique inscrite au pentagone*

ABCDE. En d'autres termes, *le pentagone* $A_1B_1C_1D_1E_1$ *est orthocentrique, l'orthocentre étant le second foyer* H′ *de la conique inscrite.*

Appelons Σ' le cercle autopolaire de ce polygone; il a pour centre H′, pour rayon $\sqrt{H'A_1.H'A_1''}$.

Les pieds A_1'', B_1'', C_1'', D_1'', E_1'' *des hauteurs du pentagone* $A_1B_1C_1D_1E_1$ *sont sur la circonférence* L, *podaire des foyers* H, H′ *par rapport à la conique inscrite* K. Des égalités

$$H'A_1.H'A_1'' = H'B_1.H'B_1'' = \cdots$$

on conclut que les points A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 sont sur une même circonférence k_1, transformée par rayons vecteurs réciproques de la circonférence L par rapport à Σ'.

Les hauteurs des triangles A_1BE, B_1CA,... donnent la relation

$$HB.HB' = HE.HE' = HA_1.HA_1' = HB_1.HB_1' = \cdots;$$

il en résulte (voir aussi § 3)

1° *Que les points* A_1', B_1', C_1', D_1', E_1' *sont sur une même circonférence* L_1, *inverse de la circonférence* k_1 *par rapport au cercle* Σ;

2° *Que* H *est un foyer de la conique* k_1 *qui touche les cinq diagonales* a_1, b_1, c_1, d_1, e_1;

3° *Que, par conséquent, les diagonales du pentagone* $A_1C_1E_1B_1D_1$ *touchent une conique* K_2, *ayant le point* H′ *pour foyer.*

6. Soit toujours ABCDE un pentagone orthocentrique, d'orthocentre H, inscrit à un cercle k de centre O, et soient A′, B′, C′, D′, E′ les pieds des hauteurs et A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, les points d'intersection des côtés non consécutifs. Désignons aussi par α, β, γ, δ, ε les seconds points de rencontre des hauteurs AA′, BB′, CC′, DD′, EE′ avec la circonférence k.

Je dis d'abord que le pentagone podaire A′C′E′B′D′ est *orthocentrique*, avec l'orthocentre H. En effet, dans le triangle A_1BE par exemple, les deux droites CD, E′B′ sont antiparallèles à BE dans l'angle CA_1D. Donc le pentagone A′C′E′B′D′ a ses côtés parallèles avec les côtés du pentagone ABCDE Le côté opposé à A′ est E′B′ et HA′ perpendiculaire à CD l'est aussi à B′E′. Donc les hauteurs sont les mêmes dans les deux pentagones.

Le polygone $\alpha\gamma\varepsilon\beta\delta$ est homothétique à A′C′E′B′D′ par rapport à H; car les droites A′C′, $\alpha\gamma$, par exemple, sont toutes deux antiparallèles à AC dans l'angle AHC. Il en résulte que $\alpha\gamma\varepsilon\beta\delta$ est aussi orthocentrique, avec l'orthocentre H.

NOTES MATHÉMATIQUES.

11. ***Sur le volume engendré par une figure invariable.*** Contrairement à ce que nous avons dit dans notre article publié sur ce sujet dans *Mathesis*, (3), IV, p. 5, la question du volume engendré par une figure invariable avait déjà été résolue *dans toute sa généralité* par M. G. Kœnigs, dans un Mémoire inséré dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, (4), V, pp. 321-343, sous le titre : « *Sur la détermination générale du volume engendré par un contour fermé gauche ou plan dans un mouvement quelconque* ».

L'auteur établit par l'analyse, au moyen de la formule de Stokes, la relation

$$V = Al + Bm + Cn + La + Mb + Nc, \qquad (1)$$

dans laquelle V représente le volume, A, B, C, L, M et N des constantes dépendant uniquement du contour a, b, c, l, m et n des quantités dépendant uniquement du mouvement.

La formule de M. Kœnigs peut se déduire de celle que nous avons établie au n° 7, en remarquant que l'on a

$$\lim S\Delta\bar{u} = \tfrac{1}{2}\int \mathscr{M}\,\bar{e}d\bar{e}, \quad \lim S\,\mathscr{M}\,\bar{e}\Delta\bar{u} = -\tfrac{1}{2}\int e^2 d\bar{e},$$

les deux intégrales étant prises le long du contour dans le sens convenu.

Il résulte de la formule (1), ainsi que le fait remarquer M. Kœnigs, que *si sept contours fermés sont liés invariablement entre eux, il existe une même relation linéaire et homogène entre les sept volumes auxquels ces contours donnent lieu dans un mouvement commun arbitraire.*

L'auteur applique de même sa formule au cas d'un contour plan, et étudie, en particulier, le cas de la rotation autour d'un *axe quelconque*, ce qui constitue une généralisation du théorème de Guldin.

Signalons enfin l'application au volume engendré par le cercle osculateur d'une courbe à courbure constante. C. E. Wasteels.

×**12.** ***Sur une formule de E. Lemoine et sur la question*** 1405.

1. Sous ce titre, M. Droz-Farny (voir *Mathesis*, (3), IV, p. 10), a rappelé la formule de M. E. Lemoine :

$$\cos A = \frac{2R + r - r_a}{2R}.$$

On peut en donner une autre démonstration géométrique très simple, en s'appuyant sur la propriété suivante, rappelée par M. Neuberg à la fin de l'article précité : *le point de rencontre* O′ *des perpendiculaires abaissées des centres* I′, I″, I‴ *des cercles ex-inscrits sur les côtés correspondants du triangle* ABC, *est le symétrique du centre* I *du cercle inscrit par rapport au centre* O *du cercle circonscrit*. Les distances respectives des points I, O et O′ au côté BC étant r, R cos A, $2R - r_a$, on a :

$$R\cos A = \frac{2R + r - r_a}{2}.$$

2. Désignons par α, β, γ les coordonnées normales absolues du point P. On trouve facilement que

$$\alpha = \frac{rr_a}{2R - r}, \quad \beta = \frac{rr_b}{2R - r}, \quad \gamma = \frac{rr_c}{2R - r}.$$

On peut remarquer que $\alpha : \beta : \gamma = r_a : r_b : r_c$. La droite joignant le sommet A au point P divise la base dans le rapport $cr_a : br_b$.

3. La formule de M. E. Lemoine peut servir à résoudre d'une façon assez rapide la question 1405 (*Mathesis*, (3), III, p. 40, résolue (3 , III. p. 179-180). Désignons par D′, E′, F′ les points de contact des côtés du triangle ABC avec les cercles ex-inscrits correspondants I′. I″, I‴. Pour que le triangle D′E′F′ soit rectangle en D′, il faut que les triangles O′BF′ et CO′E′ soient semblables, car dans les quadrilatères inscriptibles BD′O′F, CD′O′E′, les angles ABO′, ACO′ sont égaux à O′D′F′, O′CE′; on en conclut

$$(p - a)^2 = (2R - r_b)(2R - r_c).$$

Cette condition peut s'écrire

$$(p - a)^2 = 4R^2 + r_b r_c - 2R(r_b + r_c).$$

En tenant compte des relations

$$\Sigma r_a = 4R + r \quad \text{et} \quad \cos A = \frac{2R + r - r_a}{2R},$$

il vient

$$(p - a)^2 = r_b r_c - 4R^2 \cos A.$$

Observant que $r_b r_c - (p - a)^2 = a(p - a) = 2Rr(1 + \cos A)$, on a finalement

$$\cos A = \frac{r}{2R - r}.$$

(E. Weber.)

12. ***Construction d'une conique dont on donne le centre*** **O** ***et trois points*** **A, B, C,** ***ou trois tangentes*** ***a, b, c.***

Soient A′, B′, C′ les symétriques des points donnés, ou a', b', c' les symétriques des droites données par rapport au centre O. Comme on connaît ainsi soit six points, soit six tangentes de la courbe, le problème proposé est un cas particulier d'une question plus générale. Cependant, les solutions suivantes, très simples, nous paraissent être assez curieuses et peu connues.

1° Menons par O une transversale quelconque d, qui coupe les côtés BC, CA, AB du triangle ABC aux points A″, B″, C″. Les droites B′B″, C′C″ se coupent en un point D, qui engendre une conique Σ lorsque d tourne autour de O (***Théorème de Maclaurin et Braikenridge***).

Si l'on fait coïncider d avec OA, OB, ou OC, D coïncidera avec A, B ou C; si d passe par le point d'intersection de B′C′ avec AC ou AB, D vient en C′ ou B′; enfin, à d parallèle à BC correspond D confondu avec A′. Σ est donc la conique cherchée.

Remarquons aussi que les droites A′A″, B′B″, C′C″ concourent en D.

2° Désignons par B_1, C_1 les points (a, c'), (a, b'). Menons par B_1, C_1 deux parallèles quelconques, dont la première coupe b en B_2, la seconde c en C_2. Lorsque la direction de ces parallèles change, la droite $B_2C_2 \equiv m$ enveloppe une conique Σ′ (***Théorème corrélatif de celui de Maclaurin et Braikenridge***, l'une des droites fixes *étant à l'infini*).

Si la direction des parallèles B_1B_2, C_1C_2 est celle de a, b, ou c, m coïncide avec a, b' ou c'; si l'on prend le point (bc) pour B_2 ou C_2, m se confond avec c ou b; enfin, on obtient pour m la droite B′C′ en menant B_1B_2, C_1C_2 parallèles à AOA′. Σ′ est donc la conique cherchée. (J. N.)

BIBLIOGRAPHIE.

Lehrbuch der Thêtafunktionen von Dr. A. Krazer, o. Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Karlsruhe. Leipzig, Teubner, 1903 (In-8° de XXIV-509 pp., cartonné). Prix : 24 marcs.

Exposé des recherches des géomètres sur la théorie des fonctions thêta à un nombre quelconque de variables.

Encyklopädie der elementaren Algebra und Analysis bearbeitet von H. Weber. Leipzig, Teubner, 1903 (In-8 de XIV-447 pp. cartonné). Prix : 8 marcs.

Livre excellent destiné aux professeurs de l'enseignement moyen et à ceux

de leurs élèves très bien doués, qui veulent approfondir les principes fondamentaux de l'algèbre.

Depuis le *Lehrbuch der Analysis* de Lipschitz (1877), il n'a paru, en Allemagne, aucun ouvrage comparable à celui de M. H. Weber que nous annonçons aujourd'hui.

Sommaire. I. *Principes de l'arithmétique.* 1. Nombres naturels. 2. Les premières opérations. 3. Division, fractions. 4. Nombres irrationnels. 5. Rapports; 6. Puissances et logarithmes. 7. Equations du premier dégré. 8. Equations du second degré, imaginaires. 9. Permutations et combinaisons. 10. Binômes, progressions, annuités. II. *Algèbre.* 11. Équations algébriques. 12. Théorèmes fondamentaux. 13-15. Équations indéterminées du premier et du second degré, fractions continues. 16. Résolution algébrique de l'équation du troisième et de celle du quatrième degré. 17. Résolution approchée des équations numériques. 18. Division du cercle en parties égales. 19. Impossibilités. 1° constructions au moyen de la règle et du compas. 2° Il est impossible de résoudre au moyen de radicaux réels une équation cubique ayant trois racines réelles. 3° L'équation du 5° degré est en général irrésoluble par radicaux. III. *Analyse.* 20-21 Séries. 22-24. Séries exponentielles, séries pour sinus et cosinus; série binomiale, séries logarithmiques. 25. Produits infinis. 26. Transcendance de e et π. *Additions.* Congruences de degré supérieur; racines primitives d'un nombre premier; détermination algébrique des racines de l'unité.

Nous recommandons vivement ce volume aux professeurs de mathématiques, des collèges et athenées, surtout à ceux qui n'ont pas eu l'occasion d'avoir des leçons de méthodologie à l'Université.

Cours de mathématiques supérieures à l'usage des candidats à la licence ès sciences physiques, par M. l'Abbé Stoffaes, Professeur adjoint à la Faculté catholique des Sciences de Lille, Directeur de l'Institut catholique d'Arts et Métiers de Lille. Deuxième édition, entièrement refondue. Paris, Gauthier-Villars, 1903. (In-8° de VII-537 pp.). Prix : 10 fr.

Nous avons rendu compte de la première édition du *Cours* de M. Stoffaes dans *Mathesis*, 1891, (2), I, pp. 252-253. Dans la nouvelle édition, l'auteur a ajouté un certain nombre de théories, il en a complété quelques autres; il a modifié quelques démonstrations. Nous pensons qu'il aurait pu en modifier un plus grand nombre en les rendant à la fois rigoureuses, simples et claires.

Sommaire. I. *Compléments d'Algèbre élémentaire.* Propriétés des polynomes entiers. Déterminants. Calcul des radicaux. Arrangements, permutations, combinaisons. Expressions imaginaires. Notions sur les limites. Séries. Logarithmes. — II. *Dérivées.* Notions sur les fonctions, les infiniment petits et leurs divers ordres. Dérivées. Propriétés des fonctions découlant de la notion de la dérivée. Calcul des dérivées. — III. *Premières notions de la Géométrie analytique plane.* Des coordonnées. Transformation des coordonnées. Théorie des projections. Ligne droite. Lieux géométriques. — IV. *Premieres notions de Géométrie analytique a trois dimensions.* Projections et coordonnées. Transformation des coordonnées. Plan. Ligne droite. — V. *Différentielles et intégrales.* Définition et calcul des différentielles. Différentielles de quelques fonctions définies géométriquement. Chan-

gement de variables. Fonctions primitives ou intégrales. Intégration des fonctions rationnelles. Intégration des irrationnelles du second degré. Intégration de quelques fonctions transcendantes. Intégrales définies. Développement des fonctions en séries. Expressions qui se présentent sous forme indéterminée. Variation des fonctions. Différences et interpolation. — VI. *Courbes et surfaces.* Courbes du second degré. Centres, diamètres et axes. Foyers et directrices. Tangentes. Courbes enveloppes. Courbure des lignes planes. Développées. Asymptotes. Points singuliers. Construction des courbes. Détermination des courbes du second degré. Tangente et plan normal; plan tangent, plan normal; plan osculateur. Surfaces enveloppes. Génération des surfaces. Applications géométriques du Calcul intégral aux courbes et aux surfaces. Intégration et différentiation sous le signe $\int$. Intégration des différentielles totales. Intégrales curvilignes. — VII. *Équations différentielles.* Formation des équations différentielles. Équations différentielles du premier ordre et du premier degré. Équations différentielles du premier ordre et d'un degré supérieur au premier. Équations différentielles du second ordre. Équations différientielles simultanées. Équations aux dérivées partielles.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 95.

(Voir *Mathesis*, (1), I, p. 206 et (2), I, p. 28).

Trouver l'équation des lignes de courbure d'une surface du second degré ayant pour équation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0.$$

Solution par M. Stuyvaert. J'avais essayé de résoudre cette question par le calcul infinitésimal. Ma démonstration était longue et incomplète. M. Mansion m'a signalé le théorème de Dupin qui conduit plus facilement au but. D'après ce théorème, les lignes de courbure de la quadrique sont les intersections de la surface avec les quadriques confocales.

Pour la symétrie, je me permettrai de changer un peu les notations. Les axes étant toujours rectangulaires, on peut rendre les coordonnées homogènes en remplaçant x, y, z par les rapports de x_1, x_2, x_3 à x_4. L'équation générale de la quadrique s'écrit d'habitude sous la forme

$$\sum_{i=1}^{i=4} \sum_{k=1}^{k=4} a_{ik} x_i x_k = 0 \quad (a_{ik} = a_{ki}).$$

Le discriminant étant

$$\Delta = | a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33} \quad a_{44} | ,$$

on désigne ses mineurs par A_{ik}. L'équation tangentielle de la quadrique est alors

$$\sum_{i=1}^{i=4} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} u_i u_k = 0.$$

Le cercle imaginaire de l'infini a pour équation

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$$

et les quadriques confocales à la quadrique donnée ont pour équation

$$\Sigma\Sigma A_{ik} u_i u_k + \lambda (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = 0.$$

Leur équation ponctuelle est

$$\begin{vmatrix} A_{11}+\lambda & A_{12} & A_{13} & A_{14} & x_1 \\ A_{12} & A_{22}+\lambda & A_{23} & A_{24} & x_2 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33}+\lambda & A_{34} & x_3 \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc cette égalité combinée avec l'équation de la quadrique donnée représente toutes les lignes de courbure de cette surface.

Dans cette dernière relation, le terme indépendant de λ n'est autre que le premier membre de l'équation de la surface proposée. On peut donc le retrancher et diviser tous les termes par λ. Dans l'égalité résultante, le terme indépendant de λ est alors

$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} & x_2 \\ A_{23} & A_{33} & A_{34} & x_3 \\ A_{24} & A_{34} & A_{44} & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{14} & x_1 \\ A_{13} & A_{33} & A_{34} & x_3 \\ A_{14} & A_{34} & A_{44} & x_4 \\ x_1 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} & x_1 \\ A_{12} & A_{22} & A_{24} & x_2 \\ A_{14} & A_{24} & A_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_4 & 0 \end{vmatrix};$$

le terme en λ est multiplié par l'expression

$$\begin{vmatrix} A_{33} & A_{34} & x_3 \\ A_{34} & A_{44} & x_4 \\ x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{22} & A_{24} & x_2 \\ A_{24} & A_{44} & x_4 \\ x_2 & x_4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{14} & x_1 \\ A_{14} & A_{44} & x_4 \\ x_1 & x_4 & 0 \end{vmatrix};$$

le terme en λ^2 est

$$-\lambda^2 x_4^2.$$

Pour trouver les projections des lignes de courbure sur le plan des yz, il faudrait éliminer x_1 entre l'équation de la quadrique et celle des surfaces confocales. Ces deux relations étant du second degré en x_1, l'élimination est, somme toute, faisable.

NOTE. Sur les propriétés des quadriques homofocales invoquées ici, voir SERVAIS, *Cours de géométrie analytique*, 1901, t. II, pp. 155-157. Voici une démonstration sommaire du théorème de Dupin (BERTRAND, *Calcul différentiel*, n° 682). Soient $adx + bdy + cdz = 0$, $Adx + Bdy + Cdz = 0$, $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0$ les équations différentielles en coordonnées rectangulaires de trois systèmes orthogonaux de surfaces, de manière que $aA + bB + cC = 0$ (1), $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$ (2), $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$ (3).

Supposons $x = y = z = 0$, $b = c = 0$, $A = C = 0$, $\alpha = \beta = 0$. En dérivant (1) (2) (3) respectivement par rapport à z, x, y, ce que nous indiquons par les indices 3, 1, 2, il vient

$$aA_3 + Bb_3 = 0, \quad B\beta_1 + \gamma C_1 = 0 \quad a\alpha_2 + \gamma c_2 = 0.$$

A cause de $A_3 = C_1$, $b_3 = c_2$, $\beta_1 = \alpha_2$, on déduit de là que $c_2 = 0$, $A_3 = 0$, $\beta_1 = 0$, relations qui expriment que les lignes de courbure des trois surfaces au point considéré sont tangentes aux axes (BERTRAND, C. D., n° 668). (P. M.).

Question 1401.

(Voir *Mathésis* (3), III, p. 40).

Trouver une courbe telle que l'angle de deux tangentes quelconques soit proportionnel à l'angle des rayons vecteurs menés de l'origine aux points de contact de ces tangentes. (ST. N. MIREA.)

Solution par MM. CLAEYS (Gand), AUDIBERT et VERHEUGEN. Soient (r, θ) les coordonnées d'un point M de la courbe, α l'angle de la tangente en ce point avec l'axe polaire OX, V l'angle de la même tangente avec le rayon vecteur OM. On a $\alpha = \theta + V$, d'où en passant à un autre point M′ de la courbe

$$\Delta\alpha = \Delta\theta + \Delta V. \qquad (1)$$

Or, $\Delta\alpha$ est l'angle des deux tangentes en M et M′ et par hypothèse

$\Delta\alpha = k\Delta\theta$; en substituant cette valeur dans l'équation (1) et passant ensuite à la limite, on obtient

$$(1 - k)\, d\theta = dV. \tag{2}$$

Si l'on fait $1 - k = a$ et qu'on intègre il vient

$$V = a\theta + b.$$

Or, $\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'}$; de là, successivement,

$$\frac{r}{r'} = \operatorname{tg}(a\theta + b), \quad \frac{dr}{r} = \frac{\cos(a\theta + b)}{\sin(a\theta + b)} d\theta, \tag{3}$$

$$lr = \frac{1}{a} l \sin(a\theta + b) + \frac{lC}{a},$$

$$r^a = C \sin(a\theta + b).$$

Sans nuire à la généralité on peut supposer $b = 0$; car cela revient à faire tourner l'axe OX de l'angle $\frac{b}{a}$.

Nous avons supposé k différent de 1. Si l'on donnait $k = 1$, l'équation (2) serait $V = \text{const.}$, et la courbe cherchée serait une spirale logarithmique, ou une circonférence dans l'hypothèse $V = \frac{1}{2}\pi$.

Note. Si l'on remplace dV par $d \operatorname{arc tg} \frac{r}{r'}$ l'équation (2) devient

$$a = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}, \quad \text{ou} \quad ar^2 + (a - 1) r'^2 + rr'' = 0. \tag{4}$$

Comme elle est homogène en r, r', r'', on peut l'intégrer en adoptant la variable $\frac{r'}{r} = u$; alors $r' = ru$, $r'' = r(u^2 + u')$, et l'équation (4) se change en

$$u' + a(1 + u^2) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{du}{1 + u'^2} + a\, d\theta = 0, \tag{5}$$

ce qui nous ramène à l'équation (3).

M. Sterkens, après avoir trouvé l'équation (2), observe que $r'' = \frac{dr'}{dr} \cdot \frac{dr}{d\theta} = \frac{r'\, dr'}{dr}$ et parvient ainsi à une équation homogène du premier ordre en r et r'.

M. THONET transforme l'équation $d\alpha = k d\theta$ au moyen des formules

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{r dr}{dp}, \quad p ds = r^2 d\theta,$$

où ρ est le rayon de courbure et p la distance de l'origine à la tangente ; il trouve

$$k \frac{dr}{r} = \frac{dp}{p}, \quad \text{d'où} \quad r^k = cp.$$

M. ABRAMESCU intègre l'équation (4) par deux méthodes ; la première a été indiquée ci-dessus, c'est celle qui conduit à l'équation (5) ; la seconde consiste à considérer θ comme fonction de r, on obtient alors une équation de Jacques Bernoulli. Le même correspondant examine l'hypothèse $k = 1$, qui lui donne des circonférences et des spirales logarithmiques.

×Question 1407.

(Voir *Mathesis*, (3) III, p. 56.)

Chercher le lieu des centres des cercles de rayon constant et dont l'axe radical avec un cercle fixe passe par un point donné. Trouver aussi l'enveloppe de ces cercles. (E. N. BARISIEN).

Solution géométrique par MM. P. BASTIN, EMMERICH ROSE, COUVERT, ANDRIEN, PATRICIU et DROZ-FARNY. Soient p la puissance du point donné P par rapport au cercle fixe, I le centre d'un des cercles variables dont le rayon r est donné. On a : $PI^2 - r^2 = p$; le lieu de I est donc une circonférence (π) de centre P et de rayon $\sqrt{r^2 + p}$.

On doit avoir $r^2 + p > 0$. Cette condition est réalisée lorsque le point P est extérieur au cercle fixe. Lorsque le point P est intérieur au cercle, appelant λ la demi-corde perpendiculaire au diamètre qui passe par P, la condition ci-dessus devient $r > \lambda$; la circonférence (π) se réduit au point P lui-même quand $r = \lambda$.

L'enveloppe des cercles variables se compose, dans le cas $PI > r$, de deux circonférences concentriques à π et de rayons $PI + r$ et $PI - r$. Si $PI < r$, ce qui arrive quand le point P est intérieur au cercle fixe, l'enveloppe ne comprend plus que la circonférence de rayon $PI + r$.

Solution analytique par MM. COUVERT, LEZ, PAULMIER et PRANGE. Soient O le point donné et C le centre du cercle donné. Prenons O pour

origine et OC pour axe des x, et posons $OC = a$; p et q étant les coordonnées du centre du cercle variable Γ, les deux cercles auront respectivement pour équation :

$$(x-a)^2+y^2=R^2, \quad (x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Leur axe radical a pour équation :

$$2(p-x)x+2qy+a^2-p^2-q^2=R^2-r^2.$$

Exprimons qu'il passe par l'origine ; cela donne :

$$p^2+q^2=a^2+r^2-R^2.$$

Le lieu du point (p, q) est donc un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2+r^2-R^2}$; en supposant $a^2+r^2-R^2>0$, ce cercle est réel.

Faisons $a^2+r^2-R^2=\rho^2$; l'équation de Γ peut s'écrire :

$$(x-\rho\cos\theta)^2+(y-\rho\sin\theta)^2=r^2,$$

ou

$$x^2+y^2+\rho^2-r^2=2\rho x\cos\theta-2\rho y\sin\theta. \qquad (1)$$

L'enveloppe s'obtiendra en éliminant θ entre (1) et

$$0=2\rho(x\sin\theta+y\cos\theta). \qquad (2)$$

En faisant la somme des carrés de (1) et (2) on obtient

$$(x^2+y^2+\rho^2-r^2)^2=4\rho^2(x^2+y^2),$$

ou

$$(x^2+y^2)^2-2(\rho^2+r^2)(x^2+y^2)+(\rho^2-r^2)^2=0,$$

ou encore

$$x^2+y^2=(\rho\pm r)^2,$$

de sorte que l'enveloppe cherchée se compose de deux cercles de centre O.

Solution analogue par MM. Abramescu, Verheugen, Despretz.

Note par M. Emmerich. Cherchons le lieu du centre P du cercle variable lorsque l'axe radical, au lieu de passer par un point fixe, touche un cercle fixe de centre A et de rayon ρ. Soient $OP=s$ et l'angle $POA=\varphi$, les coordonnées polaires de P, et désignons le point de rencontre de l'axe radical avec OP par S. On a

$$OS=a\cos\varphi\pm\rho,$$

$$\pm PS=s-(a\cos\varphi\pm\rho);$$

d'où

$$\overline{OS}^2-\overline{PS}^2=2s(a\cos\varphi\pm\rho)-s^2,$$

de sorte que l'équation du lieu de P sera

$$s^2-2s(a\cos\varphi\pm\rho)+R^2-r^2=0.$$

Ces deux équations que les substitutions

$$s = -s', \quad \varphi = \varphi' + \pi$$

transforment l'une en l'autre, représentent la courbe du $4^{ième}$ ordre

$$(y^2 + x^2 - 2ax + R^2 - r^2)^2 - 4\rho^2(y^2 + x^2) = 0.$$

Si $R = r$, l'axe radical devient médiatrice de OP, et l'équation se ramène à $s = 2(a\cos\varphi + \rho)$. On a une courbe fermée avec le point O comme point isolé ou point double suivant que $\rho > a$ ou $\rho \leq a$. Si $\rho = a$, c'est-à-dire si la circonférence (A, ρ) passe par O, le point P parcourt la cardioïde $s = 2\rho(\cos\varphi + 1)$.

M. Andriem observe que les centres de similitude du cercle fixe et du cercle variable décrivent deux circonférences.

Question 1417.

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 104).

Une courbe plane C *tourne dans son plan autour d'un point fixe* O ; *on lui mène une tangente parallèle à une direction donnée. Trouver le lieu du point de contact : 1° lorsque* C *est une circonférence tournant autour de l'un de ses points ; 2° lorsqu'on fait tourner une développante de cercle autour du centre du cercle générateur ; 3° lorsqu'une spirale logarithmique tourne autour de son pôle.* (H. Brocard.)

Solution par M. J. Rose (Nivelles). 1° Le centre du cercle mobile décrit une circonférence Δ de centre O ; les points du lieu cherché sont les extrémités des diamètres du cercle mobile perpendiculaires à la direction donnée. Par suite, le lieu se compose des deux circonférences provenant de la circonférence Δ à laquelle on imprime une translation perpendiculaire à cette direction et égale au rayon du cercle mobile, dans un sens ou dans l'autre.

2° Le lieu se compose de deux tangentes parallèles menées aux extrémités du diamètre parallèle à la direction fixe. En effet, la tangente en un point quelconque de la développante est perpendiculaire à la tangente au point correspondant du cercle générateur. Les deux tangentes considérées coupent donc la série des développantes en des points ayant des tangentes parallèles à la direction fixe.

3° Pendant la rotation autour de son pôle, la spirale logarithmique, d'équation $r = ma^\theta$, reste identique à elle-même, c'est-à-dire que a reste

constant. D'autre part, l'angle V d'un rayon vecteur et de la tangente au point correspondant satisfait à la relation $\operatorname{tg} V = \frac{1}{la}$ et comme a reste constant, V reste aussi constant. Les points de contact des tangentes, aux différentes spirales, parallèles à une direction fixe sont donc distribués sur une droite passant par le pôle et faisant un angle V avec la direction fixe.

Solution analytique par M. AUDIBERT.

Question 1427.

(Voir *Mathesis* (3), III, p. 184).

Soient, sur une conique donnée Σ, A *et* B ***deux points fixes et*** C ***un point variable. Par*** C, ***on mène une tangente*** t ***à une seconde conique donnée*** Σ' ; ***trouver l'enveloppe de la conjuguée harmonique de*** t ***par rapport à l'angle*** ABC. (ST. N. MIREA)

Solution par M. ABRAMESCU (Bucarest). Soient $\gamma = 0$ l'équation de la droite AB et $\alpha = 0$, $\beta = 0$ celles des tangentes en A et B à la conique Σ, l'équation de cette courbe sera de la forme $\alpha\beta - \gamma^2 = 0$. Les droites AC, BC qui se coupent sur Σ peuvent être représentées par

$$\alpha = \lambda\gamma, \quad \gamma = \lambda\beta,$$

et deux droites t, t' conjuguées harmoniques par rapport à CA, CB ont pour équations

$$\alpha - \lambda\gamma + \mu(\gamma - \lambda\beta) = 0, \quad \alpha - \lambda\gamma - \mu(\gamma - \lambda\beta) = 0.$$

de sorte que les coordonnées de t et t' sont respectivement

$$u_0 = 1, \quad v_0 = -\mu\lambda, \quad w_0 = \mu - \lambda;$$
$$u = 1, \quad v = \mu\lambda, \quad w = -\mu - \lambda.$$

Supposons la droite t tangente à une courbe Σ' de la classe m, ayant pour équation $f(u_0, v_0, w_0) = 0$. Pour avoir l'enveloppe de t' lorsque C parcourt Σ, exprimons u_0, v_0, w_0 en fonction de u, v, w. Nous aurons d'abord

$$u_0 = u, \quad v_0 = -v, \quad w_0^2 = (\mu + \lambda)^2 - 4\mu\lambda = w^2 - 4vu;$$

on en conclut l'équation de l'enveloppe de t' :

$$f(u, -v, \sqrt{w^2 - 4vu}) = 0,$$

par conséquent, cette courbe est en général de la classe $2m$.

Considérons quelques cas particuliers :

1° Σ' se réduit à un point P représenté par $au + bv + cw = 0$; l'enveloppe de t' est alors la conique

$$(au - bv)^2 = c^2(w^2 - 4uv). \qquad (1)$$

Si P est sur la tangente en B, on a $a = 0$ et l'équation (1) devient $b^2v^2 = c^2(w^2 - 4uv)$; s'il est sur AB, on trouve $(au - bv)^2 = 0$, ce qui s'explique facilement.

2° Prenons pour Σ' la conique

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 = 0.$$

L'enveloppe de t' sera la courbe de la 4e classe

$$Au^2 - 2Buv + Cv^2 + 2(Du - Ev)\sqrt{w^2 - 4uv} + F(w^2 - 4uv) = 0.$$

Elle se réduit à une conique lorsque $D = 0$, $E = 0$; on a alors

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + F(w^2 - 4uv) = 0.$$

3° Si la conique Σ' touche AB et les tangentes menées en A et B à Σ. on a $A = C = F = 0$, et l'enveloppe de t' a pour équation

$$B^2u^2v^2 - (Du - Ev)^2(w^2 - 4uv) = 0.$$

4° Si Σ' touche Σ en A et B, l'enveloppe de t' sera représentée par

$$Fw^2 - 2(2F + B)uv = 0;$$

c'est une conique qui touche Σ en A et B.

×Question 1433.

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 216).

Sur les côtés d'un triangle donné ABC, *on construit trois triangles directement semblables* BCD, CAE, ABF. *Comment doivent être les angles de ces triangles pour que* 1° *la somme* $\overline{DE}^2 + \overline{EF}^2 + \overline{FD}^2$ *soit minimum*; 2° *que la somme* $\overline{AD}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CF}^2$ *soit minimum?*

(J. Neuberg.)

Solution par M. Emmerich. Soient a, b, c les côtés du triangle fondamental. Désignons les angles aux sommets D, E, F par λ, les angles $CBD = ACE = BAF$ par μ, et les angles $BCD = CAE = ABF$ par ν, le sens positif de μ et ν étant pris vers l'intérieur du triangle ABC,

1° le triangle EAF donne, en observant que

$$AE = \frac{b \sin \mu}{\sin \lambda}, \quad AF = \frac{c \sin \nu}{\sin \lambda} :$$

$$\overline{EF}^2 \cdot \sin^2 \lambda = b^2 \sin^2 \mu + c^2 \sin^2 \nu + 2bc \sin \mu \sin \nu \cos (A + \lambda).$$

En ajoutant cette relation et les deux relations analogues, on aura

$$\sin^2 \lambda \cdot \Sigma \overline{EF}^2 = (\sin^2 \mu + \sin^2 \nu) \Sigma a^2 + \sin \mu \sin \nu \cos \lambda \Sigma 2bc \cos A$$
$$- \sin \lambda \sin \mu \sin \nu \Sigma 2bc \sin A.$$

Or, $\Sigma 2bc \cos A = \Sigma a^2$, $\Sigma 2bc \sin A = 12ABC = 3 \operatorname{tg} V \cdot \Sigma a^2$, V désignant l'angle de Brocard du triangle donné.

Divisons par Σa^2; il viendra en représentant $\Sigma \overline{EF}^2 : \Sigma a^2$ par S :

$$\sin^2 \lambda \cdot S = \sin^2 \mu + \sin^2 \nu + \sin \mu \sin \nu \cos \lambda - 3 \sin \lambda \sin \mu \sin \nu \operatorname{tg} V,$$

ou, en vertu de la relation $\sin^2 \lambda = \sin^2 \mu + \sin^2 \nu - 2 \sin \mu \sin \nu \cos \lambda$,

$$\sin^2 \lambda \cdot S = \sin^2 \lambda + 3 \sin \mu \sin \nu \cos \lambda - 3 \sin \lambda \sin \mu \sin \nu \operatorname{tg} V;$$

donc

$$S = 1 + \frac{3 \sin \mu \sin \nu \cos (\lambda + V)}{\sin^2 \lambda \cos V}.$$

On tire de cette formule la propriété assez curieuse : Si les angles aux sommets des triangles semblables BCD, CAE, ABF sont de $90° - V$, la somme $\overline{EF}^2 + \overline{FD}^2 + \overline{DE}^2$ équivaut à la somme $a^2 + b^2 + c^2$.

S'il s'agit du minimum de S, $\cos (\lambda + V)$ devra être négatif puisque

$$\frac{3 \sin \mu \sin \nu}{\sin^2 \lambda \cos V} = \frac{3 [\cos \lambda + \cos (\mu - \nu)]}{2 \sin^2 \lambda \cos V}$$

reste positif. La dernière forme montre que pour une valeur arbitraire de $\lambda > 90° - V$, le minimum de S exigera $\cos (\mu - \nu) = 1$, $\mu = \nu$.

Reste donc à chercher la valeur de λ qui rende minimum

$$S = 1 + \frac{3 (1 + \cos \lambda) \cos (\lambda + V)}{2 \sin^2 \lambda \cos V} = 1 + \frac{3 \cos (\lambda + V)}{4 \sin^2 \frac{1}{2} \lambda \cos V}.$$

En observant que

$$\frac{\cos \lambda - \sin \lambda \operatorname{tg} V}{\sin^2 \frac{1}{2} \lambda} = \cot^2 \tfrac{1}{2} \lambda - 1 - 2 \cot \tfrac{1}{2} \lambda \operatorname{tg} V$$
$$= (\cot \tfrac{1}{2} \lambda - \operatorname{tg} V)^2 - 1 - \operatorname{tg}^2 V,$$

on s'aperçoit que le minimum de S a lieu pour $\cot \frac{1}{2} \lambda = \operatorname{tg} V$, $\lambda = 180° - 2V$, $\mu = \nu = V$. C'est donc le premier triangle de Brocard

dont les côtés rendent minimum la somme $\Sigma\overline{EF}^2$. Ce minimum a la valeur $\frac{1}{4}(1-3\operatorname{tg}^2 V)(a^2+b^2+c^2)$.

2° Le triangle ADB donne

$$\overline{AD}^2 \cdot \sin^2\lambda = c^2\sin^2\lambda + a^2\sin^2\nu - 2ca\sin\nu\sin\lambda\cos(B-\mu);$$

les valeurs de $\overline{BE}^2\cdot\sin^2\lambda$, $\overline{CF}^2\cdot\sin^2\lambda$ résultent des triangles BEC, CFA. On aura, en faisant la somme

$$\sin^2\lambda\cdot\Sigma\overline{AD}^2 = (\sin^2\lambda+\sin^2\nu)\Sigma a^2 - \sin\nu\sin\lambda\cos\mu\Sigma 2ca\cos B - \sin\lambda\sin\mu\sin\nu\Sigma 2ca\sin B,$$

$$\frac{\Sigma\overline{AD}^2}{\Sigma a^2}\cdot\sin^2\lambda = T\sin^2\lambda = \sin^2\lambda+\sin^2\nu-\sin\nu\sin\lambda\cos\mu - 3\sin\lambda\sin\mu\sin\nu\operatorname{tg} V,$$

où T désigne $\Sigma\overline{AD}^2 : \Sigma a^2$; comme

$$\sin^2\nu - \sin\nu\sin\lambda\cos\mu = \sin\mu\sin\nu\cos\lambda,$$

il vient

$$T = 1 + \frac{\sin\mu\sin\nu(\cos\lambda - 3\sin\lambda\operatorname{tg} V)}{\sin^2\lambda}.$$

Si les angles λ aux sommets D, E, F satisfont à la condition

$$\cot\lambda = 3\operatorname{tg} V$$

qui les rend égaux à 30° dans le cas où le triangle ABC est équilatéral et $> 30°$ dans les autres cas, la somme $\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2$ équivaut à la somme $a^2+b^2+c^2$.

Le minimum de T exige d'abord $\cot\lambda < 3\operatorname{tg} V$, et le procédé employé ci-dessus fait voir que les angles μ, ν doivent être égaux. L'expression à examiner sera donc

$$T = 1 + \frac{\cos^2\frac{1}{2}\lambda(\cos\lambda - 3\sin\lambda\operatorname{tg} V)}{\sin^2\lambda} = 1 + \frac{\cos\lambda - 3\sin\lambda\operatorname{tg} V}{4\sin^2\frac{1}{2}\lambda}.$$

Or,

$$\frac{\cos\lambda - 3\sin\lambda\operatorname{tg} V}{\sin^2\frac{1}{2}\lambda} = (\cot\tfrac{1}{2}\lambda - 3\operatorname{tg} V)^2 - 1 - 9\operatorname{tg}^2 V.$$

Le minimum de T aura donc lieu pour $\cot\frac{1}{2}\lambda = 3\operatorname{tg} V$. Les points correspondants D_1, E_1, F_1 se construisent par la remarque que les sommets A', B', C' du premier triangle de Brocard sont les barycentres des triangles BCD_1, CAE_1, ABF_1; AD_1, BE_1, CF_1 sont parallèles aux

médianes du triangle A'B'C' et sont les doubles des médianes correspondantes. Le minimum de T est triple du minimum de S.

M. P. Bastin a résolu la même question en employant le calcul différentiel. Une solution du 1° se déduit immédiatement du § 44 de notre mémoire *Sur les projections et contreprojections d'un triangle fixe.* (J. N.)

×Question 1436.

(Voir *Mathesis*, (3) III, p. 216.)

Mener par un point donné P ***une droite qui rencontre une circonférence donnée*** O ***en un point*** A ***tel que la distance*** PA ***soit à la distance du centre*** O ***à la droite*** PA ***dans un rapport donné*** K. (Popovici.)

Solution par M. A. Droz-Farny. La sécante menée par P, rencontre la circonférence en A et B. Soient OC la distance de O à la sécante et PD la tangente menée de P à la circonférence. Si P est intérieur au cercle, la tangente sera remplacée par la demi-corde perpendiculaire au diamètre PO. Abaissons enfin BF perpendiculaire sur PO. On a successivement :

$$\frac{PA}{OC} = k, \quad \frac{PA.PB}{OC.PB} = k,$$

donc

$$\frac{\overline{PD}^2}{PO.BF} = k.$$

La distance BF est donc déterminée et, par conséquent aussi, la sécante PAB.

Solution par MM. Emmerich et Janne. La projection C de O sur PA appartient à la circonférence de diamètre OP. Si l'on fait parcourir à C cette circonférence et qu'on prenne sur PC une longueur PA égale à k.OC, comme les droites OC, PA sont constamment perpendiculaires, le point A décrira également une circonférence ayant pour diamètre une perpendiculaire PE à OP, égale à k.OP. Le point cherché A est à l'intersection de cette circonférence avec la circonférence donnée.

Appelons I le milieu de PE, d la distance OP, R le rayon de la circonférence O. Pour qu'il y ait une solution, OI doit être compris entre la

somme et la différence des rayons des circonférences O, I ; ce qui exige

$$\tfrac{1}{2}dk + R \geq \tfrac{1}{2}d\sqrt{k^2+4} \geq \left|\tfrac{1}{2}dk - R\right|,$$

ou

$$k \geq \frac{d^2 - R^2}{dR} \geq -k,$$

ou

$$k \geq \frac{s}{dR},$$

s désignant la valeur absolue de la puissance de P par rapport au cercle.

Le problème peut avoir quatre solutions.

MM. Barisien, R. Desprets et Janne nous ont adressé une solution de la même question par le calcul.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1145. Les axes coordonnés faisant l'angle θ, quelle relation γ a-t-il entre les droites $y = mx$, $y = m'x$, lorsque 1° $m' = -m$; 2° $mm' = 1$; 3° $mm' = -1$.

1° Les deux droites sont *obliquement symétriques* par rapport à l'un des axes coordonnés, c'est-à-dire que le segment d'une parallèle à l'un des axes, compris entre les deux droites, a son milieu sur l'autre axe. 2° Les deux droites sont orthogonalement symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $x0y$; 3° on passe de la première droite à la seconde en la transformant successivement au moyen des deux symétries précédentes.

Si α, α' sont les inclinaisons des deux droites sur l'axe $0x$, on a respectivement,

$$\cot\alpha + \cot\alpha' = 2\cot\theta, \quad \alpha + \alpha' = 2\theta,$$

$$(1+\cos^2\theta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha' - \sin\theta\cos\theta(\operatorname{tg}\alpha' + \operatorname{tg}\alpha) + \sin^2\theta = 0.$$

1146. Soient $x = OP'$, $y = PM$ les coordonnées d'un point M par rapport à deux axes Ox, Oy faisant l'angle ω. Trouver les formules pour passer aux coordonnées polaires, O étant le pôle et la bissectrice OZ de l'angle xOy étant l'axe polaire.

En projetant le contour OPM et la résultante OM sur des perpendiculaires aux axes Ox, Oy, on trouve

$$r\sin\alpha = x\sin\left(\frac{\omega}{2} - \theta\right), \quad r\sin\alpha' = y\sin\left(\frac{\omega}{2} + \theta\right).$$

Les formules inverses sont

$$r = \frac{x\sin\left(\frac{\omega}{2} - \theta\right) + y\sin\left(\frac{\omega}{2} + \theta\right)}{\sin\frac{\omega}{2}}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y - x}{(x+y)\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}.$$

1147. Mettre les expressions suivantes sous une forme symétrique en a, b, c :

$$1^\circ\ (a+b+c)^2-(a+b)(a+c)+a^2,$$

$$2^\circ\ (a+b)[(a+b+c)^2-(a+b)(a+c)+a^2-(a+b)^2+2ab].$$

(M. STUYVAERT.)

$1^\circ\ a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc$; $2^\circ\ (a+b+c)(bc+ca+ab)-abc$.

1148. Eliminer x et y entre les équations

$$x+y=1. \tag{1}$$

$$ax-cp=\sqrt{\frac{p^2-x}{q^2-y}}(by-cq). \tag{2}$$

$$a'x-c'p=\sqrt{\frac{p^2-x}{q^2-y}}(b'y-c'q). \tag{3}$$

(M. STUYVAERT.)

Posons $(ab)=ab'-a'b$, etc. En divisant (2) par (3), on trouve

$$xy(ab)=xq(ac)-yp(bc). \tag{4}$$

En multipliant (2) par c' et (3) par c et soustrayant,

$$x(ac)=\sqrt{\frac{p^2-x}{q^2-y}}\,y(bc).$$

Elevant au carré, et réduisant, on obtient

$$xy[x(ac)^2-y(bc)^2]=x^2q^2(ac)^2-y^2p^2(bc)^2. \tag{5}$$

Divisant (5) par (4),

$$x(ac)^2-y(bc)^2=[xq(ac)+yp(bc)](ab).$$

Cette équation est linéaire en x et y; en y joignant l'équation (1), on tire les valeurs de x et y et on substitue dans (4).

QUESTIONS PROPOSÉES.

***1465.** Etant donné un quadrilatère à la fois inscriptible et circonscriptible, dont les côtés consécutifs sont a, b, c, d, dont S désigne l'aire et dont Σ est l'aire du triangle formé par les points de rencontre des trois diagonales, démontrer la relation

$$4S^2=(a^2b^2-c^2d^2)(a^2d^2-b^2c^2)\Sigma.$$

(E. N. BARISIEN).

Les Allemands appellent un tel quadrilatère *bicentrique*.

***1466.** Soient D, E, F les points où les côtés a, b, c d'un triangle ABC touchent respectivement les cercles exinscrits I′, I″, I‴, de

rayon r', r'', r'''. Si la circonférence DEF passe par le sommet A, on a les relations

$$\frac{a}{p-a} = \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c}, \quad \text{aire I'BC} = \text{I''CA} + \text{I'''AB},$$

$$\sin^2\frac{A}{2} = \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}, \quad \cos B + \cos C = 2\cos^2\frac{A}{2},$$

$$\cos A = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{2R},$$

$$\cos B = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r'''}{2R},$$

$$\cos C = 2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{r''}{2R},$$

$$1 = 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} = \frac{r'}{2R'},$$

$$\overline{AD}^2 = a^2 + b^2 + c^2 - p^2.$$

D est le centre du cercle circonscrit au triangle I'I''I''', et les rayons r, r''', r'' sont doubles des distances du centre O du cercle circonscrit aux côtés a, b, c. Les angles DEA, DFA sont droits. La circonférence DEF passe par le pied de la symédiane menée par I dans le triangle IBC, et par la projection de D sur la bissectrice I''I'''. (J. Neuberg.)

1467. Trouver toutes les courbes dont les axes centraux sont les normales principales d'une autre courbe.

Evidemment, les deux courbes appartiennent à une même famille, qu'on demande de caractériser au point de vue intrinsèque.

On a un exemple de ces courbes en considérant, sur le cône engendré par les côtés d'un angle droit qui tourne autour d'une bissectrice, deux géodésiques, symétriques par rapport à l'axe. (E. Cesàro.)

1468. D'un point donné comme centre, décrire un cercle qui soit harmoniquement inscrit ou circonscrit à une ellipse donnée, c'est-à-dire inscrit ou circonscrit à un triangle conjugué à cette ellipse.

Trouver le lieu des centres des cercles qui sont à la fois harmoniquement inscrits et circonscrits à une ellipse donnée.

Y a-t-il des cercles osculateurs d'une ellipse qui soient harmoniquement inscrits ou circonscrits à la courbe? (M. Stuyvaert.)

SUR LES PLANS CONJUGUÉS DANS LES CUBIQUES GAUCHES,

par M. C. SERVAIS, professeur à l'Université de Gand.

1. Deux plans conjugués ω et ω' rencontrent la cubique gauche en deux ternes de points ABC, A'B'C'; les points A et A' sont réels et les couples de points BC, B'C' sont simultanément réels ou imaginaires conjugués. Leur intersection φ est l'axe de deux plans osculateurs à la cubique en deux points E et F. Si les points B et C sont réels, les points E et F sont les points doubles de la projectivité cyclique déterminée par le terne ABC. Si les points B et C sont imaginaires conjugués, ces points sont les éléments doubles de la projectivité cyclique A'EF. Dans les deux cas, la droite EF détermine dans le plan ω le foyer O de ce plan(*). Les points A et A' sont les éléments doubles de l'involution (BC, B'C', EF); donc les tangentes en ces points et les sécantes BC, B'C', EF sont des rayons d'un système réglé; la droite AO est une directrice de ce système, et elle rencontre les cinq rayons cités, aux points A, A_1, D, α', O. Le point α' est nécessairement situé sur l'axe φ. Nous avons démontré que si deux points réels ou imaginaires conjugués E et F de la cubique divisent harmoniquement un couple réel AA', la sécante EF et l'axe φ des plans osculateurs en ces points déterminent sur l'une des droites associées en A et A' deux points O et α' tels que

$$(AA_1O\alpha') = -3.$$

On a de même, relativement au couple BC,

$$(AA_1DO) = -3,$$

car l'axe $\beta\gamma$ des plans osculateurs aux points B et C passe par le foyer O du plan ABC. Des ces égalités on tire

$$(AA_1D\alpha') = 9.$$

Donc : *Si deux plans conjugués rencontrent la cubique gauche en deux ternes* ABC, A'B'C', *les tangentes à la courbe en* A *et* A' *et les sécantes*

(*) SERVAIS. *Les Imaginaires en Géométrie* (Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique, t. XLIX) : *Éléments Imaginaires dans les courbes gauches du troisième ordre*, § I, n^os 3 et 6.

BC, B'C' *forment un système réglé dont le rapport anharmonique est égal à* 9.

3. Le plan AB'C' a pour foyer un point O' situé sur AO, car le couple B'C' divise harmoniquement AA'; soit E'F' la sécante issue de ce point. On sait que la polaire trilinéaire du foyer O du plan ABC, par rapport au triangle ABC est l'axe φ des plans osculateurs en E et F.

Il en résulte l'égalité (*)

$$(ADO\alpha') = -2.$$

Le point α' est le foyer du plan AEF, la sécante issue de ce point est B'C' et l'axe $\beta'\gamma'$ des plans osculateurs en ces points qui est la polaire trilinéaire de α' par rapport au triangle AEF, coupe AO au foyer O' du plan ABC. Donc

$$(AO\alpha'O') = -2 \quad \text{ou} \quad (AO'O\alpha') = \tfrac{2}{3}.$$

L'égalité précédente et cette dernière donne :

$$(O'DO\alpha') = -\tfrac{4}{3} \quad \text{ou} \quad (OO'D\alpha') = \tfrac{3}{7}.$$

Donc : *Si deux plans conjugués coupent la cubique gauche en deux ternes* ABC, A'B'C', *les sécantes* EF, E'F', *issues des foyers* O *et* O' *des plans* ABC, AB'C' *forment avec les sécantes* BC, B'C' *un système réglé dont le rapport anharmonique est égal à* $\frac{3}{7}$.

3. L'axe φ' des plans osculateurs en E' et F' coupe AO en un point α et on a

$$(A\alpha'O'\alpha) = -2 \quad \text{ou} \quad (\alpha A\alpha'O') = \tfrac{2}{3}.$$

Mais

$$(AO\alpha'O') = -2.$$

Par suite, on a

$$(\alpha O\alpha'O') = -\tfrac{1}{3} \quad \text{ou} \quad (OO'\alpha'\alpha) = \tfrac{3}{7}.$$

Donc : *Si deux plans conjugués coupent la cubique gauche en deux ternes* ABC, A'B'C', *les sécantes* EF, E'F' *issues des foyers* O *et* O' *des plans* ABC, AB'C' *forment avec les axes* φ *et* φ' *des plans osculateurs aux points* EF, E'F' *un système réglé dont le rapport anharmonique est égal à* $\frac{3}{7}$ (**).

(*) Ibidem, § V, n° 8.

(**) *Sur le système focal* (Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique, t. LII), § 1 n° 3

SOLUTION D'UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE,

par M. Fitz-Patrick, professeur à Valenciennes.

Problème. *Construire un triangle* ABC, *connaissant les points de rencontre* A′, B′, C′, *des médianes avec la circonférence circonscrite.*

Appelons G le centre de gravité de ABC; α, β, γ les milieux des côtés du triangle ABC; α', β', γ' ceux du triangle A′B′C′ (Le lecteur est prié de faire la figure).

1. Les triangles GBC, GC′B′ étant inversement semblables, leurs médianes $G\alpha$, $G\alpha'$ sont des lignes homologues et le prolongement de chacun d'elles au-delà de G est la symédiane de l'autre triangle.

Ainsi, les droites GA, GB, GC *sont dirigées suivant les symédianes des triangles* GB′C′, GC′A′, GA′B′.

D'après cela,

$$\text{angle } B'G\alpha' = AGC' = A'GC = B'G\gamma',$$
$$\text{angle } C'G\alpha' = C'G\beta', \quad \text{angle } A'G\beta' = A'G\gamma'.$$

Par conséquent, *les droites qui joignent le point* G *aux sommets du triangle* A′B′C′, *sont les bissectrices des angles compris entre les droites qui joignent* G *aux milieux des côtés de ce triangle.*

2. Désignons maintenant par

A_1, A_2 les projections de A′ sur $G\beta'$, $G\gamma'$;
B_2, B_3 » B′ » $G\gamma'$, $G\alpha'$;
C_3, C_1 » C′ » $G\alpha'$, $G\beta'$.

Je dis que les six projetantes ont une même valeur x. En effet, on voit d'abord que

$$A'A_1 = A'A_2, \quad B'B_3 = B'B_2, \quad C'C_3 = C'C_1,$$

les droites GA′, GB′, GC′ étant les bissectrices des angles $\beta'G\gamma'$, $\gamma'G\alpha'$, $\alpha'G\beta'$.

Ensuite, à cause de $B'\alpha' = \alpha'C'$, $C'\beta' = \beta'A'$, $A'\gamma' = \gamma'B'$, on a aussi

$$B'B_3 = C'C_2, \quad C'C_1 = A'A_1, \quad A'A_2 = B'B_1.$$

Pour trouver x, observons que

$$GC_2 = GC_1, \quad GB_3 = GB_1, \quad GA_1 = GA_2;$$

en combinant convenablement ces égalités, nous obtiendrons entre les

longueurs des tangentes communes intérieures à deux des cercles décrits des centres A', B', C' avec le rayon x, la relation

$$B_0C_0 \pm C_0A_0 \pm A_0B_0 = 0. \qquad (1)$$

Représentons par $2a'$, $2b'$, $2c'$ les côtés du triangle A'B'C'; alors $B_0C_0 = 2\alpha'B_0 = 2\sqrt{a'^2 - x^2}$, etc., et l'égalité (1) donne l'équation

$$\sqrt{a'^2 - x^2} \pm \sqrt{b'^2 - x^2} \pm \sqrt{c'^2 - x^2} = 0. \qquad (2)$$

Connaissant x, nous pourrons tracer les cercles (A', x), (B', x), (C', x) et mener les tangentes communes intérieures; trois de ces tangentes concourent en un point G, les trois autres en un point G'. Chacun des points G, G' est le centre de gravité d'un triangle ABC qui résout le problème proposé.

On pourra démontrer que *ces points* G, G' *sont les foyers de l'ellipse qui touche les côtés du triangle* A'B'C' *en leurs milieux* α', β', γ'.

Pour rendre l'équation (2) rationnelle, isolons le premier radical, élevons au carré, isolons le radical qui reste et élevons de nouveau au carré; il vient

$$3x^4 - 2x^2(a'^2 + b'^2 + c'^2) + 4b'^2c'^2 - (b'^2 + c'^2 - a'^2)^2 = 0. \qquad (3)$$

Soient S' la surface du triangle A'B'C', V' son angle de Brocard; l'équation (3) pourra s'écrire

$$3x^4 - 8S'x^2 \cot V' + S'^2 = 0,$$

d'où

$$x^2 = \frac{4S'}{3}(\cot V' \pm \sqrt{\cot^2 V' - 3}).$$

Note. La solution qu'on vient de lire d'un problème fort curieux, donne lieu à quelques remarques intéressantes.

1. On rencontre l'équation (2) quand on cherche le côté x d'un triangle équilatéral XYZ qui soit la projection orthogonale du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ sur un certain plan. En effet,

$$\beta'Y - \alpha'X = \pm\sqrt{c'^2 - x^2}, \quad \gamma'Z - \beta'Y = \pm\sqrt{a'^2 - x^2},$$
$$\alpha'X - \gamma'Z = \pm\sqrt{b'^2 - x^2},$$

d'où, par addition, l'équation (2).

Si l'on veut couper le prisme droit construit sur le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ par

un plan tel que la section soit un triangle équilatéral X'Y'Z', le côté x de la section vérifie les égalités

$$\beta'Y' - \alpha'X' = \pm\sqrt{x^2 - c'^2}, \quad \gamma'Z' - \beta'Y' = \pm\sqrt{x^2 - a'^2},$$
$$\alpha'X - \gamma'Z' = \pm\sqrt{x^2 - b'^2};$$

en additionnant, on obtient l'équation (2) multipliée par $\sqrt{-1}$.

L'équation (2) admet donc pour x^2 deux valeurs dont la plus petite correspond au triangle XYZ et la plus grande au triangle X'Y'Z'; la première racine seule donne une solution réelle du problème de M. Fitz-Patrick.

Pour de plus amples développements, je renvoie à mon mémoire *sur les projections et contreprojections d'un triangle fixe* (*Mém. in-8° de l'Ac. de Belgique*, t. XLIV).

2. Voici une autre manière d'arriver à l'équation (2).

Soit π la puissance de G par rapport au cercle ABC; les triangles semblables GBC, GC'B' donnent, en désignant par a, b, c les côtés de ABC, par m_a, m_b, m_c les médianes :

$$\frac{a'}{a} = \frac{GB'}{GC} = \frac{GB'.GB}{GC.GB} = \frac{\pi}{GA.GC.GB}\cdot GA;$$

d'où l'on conclut aisément

$$a' : b' : c' = a.GA : b.GB : c.GC = am_a : bm_b : cm_c.$$

Appelons α, β, γ les angles AαB, BβC, CγA compris entre les médianes de ABC et les côtés correspondants; la surface du triangle ABC ayant pour expression $\frac{1}{2}am_a \sin\alpha$, $\frac{1}{2}bm_b \sin\beta$, $\frac{1}{2}cm_c \sin\gamma$, les proportions précédentes pourront s'écrire

$$a' : b' : c' = \frac{1}{\sin\alpha} : \frac{1}{\sin\beta} : \frac{1}{\sin\gamma}$$

ou, en désignant par x un facteur de proportionnalité,

$$a' = \frac{x}{\sin\alpha}, \quad b' = \frac{x}{\sin\beta}, \quad c' = \frac{x}{\sin\gamma}.$$

Or, entre les angles α, β, γ on a l'égalité connue

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = 0;$$

comme

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{a'^2 - x^2}}{x}, \quad \text{etc.},$$

x est encore donné par l'équation (2).

En observant que α, β, γ sont aussi les inclinaisons des droites $G\alpha'$, $G\beta'$, $G\gamma'$ sur $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, on déduit de l'égalité $x = a' \sin \alpha$, que x est la distance des points B', C' à la droite $G\alpha'$.

3. Le foyer F d'une conique qui touche les côtés du triangle A'B'C' aux points α_1, β_1, γ_1 est caractérisé par la propriété que les droites FA', FB', FC' sont les bissectrices des angles $\beta_1F\gamma_1$, $\gamma_1F\alpha_1$, $\alpha_1F\beta_1$. De là on peut conclure que G et G' sont les deux foyers de l'ellipse qui touche les côtés de A'B'C' en leurs milieux α', β', γ'. La détermination de ces foyers se trouve exposée dans le mémoire *Sur les foyers de Steiner d'un triangle par J. Neuberg et A. Gob* (AFAS, Congrès de Paris, 1889, § 24).

4. Soit MNP un triangle dont les côtés sont parallèles aux médianes AG, BG, CG de ABC; les médianes MG_1, NG_1, PG_1 de MNP seront parallèles aux côtés de ABC. Comme les droites B'C', BC sont antiparallèles par rapport aux droites BB', CC', la parallèle menée par M à B'C' sera l'isogonale de MG_1 dans l'angle NMP, et, par suite, une symédiane du triangle MNP. Ainsi, les parallèles à B'C', C'A', A'B' menées respectivement par M, N, P concourent au point de Lemoine K_1 du triangle MNP.

Le problème de M. Fitz-Patrick revient donc au suivant :

Connaissant les directions K_1M, K_1N, K_1P *des symédianes d'un triangle* MNP, *construire ce triangle.*

Les côtés d'un triangle podaire de G_1 sont perpendiculaires aux symédianes K_1M, K_1N, K_1P de MNP; ce triangle est donc orthologique à A'B'C'. D'où un autre problème qui trouve ici sa solution.

(J. Neuberg).

ˣNOTES MATHÉMATIQUES.

14. *Construction d'un cercle tangent à trois cercles*, par M. G. Fontené. Petersen observe que le problème consiste à construire le triangle des points de contact, triangle dont les côtés doivent passer par trois des centres de similitude des cercles donnés; on imitera donc, ajoute-t-il, la solution donnée pour ce problème classique : Dans un cercle donné, inscrire un triangle de manière que chaque côté passe par un point donné.

Si, au lieu de la solution donnée par Petersen pour ce dernier problème, on envisage la solution de Poncelet, on arrive à la solution du problème qui fait l'objet de cette note.

Soient O, O_1, O_2 les trois cercles ; soient S, S_1, S_2 les centres de similitude des couples de cercles (O_1, O_2), (O_2, O), (O, O_1) que l'on veut utiliser. Prenons sur le cercle O un point A quelconque, on détermine sur O_2 le point antihomologue A_1, puis sur O_2 le point A_2 antihomologue de A_1, et enfin sur O le point A′ antihomologue de A_2. Il y a, sur le cercle O, homographie entre A et A′, et l'on doit chercher les points doubles de cette homographie. On la détermine donc par trois couples de points (A, A′), (B, B′), (C, C′) ; et l'on sait que la droite joignant les points doubles contient les points d'intersection des cordes AB′ et BA′, AC′ et CA′, BC′ et CB′ ; c'est la droite de Pascal de l'hexagone AB′CA′BC′.

15. *Sur la question* 1033. (Voir *Mathesis*, 1903, p. 235). La première partie admet la généralisation suivante :

Une conique U *touche les trois côtés d'un triangle* ABC *en trois points* A′, B′, C′ *tels que les normales en ces points concourent en un même point* N. *Les droites* AA′, BB′, CC′ *concourent en un point* P *et les perpendiculaires abaissées de* A, B, C *respectivement sur les droites* B′C′, C′A′, A′B′ *en un point* Q, *inverse du point* N *par rapport au triangle* ABC. *Démontrer que les cinq points* A, B, C, P, Q *sont situés sur une même hyperbole équilatère.*

Pour démontrer cette propriété, nous ferons voir que les points P, Q et l'orthocentre H de ABC sont sur une même conique circonscrite à ce triangle. A cet effet, soient (α, β, γ), $(0, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, 0, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, 0)$ les coordonnées normales absolues des points N, A′, B′, C′. En projetant le contour A′NB′ sur les coordonnées β_1, on trouve $\beta_1 = \beta + \alpha \cos C$. De cette façon, on obtient

$$\begin{cases} \beta_1 = \beta + \alpha \cos C, \\ \gamma_1 = \gamma + \alpha \cos B; \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_2 = \gamma + \beta \cos A, \\ \alpha_2 = \alpha + \beta \cos C; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_3 = \alpha + \gamma \cos B, \\ \beta_3 = \beta + \gamma \cos A. \end{cases}$$

Les droites AA′, BB′, CC′ ont donc pour équations :

$$\frac{y}{\beta_1} = \frac{z}{\gamma_1}, \quad \frac{z}{\gamma_2} = \frac{x}{\alpha_2}, \quad \frac{x}{\alpha_3} = \frac{y}{\beta_3}; \tag{1}$$

la condition pour qu'elles concourent est

$$\beta_1 \gamma_2 \alpha_3 = \gamma_1 \alpha_3 \beta_2, \tag{2}$$

et des deux premières équations (1) on déduit que les coordonnées de P sont proportionnelles à $\alpha_2\gamma_1$, $\beta_1\gamma_2$, $\gamma_1\gamma_2$.

La condition pour que trois points soient sur une conique circonscrite au triangle de référence est que le déterminant formé avec les inverses des

coordonnées de ces points s'annule. On doit donc avoir, en appliquant cette condition aux points P, Q, H :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta_1\gamma_2 & \alpha_2\gamma_1 & \alpha_2\beta_1 \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Cette égalité doit être une conséquence de la relation (2).

Or, on peut la développer ainsi

$$\alpha\alpha_2(\gamma_1 \cos C - \beta_1 \cos B) + \beta\beta_1(\alpha_2 \cos A - \gamma_2 \cos C) + \gamma(\beta_1\gamma_2 \cos B - \alpha_2\gamma_1 \cos A) = 0,$$

et écrire l'équation (2) sous la forme

$$\beta_1\gamma_2(\alpha + \gamma \cos B) = \gamma_1\alpha_2(\beta + \gamma \cos A)$$

ou

$$\gamma(\beta_1\gamma_2 \cos B - \gamma_1\alpha_2 \cos A) = \beta\gamma_1\alpha_2 - \alpha\beta_1\gamma_2,$$

de sorte que l'équation (3) devient

$$\alpha(\alpha_2\gamma_1 \cos C - \alpha_2\beta_1 \cos B - \beta_1\gamma_2) + \beta(\alpha_2\beta_1 \cos A - \beta_1\gamma_2 \cos C + \gamma_1\alpha_2) = 0,$$

ce qui revient à

$$\alpha_2\gamma_1(\alpha \cos C + \beta) + \alpha_2\beta_1(\beta \cos A - \alpha \cos B) - \beta_1\gamma_2(\alpha + \beta \cos C) = 0,$$

ou encore à

$$\alpha_2\gamma_1\beta_1 + \alpha_2\beta_1(\gamma_2 - \gamma_1) - \beta_1\gamma_2\alpha_2 = 0,$$

ce qui est une identité. (A. C.)

Note. L'équation (3) se ramène à

$$\lambda\alpha(\beta^2 - \gamma^2) + \mu\beta(\gamma^2 - \alpha^2) + \nu\gamma(\alpha^2 - \beta^2) = 0, \qquad (4)$$

où $\lambda = \cos A - \cos B \cos C$, $\mu = \cos B - \cos C \cos A$, ...

Elle représente le lieu du point N. Une étude très détaillée de cette courbe par M. H. Van Aubel a paru dans la NCM, t. IV, p. 261. Nous pourrons y revenir à l'occasion de la question 1458 de *Mathesis*.

On obtient encore l'équation (4) en exprimant que les points R (λ, μ, ν), N (α, β, γ), Q $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right)$ sont en ligne droite. Par suite, la cubique (4) (*cubique de Darboux*) est le lieu des foyers des coniques inscrites au triangle ABC et telles que l'axe focal passe par le point R, le symétrique de l'orthocentre H de ABC par rapport au centre O du cercle circonscrit.

Le théorème signalé par M. A. C. revient à dire que le point N et l'inverse du point P sont sur une même droite passant par O. (J. N.)

BIBLIOGRAPHIE.

Précis d'algèbre et de trigonométrie à l'usage des élèves de mathématiques spéciales par G. PAPELIER, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Orléans. Paris, Nony et Cie, 1903 (In-8 de 357 pp.). Prix : 5 fr.

Table des matières. *Livre* I. Compléments d'Algèbre élémentaire. I. Identité des polynomes. II. Analyse combinatoire. Formule du binome. III. Division des polynomes. Division par $x - a$. IV. Théorie des déterminants. V. Équations du du premier degré.

Livre II. Éléments d'analyse infinitésimale I. Fonctions, limites, continuité. II. Fonction exponentielle et logarithmes. III. Fonctions trigonométriques. IV. Théorie des séries. V. Série e. Logarithmes népériens. VI. Dérivées et différentielles. VII. Fonctions primitives et intégrales. VIII. Développements des fontions en série. IX. Formes indéterminées. X. Variation des fonctions. XI. Fonctions de plusieurs variables indépendantes.

Livre III. Théorie des équations. I. Nombres imaginaires. II. Propriétés générales des polynomes et des équations. III. Continuité des racines. IV. Fonctions symétriques. V. Élimination. VI. Théorie des racines égales. VII Théorème de Descartes. VIII. Théorème de Rolle. IX. Méthodes d'approximation. X. Décomposition des fractions rationnelles.

Trigonométrie. I. Division des angles. II. Équation binôme. III. Équations du 3e et du 4e degré. — Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.

L'ouvrage mérite bien le titre choisi par l'auteur : c'est un excellent *Précis* qui expose les matières des cours de mathématiques spéciales dans un langage sobre et clair; les notions difficiles (limites, infiniment petits, continuité, convergence, signes des quantités géométriques, etc.) y sont élucidées avec un réel talent, sans longueurs inutiles et fatigantes. (J. N.)

G. PAPELIER. **Formulaire de mathématiques spéciales.** Algèbre, Trigonométrie, Géométrie analytique. Paris, Vuibert et Nony, 1904 (In-8 de 229 pages, la moitié *blanches*).

Cet ouvrage est un tableau synoptique des formules principales de l'Algèbre (l'analyse combinatoire, binôme de Newton, déterminants, progressions et séries, dérivées, formule de Taylor, intégrales, théorie des équations), de la trigonométrie plane, de la géométrie analytique à deux et à trois dimensions; sur la page de droite, les formules; la page de gauche est en blanc pour les notes à ajouter par le lecteur. Le formulaire peut rendre de grands services aux élèves de mathématiques spéciales, aux élèves de nos premières scientifiques et des écoles spéciales.

A. **Treatise on Differential Equations** by A. R. FORSYTH, Sc. D., LLD., Math. D., F. R. S., Sadlerian Professor of pure Mathematics, Fellow of Trinity College, Cambridge. Third Edition. London, Mac Millan and Co, 1903 (In-8°, XVI-511 pages, cartonné).

La première édition du livre de M. Forsyth a paru en 1885, la seconde en

1888; il a été traduit en Allemand par M. Maser, en Italien par M. Arbicone. La troisième édition diffère des précédentes en quelques points (équations de Riccati, équations différentielles totales, équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre), et elle contient quelques additions (méthode de Runge pour l'intégration numérique des équations du premier ordre; méthode de Frobenius pour intégrer les équations linéaires au moyen des séries; esquisse de la théorie des multiplicateurs de Jacobi). A la fin du livre, l'auteur a introduit deux à trois cents questions posées aux examens de Cambridge. — Les matières traitées dans le volume sont à peu près celles que l'on trouve dans la seconde partie du *Cours* de Serret. Voici l'indication sommaire des titres des dix chapitres du livre. 1. Introduction (pp. 1-14). 2. Équations différentielles du premier ordre (15-54). 3. Équations différentielles linéaires à coefficients constants (55-83). 4. Méthodes diverses (84-143). 5. Intégration par les séries (144-202). 6. Séries hypergéométriques (203-249). 7. Intégration par les intégrales définies (250-271). 8. Équations différentielles contenant plus de deux variables et équations différentielles totales (272-336). 9-10. Équations aux dérivées partielles du premier ordre (337-414), ou d'ordre supérieur (415-424). — Exercices généraux (485-508). Index (509-511). Chaque chapitre est suivi d'exemples. — Les questions relatives à l'existence des intégrales ont été laissées de côté.

A Course of Modern Analysis. An Introduction to the General Theory of Infinite Series and of Analytic Functions; with an Account of the Principal Transcendental Functions, by E. T. Whittaker, M. A., Fellow and Lecturer of Trinity College, Cambridge. Cambridge : At the University Press. 1902 (In-4° de XVI-378 pp., cartonné). Prix : 12 shillings 6 d.

Les étudiants qui ont appris l'analyse infinitésimale dans les manuels analogues à ceux de Sturm, Duhamel, Serret, Rouché trouveront dans l'ouvrage de M. Whittaker les moyens de pousser plus loin, dans les directions les plus variées, l'étude de la théorie des fonctions. Voici les sujets abordés dans les divers chapitres de cet excellent traité d'analyse supérieure. *Première partie.* Les procédés analytiques (pp. 1-170). 1. Nombres complexes (3-7). 2. Convergence absolue (8-39). 3. Propriétés fondamentales des fonctions analytiques; théorèmes de Taylor, de Laurent et de Liouville (40-72). 4. Convergence uniforme des séries (73-82). 5. Théorie des résidus; application à l'évaluation des intégrales définies réelles (83-95). 6. Développement des fonctions en séries (série de Bernoulli, de Burmann, de Lagrange) (96-126). 7. Séries de Fourier (127-162). 8. Développements asymptotiques (163-170). *Deuxième partie.* Fonctions transcendantes (171-376). 9. Fonction gamma (173-203). 10. Fonctions de Legendre (204-239). 11. Fonctions hypergéométriques (240-265). 12. Fonctions besséliennes (266-308). 13. Applications aux équations de la physique mathématique (309-321). 14. La fonction elliptique $p(z)$ (322-341). 15. Les fonctions elliptiques sn z, cn z, dn z (342-361). 16. Théorèmes généraux sur les fonctions elliptiques (362-376). Index des termes employés (377-378). Chaque chapitre est suivi d'exercices.

L'exécution typographique du livre est très soignée. Le format — 270 millimètres sur 180 — est trop grand.

Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik von Prof. Dr. G. Holzmüller. Dritter Teil. Zweite Auflage. Teubner, Leipzig und Berlin, 1908 (In-8, cartonné de XIV-370 pp.; 223 fig. dans le texte). Prix : 4 mark 40.

Ce livre, très substantiel, s'adresse aux classes supérieures des écoles réales complètes et des écoles professionnelles supérieures (*höhere Fachschulen*). Il est conforme aux derniers programmes officiels de Prusse; cependant il va plus loin que ces programmes en préparant à l'enseignement supérieur et en développant particulièrement les applications. Il est surtout conforme aux idées que l'auteur cherche à faire prévaloir dans l'enseignement moyen et qu'il défend avec beaucoup de talent depuis nombre d'années. M. Holzmüller s'est attaqué à l'*arithmétisation* excessive des mathématiques, à l'enseignement strictement systématique qu'il déclare irréalisable; il préconise l'intuition en géométrie, les démonstrations intuitives ou simples, même lorsqu'elles ne présentent pas une *rigueur absolue*; il recherche de préférence des applications ayant un caractère vraiment pratique, empruntées à la physique, à la mécanique, sans exclure pour cela celles de science pure, etc. On peut se demander s'il garde une juste mesure dans l'exécution de son programme.

Nous ne pouvons que résumer ici la table des matières ; le lecteur reconnaîtra avec nous que l'auteur a su réunir en un petit volume beaucoup de choses intéressantes, et que beaucoup de ses démonstrations doivent être assez curieuses.

Géométrie. I. Exercices sur la théorie du cercle, du quadrilatère ou quadrangle complets. (Faisceau de cercles, droite de Gauss et généralisation, problème de fermeture de Poncelet, invariants d'une suite de quadrilatères de Poncelet. problème de Malfatti, cercle de Feuerbach, polygones réguliers de 17, 51, 85, 255 côtés, etc.). II. Constructions linéaires des coniques (théorèmes de Pascal, de Brianchon). III. Projection centrale (Quadrilatères de Poncelet, théorème de Desargues, constructions de coniques déterminées par cinq conditions). IV. Ponctuelles projectives (Génération tangentielle des coniques). V. Faisceaux projectifs de rayons. VI. Rapport anharmonique. VII. Applications des formes projectives. VIII Relations métriques dans les coniques IX Cercle de courbure des coniques. X. Quadrature des coniques. XI. Ponctuelles involutives. XII. Faisceaux involutifs de rayons. XIII. Exercices de géométrie analytique. XIV. Quelques applications des coniques à la physique mathématique (courants thermiques et électriques; potentiel; lignes de niveau, etc).

Stéréométrie. I. Moments d'inertie. II. Prismes et cylindres tronqués, surfaces de révolution. III. Quadriques. IV. Applications du théorème de Cavalieri (volume d'un corps dont les sections parallèles ont une aire constante ou proportionnelle à la distance de la section à un point fixe, ou proportionnelle au carré de cette distance). V. Formes de voûte. VI. Axonométrie orthographique. VII. Projection stéréographique (avec applications à l'astronomie et à la géographie). VIII. Applications diverses.

Trigonométrie sphérique.

Analyse algébrique avec applications à la géométrie et à la mécanique. I. Fonctions entières (Interpolation de Lagrange; paraboles d'ordre supérieur et leur quadrature, etc.). II. Séries infinies (caractères de convergence, convergence absolue,...). III. Séries $(1+x)^m$, π, arc sin x, arc cos x. IV. Applications

à des fonctions algébriques (exemples empruntés à la théorie des machines à vapeur, etc.). V. Séries $\log(1+x)$, arc tg x, arc sin x, tg x, cot x.

Équations d'un degré supérieur. I et II. Équations du 3e et du 4e degré. III. Notions sur les équations d'un degré quelconque. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1409.

(Voir *Mathesis*, (3); III; p. 56.)

Par le point de rebroussement O ***d'une cissoïde de Dioclès on mène deux cordes rectangulaires*** OA, OB. ***Chercher*** 1° ***le lieu du point de rencontre des circonférences décrites sur*** OA ***et*** OB ***comme diamètres***; 2° ***l'enveloppe de la droite*** AB. (G. Andrien.)

Solution par M. G. Verheugen. Il est facile de voir que le premier lieu cherché est la podaire du second.

En appelant m le coefficient angulaire de OA, on trouvera comme coordonnées x_1, y_1, de A et x_2, y_2 de B, R étant le rayon du cercle donné :

$$x_1 = \frac{2Rm^2}{1+m^2}, \quad y_1 = \frac{2Rm^3}{1+m^2},$$

$$x_2 = \frac{2R}{1+m^2}, \quad y_2 = \frac{-2R}{m(1+m^2)}.$$

L'équation de AB sera, par conséquent,

$$y - \frac{2Rm^3}{1+m^2} = \frac{m^4+1}{m(m^2-1)}\left(x - \frac{2Rm^2}{1+m^2}\right),$$

ou, en faisant les réductions,

$$m^4x - m^3y - 2Rm^2 + my + x = 0. \qquad (1)$$

Posons $m - \frac{1}{m} = p$ d'où $m^2 + \frac{1}{m^2} = p^2 + 2$. Divisons tous les termes de (1) par m^2 et remplaçons, alors on aura

$$p^2x - py - 2(R - x) = 0. \qquad (I)$$

Dérivons par rapport à p :

$$2px - y = 0. \qquad (II)$$

L'enveloppe de AB s'obtiendra en éliminant p entre (I) et (II); on trouve

$$y^2 - 8x^2 + 8Rx = 0.$$

La podaire, par rapport au point O, de cette hyperbole sera le premier lieu demandé. Cette podaire a pour équation

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - Rx) + 2R^2y^2 = 0.$$

Remarque. Si B′ est le symétrique de B par rapport à l'axe, l'enveloppe de AB′ est la parabole

$$y^2 + 8Rx = 0$$

et la podaire de cette parabole est précisément la cissoïde donnée.

Solution analogue par M. H. Lez.

Solution par MM. Abramescu, Barisien et Couvert.

Les équations de la cissoïde et de la droite AB étant

$$x(x^2 + y^2) - 2Ry^2 = 0, \quad ux + vy + 1 = 0,$$

on en déduit l'équation homogène

$$x(x^2 + y^2) + 2Ry^2(ux + vy) = 0,$$

qui représente le faisceau formé par les droites OA, OB et la droite joignant O au troisième point de rencontre C de la droite AB avec la cissoïde. L'équation aux coefficients angulaires de ces droites s'obtient en remplaçant y par tx; elle est

$$2Rvt^3 + (1 + 2Ru)t^2 + 1 = 0. \qquad (1)$$

Le produit des trois valeurs de t est $-\frac{1}{2Rv}$; mais le produit des coefficients angulaires de OA et OB est égal à -1. On en conclut que OC a pour coefficient $\frac{1}{2Rv}$; en exprimant qu'il vérifie l'équation (1) on trouve

$$2R^2v^2 + Ru + 1 = 0. \qquad (2)$$

Telle est l'équation tangentielle de l'enveloppe de AB. Pour obtenir l'équation en coordonnées ponctuelles, on peut tirer u de (2), substituer la valeur dans l'équation $ux + vy + 1 = 0$, puis égaler à zéro le discriminant de l'équation obtenue, v étant l'inconnue. On trouve ainsi l'hyperbole $y^2 - 8x^2 + 8Rx = 0$; elle a pour sommets l'origine O et le centre du cercle générateur de la cissoïde.

Pour traiter le 1° de la question, on élimine u et v entre les équations (2) et

$$ux + vy + 1 = 0, \quad uy - vx = 0,$$

ce qui donne

$$(x^2 + y^2)^2 - Rx\ (x^2 + y^2) + 2R^2y^2 = 0.$$

Le lieu cherché est donc une quartique bicirculaire, piriforme, ayant à l'origine un point cuspidal.

Remarques. 1. Le lieu du milieu de AB est la droite $x = R$. (Barisien.)

2. L'enveloppe du cercle décrit sur OA comme diamètre est la sextique

$$(x^2 + y^2 - 2Rx)^3 - 27R^2y^2(x^2 + y^2) = 0. \quad \text{(Barisien).}$$

3. On peut rapprocher la question 1409 de la question 427 du J. M. S, 1896, p. 186, résolue par M. Puech. (Couvert.)

M. H. Audibert et Emmerich ont résolu la question en employant les coordonnées polaires. L'équation du lieu 1° est

$$\rho^3 - R\rho\cos\theta + 2R^3\sin^3\theta = 0;$$

on en déduit que la courbe touche son rayon vecteur lorsque $\sin\theta = \pm\frac{1}{3}$.

M. Emmerich fait encore les remarques suivantes :

I. Les sommets de l'hyperbole enveloppe de AB sont le point O et le centre M du cercle générateur de la cissoïde; l'un des foyers est le point D diamétralement opposé à O sur ce cercle La projection E de D sur AB décrit la circonférence de diamètre OM; d'où l'on déduit une construction facile de la droite AB et de la projection C de O sur AB.

II. Soient A', A'', B', B'' les points où les droites OA, OB rencontrent le cercle M et la tangente menée en D. On voit facilement que les triangles OB'A et A'DA'', OA'B et B'DB'' sont équipollents; donc pour obtenir une droite AB, il suffit de mener un diamètre A'B' du cercle M, de tracer par A', B' des perpendiculaires à OD qui rencontrent OB', OA' aux points B, A. Cette construction montre que la perpendiculaire en M sur OD passe par le milieu F de la droite AB, et que les points O, A, D, B sont sur une même circonférence de centre F.

De $DA'^2 = OB'^2 = OA'.A'A''$, $DB'^2 = \overline{OA'}^2 = OB'.B'B''$, on déduit $\overline{OB'}^3 : \overline{OA'}^3 = OA : OB$ et par suite $tg^3 OA'B = tg\,ORA = tg\,ODA$.

M. Emmerich cherche également les tangentes communes à la cissoïde et à l'hyperbole enveloppe de AB.

Nous avons reçu de M. Dukes, trop tard pour pouvoir en tenir compte, une bonne solution géométrique avec des remarques très intéressantes. M. Patricio fait observer que la question 1409 a été traitée dans la *Revue de mathématiques spéciales*, t. II, p. 248 et peut être étendue à la cissoïde oblique.

×Question 1424.

(Voir *Mathesis*, (3) III; p. 1424.)

Soient A', B', C' *les centres des carrés* BCED, ACFG, ABKH *construits extérieurement sur les côtés d'un triangle quelconque. Démontrer que le centre de gravité de l'aire de l'hexagone* DEFGHKD *est situé sur la droite qui joint le centre de gravité et le point de* Lemoine du triangle A'B'C'.

(J. Neuberg)

Solution par A. Droz Farny. Représentons par T la surface des triangles équivalents ABC, AGH, BDK, CEF et par a_1, b_1, c_1 les côtés du triangle A'B'C'. On sait que $a_1^2 = \frac{b^2+c^2}{2} + 2T$, etc.

Supposons un système de forces parallèles et de même sens fixées aux différentes sommets de la figure : aux douze sommets des quatre triangles, une même force d'intensité $\frac{1}{3}$ T ; aux sommets du carré BCDE la force $\frac{1}{4}a^2$; aux sommets du carré ACFG, la force $\frac{1}{4}b^2$ et aux sommets du carré ABKH, la force $\frac{1}{4}c^2$; le centre d'application de toutes ces forces est le centre de gravité cherché.

Le système se compose évidemment suivant un nouveau système de trois forces : $a^2+\frac{4T}{3}$; $b^2+\frac{4T}{3}$; $c^2+\frac{4T}{3}$ fixées aux sommets A', B', C'.

Or

$$a^2+\frac{4T}{3} = \left(a^2+b^2+c^2+\frac{16T}{3}\right) - (b^2+c^2+4T)$$

$$= \left(a^2+b^2+c^2+\frac{16T}{3}\right) - 2a_1^2.$$

Les trois forces égales $\left(a^2+b^2+c^2+\frac{16T}{3}\right)$ se composent suivant une force unique fixée au centre de gravité du triangle A'B'C', qui est aussi le centre de gravité de ABC ; les trois forces de sens contraires $(-2a_1^2)$, $(-2b_1^2)$, $(-2c_1^2)$ ont pour centre d'application le point de Lemoine du même triangle. Le point d'application cherché de la résultante est donc bien sur la droite qui joint ces deux points et la divise

soustractivement suivant le rapport inverse des 2 résultantes partielles $(3a^2+3b^2+3c^2+16T)$ et $(2a^2+2b^2+2c^2+12T)$ ou dans le rapport $\frac{3\cot V+4}{2\cot V+3}$, V désignant l'angle de Brocard de ABC.

Autres solutions par MM. Bastin et Emmerich.

Question 1495.

(Voir *Mathesis*, (3) III, p. 152.)

Sur chaque corde d'une conique ayant une direction donnée, on décrit un cercle dont le diamètre est la corde. L'enveloppe de ces cercles est une conique ayant pour foyers les points de contact de la conique donnée avec les tangentes parallèles à la direction donnée. (E. N. Barisien.)

Solution par M. Haussner (Giessen). 1. Considérons d'abord le cas où la conique donnée est une ellipse et prenons pour axes coordonnés le diamètre AA′ conjugué avec les cordes de la question et la tangente Ay en l'une de ses extrémités. L'équation de la courbe sera

$$y^2 = 2px + qx^2, \quad (q<0). \tag{1}$$

Soient (x_0, y_0) les coordonnées d'un point M de l'ellipse. Si l'on conserve l'axe des abscisses et que l'on prenne l'axe Ay′ perpendiculaire à AA′, la circonférence qui a pour diamètre la corde MM′ parallèle à Ay aura pour équation

$$(x-x_0)^2+y^2 = 2px_0+qx_0^2, \tag{2}$$

ou, en ordonnant par rapport au paramètre variable x_0,

$$(1-q)x_0^2 - 2q(x+p)x_0 + x^2+y^2 = 0. \tag{3}$$

L'équation de l'enveloppe s'obtient en exprimant que l'équation (3) admet deux racines égales pour x_0; on trouve

$$(x^2+y^2)(1-q) = (x+p)^2. \tag{4}$$

De la forme de ce résultat on conclut immédiatement que l'enveloppe est une ellipse qui a pour foyer l'origine A, pour directrice la droite $x+p=0$, pour excentricité numérique $\frac{1}{\sqrt{1-q}}$.

2. Si la courbe donnée est une parabole, on a $q=0$. Les calculs

précédents sont encore applicables, et l'équation (4) se réduit à

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

L'enveloppe est donc une parabole qui a pour sommet le point $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$.

3. Les calculs précédents s'appliquent également à une hyperbole lorsque les cordes sont parallèles à un diamètre imaginaire. On a maintenant $q > 0$. Si $q < 1$, l'équation (4) représente une hyperbole ayant pour excentricité numérique $\frac{1}{\sqrt{1-q}}$. A est encore un foyer, et la droite $x + p = 0$ la directrice. Dans le cas où la conique donnée est une hyperbole équilatère, on a $q = 1$, et l'équation (3) se réduit à

$$x^2 + y^2 - 2(x + p)x_0 = 0;$$

les cercles considérés forment un faisceau ayant pour axe radical la droite $x = -p$; cet axe les rencontre en des points imaginaires.

Si $q > 1$, l'enveloppe est imaginaire.

4. Si les cordes sont parallèles à un diamètre réel d'une hyperbole, prenons ce diamètre pour axe des y, et son conjugué pour axe des x; soit alors

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

l'équation de la courbe. Représentons par (x_0, y_0), $(x_0, -y_0)$ les coordonnées des extrémités M, M′ de l'une des cordes.

Si on remplace maintenant l'axe des y par le diamètre de l'hyperbole perpendiculaire à l'axe des x, l'équation du cercle de diamètre MM′ sera

$$(x - x_0)^2 + y^2 = y_0^2 = \frac{b^2}{a^2}x_0^2 + b^2$$

ou

$$(a^2 - b^2)x_0^2 - 2a^2xx_0 + a^2(x^2 + y^2 - b^2) = 0. \qquad (5)$$

Celle de l'enveloppe sera

$$a^2x^2 = (a^2 - b^2)(x^2 + y^2 - b^2);$$

ou

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2 - b^2} = 1.$$

Si $a > b$, on a une hyperbole dont l'axe réel s'obtient en faisant tourner le diamètre conjugué avec les cordes jusqu'à le rendre perpendiculaire à l'axe des x. Dans le cas d'une hyperbole équilatère, l'hypothèse $a = b$ réduit l'équation (5) à

$$x^2 + y^2 - a^2 - 2xx_0 = 0.$$

Les cercles considérés forment un faisceau passant par deux points fixes $(0, \pm a)$. Enfin, si $a < b$, l'enveloppe cherchée est une ellipse.

Note. Des solutions exactes, mais moins simples et moins complètes, nous ont été adressées par MM. Abramescu, Bastin, Claeys, Couvert, Dalle, Emmerich et Rose. Pour déterminer les foyers de l'enveloppe, en coordonnées obliques, la plupart de nos correspondants se sont servis des *hyperboles de Plücker* représentées par les équations

$$4(A - C) f(x, y) - f'^2_y + f'^2_x = 0,$$
$$4(B - A\cos\theta) f(x, y) - f'_x f'_y + f'^2_y \cos\theta = 0.$$

M. Emmerich a transformé l'équation de l'enveloppe en coordonnées polaires, ce qui lui a donné une équation de la forme

$$r = \frac{p}{1 + k\cos\theta}.$$

M. Claeys a considéré les extrémités A, A′ du diamètre conjugué avec les cordes variables comme deux cercles de rayon nul qui touchent l'enveloppe, d'où il a conclu que les points A, A′ sont des foyers.

La finale de la proposition de M. Barisien est encore exacte dans le cas où le diamètre conjugué avec les cordes variables est imaginaire : car l'ellipse a deux foyers imaginaires sur le petit axe, et l'hyperbole en a sur l'axe non transverse ; ces foyers ont, dans la question actuelle, les mêmes coordonnées que les extrémités imaginaires du diamètre en question. La vérification analytique de cette conclusion se fait facilement sur l'équation (5).

Une autre remarque, due à Steiner, est la suivante : Parmi les cercles variables, il y en a qui touchent l'enveloppe en des points imaginaires. Elle se démontre très facilement lorsque les cordes considérées sont perpendiculaires à un axe d'une ellipse.

MM. Couvert et Lez en traitant le problème pour une ellipse

rapportée à ses axes de symétrie ont trouvé pour l'équation de l'enveloppe

$$[a^2mx - b^2y)^2 - (a^2 + b^2)[(a^2m^2 + b^2)(x^2 + y^2) - a^2b^2(m^2 + 1)] = 0,$$

m désignant le coefficient angulaire des cordes mobiles. En cherchant l'enveloppe de cette enveloppe lorsque m varie, M. Couvert obtient

$$(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)(x^2 + y^2 - a^2 - b^2) = 0,$$

c'est-à-dire la conique donnée et son cercle de Monge. Le cercle est le lieu des sommets de l'axe focal de la conique variable. Cet axe a donc une longueur constante $2\sqrt{a^2 + b^2}$.

La même conclusion peut se déduire des équations (4) et (5). (J. N.)

Remarques par M. Droz-Farny. Ce théorème a été énoncé, je crois, pour la première fois par Carl Pelz, géomètre autrichien.

Dans sa *Géométrie descriptive* (11e leçon, page 125), M. Mannheim en donne une démonstration géométrique, en considérant la conique comme la perspective cavalière du contour apparent d'une sphère.

Enfin, dans le *Journal de Math. spéciales* de M. de Longchamps, 1892, p. 129, on en trouve une belle démonstration géométrique directe par M. A. Boulanger, professeur à Lille.

Ce théorème a été le sujet d'une composition au concours d'agrégation de l'enseignement spécial en 1881.

M. Déprez nous a adressé une solution très complète de la même question et l'a accompagnée des remarques qui vont suivre.

Généralisation. Nous avons cherché (*Mathesis*, (1), IX, p. 167) l'enveloppe des circonférences Δ qui ont pour diamètres les cordes d'une conique Γ menées par un point fixe P quelconque.

L'équation du cercle mobile est de la forme

$$\lambda^2 S_1 + 2\lambda S_2 + S_3 = 0,$$

où $S_1 = 0_1$, $S_2 = 0_2$, $S_3 = 0$, sont les équations de trois cercles fixes et λ un paramètre variable.

L'enveloppe du cercle a pour équation

$$S_2^2 = S_1 S_3.$$

C'est une quartique bicirculaire si (T) est une conique à centre.

Dans le cas particulier où la conique (Γ) est un cercle, la quartique est une cartésienne.

Si la conique (Γ) est une parabole, l'enveloppe est une cubique circulaire.

Si le point P est situé sur (Γ), l'enveloppe sera une podaire de conique à centre, une cissoïdale ou une cardioïde suivant que (Γ) est une conique à centre, une parabole ou un cercle.

×Question 1430.

(Voir *Mathesis*, (3); III, p. 184.)

Parmi tous les quadrilatères ABCD, *plans ou gauches, déterminer ceux pour lesquels on a*, M *désignant un point quelconque de l'espace*,

$$\overline{MA}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MD}^2 \qquad (1)$$

(École Militaire, Armes spéciales; Examens oraux.)

Solution par M. Emmerich. E, F étant les milieux de AC, BD respectivement, la relation (1) donne

$$4\overline{ME}^2 + \overline{AC}^2 = 4\overline{MF}^2 + \overline{BD}^2,$$

ou

$$4(\overline{ME}^2 - \overline{MF}^2) = \overline{BD}^2 - \overline{AC}^2.$$

Si E et F sont différents, la différence $\overline{ME}^2 - \overline{MF}^2$, où M désigne un point quelconque de l'espace, ne peut être constante.

Il faut donc que E et F coïncident, ce qui entraîne BD = AC. La condition de l'énoncé n'est donc remplie que par un quadrilatère à diagonales égales et dont les milieux coïncident, c'est-à-dire par un rectangle.

Si le quadrilatère ABCD est quelconque, abaissons la perpendiculaire MN sur EF, et soit G le milieu de EF. Comme

$$\overline{ME}^2 - \overline{MF}^2 = \overline{NE}^2 - \overline{NF}^2 = 2EF.NG,$$

la condition (1) se transforme en

$$8EF.NG = \overline{BD}^2 - \overline{AC}^2; \qquad (2)$$

par suite, le lieu du point M est le plan perpendiculaire à EF et passant au point N défini par la relation (2). La distance GN est dirigée vers F ou vers E suivant que BD > AC ou BD < AC.

Si le quadrilatère ABCD est un parallélogramme scalène, le point M se transporte au plan de l'infini.

M. Plakhovo rapproche la question 1430 de la solution donnée par M. Neretzu et par M. Fontené d'un théorème énoncé par M. Mannheim (voir J. M. E. de Longchamps, 1896, pp. 24 et 141; BME de Niewenglowsky et Gérard, 1901-02.)

Question 1458.

(Voir *Mathesis*, (3), IV, p. 56.)

Soient M, M' *deux points d'une parabole symétriques par rapport à l'axe. En un point quelconque* P *de la courbe on élève sur la corde* PM *une perpendiculaire, qui rencontre en* Q *le diamètre mené par* M'. *Démontrer que la projection de* PQ *sur l'axe est constante.* (J. Neuberg).

Solution par MM. Janne, Retali et H. Lez. Soient C, D les points où les diamètres par M, M' rencontrent l'ordonnée PN du point P. Les triangles semblables CPM, DQP qui ont leurs côtés perpendiculaires donnent

$$PC.PD = MC.DQ, \text{ ou } \overline{PN}^2 - \overline{MB}^2 = (AN - AB)\,DQ,$$

MB étant l'ordonnée de M. Or $\overline{PN}^2 = 2p.AN$, $\overline{MB}^2 = 2p.AB$; d'où l'on déduit facilement $DQ = 2p$.

Solution par MM. Paulmier, Barisien, Ots, F. Dupont (Liége), Arramescu, Rius y Casas, Couvert, Rose, Desprets, Droz-Farny, Retali, Erélav Sram et Patriciu. Soient (α, β), (α', β') les coordonnées des points M, P; on trouve facilement, pour l'équation de la droite PQ,

$$y - \beta' = -\frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \beta'}(x - \alpha'),$$

ou, en remplaçant α et α' par leurs valeurs déduites de $\beta^2 = 2p\alpha$, $\beta'^2 = 2p\alpha'$,

$$y - \beta' = -\frac{\beta + \beta'}{2p}(x - \alpha'). \qquad (1)$$

Le diamètre M'Q a pour équation $y = -\beta$; en faisant $y = -\beta$ dans l'équation (1), on trouve l'abscisse de Q. Il vient $x - \alpha' = 2p$; or $x - \alpha'$ est la projection de QP sur l'axe Ox, donc etc.

Solution par M. Déprez et Droz-Farny. Le quadrilatère inscriptible MM'QP a son centre au milieu O de la droite MQ sur l'axe de la parabole; la perpendiculaire au milieu N de la corde MP passant par D, on a

NO $= \frac{1}{2}$ PQ, de sorte que la projection de PQ sur l'axe est double de celle de NO. Mais si le diamètre mené par N coupe la parabole en R et que la normale en R rencontre l'axe en S, on a NO = RS. Il résulte de là que la projection de PQ sur l'axe est double de la sous-normale menée en R, donc égale à $2p$.

Remarques (dues à M. Dupont). I. Si l'on fait coïncider P avec M, PQ devient la normale en M, et on retrouve la propriété de la sous-normale.

II. Si l'on fait coïncider les points M, M' avec le sommet de la parabole, la question 1458 résulte immédiatement de l'équation $y^2 = 2ps$.

III. La question 1458 détermine le paramètre d'une parabole dont on donne l'axe et deux points quelconques M, P. Soient P_1, Q_1 les projections de P, Q sur l'axe; la perpendiculaire en P sur la droite PQ_1 coupe l'axe au sommet de la parabole.

M. Emmerich a résolu la même question par la géométrie projective.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1149. Si deux circonférences se coupent à angle droit en A et B et que par le centre de la première on mène une sécante coupant l'autre en M et N; si l'on joint M au milieu C de la corde commune AB et si cette droite coupe encore la seconde circonférence en P, démontrer que NP est parallèle à AB.

O étant le centre de la première et O' celui de la seconde,

$$CP.CM = CA.CB = \overline{CA}^2 = CO.CO',$$

donc OPO'M est inscriptible et l'angle OMP = OO'P.

Mais OMP a pour mesure $\frac{NMP}{2}$ et, si D est le point où OO' coupe la circonférence O', OO'P a pour mesure DP, donc DP $= \frac{NMP}{2}$ et D est le milieu de NMP, etc. (M. Stuyvaert).

1150. Si, sur un même axe, on a trois couples de points en involution représentés par les équations respectives

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0, \quad a''x^2 + b''x + c'' = 0, \quad (1)$$

le déterminant $(ab'c'')$ est nul et, en appelant A, ... B', ... C'' les mineurs de ce déterminant, l'involution peut se représenter par

l'équation

$$Cyz - B(y+z) + A = 0,$$

ou par deux égalités analogues.

Une involution est définie par une équation de la forme

$$Cyz - B(y+z) + A = 0, \qquad (2)$$

où y, z sont les valeurs des paramètres caractérisant deux points conjugués.

Soient (y', z'), (y'', z''), y''', z''') les racines des équations (1); nous aurons

$$Cy'z' - B(y'+z') + A = 0, \quad Cc + Bb + Aa = 0, \qquad (3)$$
$$Cc' + Bb' + Aa' = 0, \quad Cc'' + Bb'' + Aa'' = 0. \qquad (4)$$

Si l'on élimine A, B, C entre (3) et (4), on trouve $(ab'c'') = 0$. Des mêmes équations on conclut aussi que A, B, C, sont proportionnels aux mineurs qui correspondent aux éléments a, b, c ou a', b', c' ou a'', b'', c'' du déterminant $(ab'c'')$.

1151. Former l'équation la plus générale qui ait pour racines les six valeurs du rapport anharmonique de quatre points.

Vérifier que l'équation

$$(1 - x + x^2)^3 = m(1+x)^2 (2-x)^2 (1-2x)^2$$

appartient à ce type.

Il suffit de former une équation du sixième degré qui reste inaltérée quand on remplace x par $\frac{1}{x}$ ou par $1-x$. On obtient

$$x^6 - 3x^5 + ax^4 + (5-2a)x^3 + ax^2 - 3x + 1 = 0.$$

Pour l'exemple cité dans l'énoncé, on vérifie sans peine que les deux substitutions de $\frac{1}{x}$ et de $1-x$ à x conservent l'équation (Cet exemple est tiré de Halphen, *Fonctions elliptiques*, II, p. 342).

(M. Stuyvaert)

1152. Résoudre le système d'équations

$$\frac{1}{x+a}\cdot\frac{1}{y+b} + \frac{1}{x+b}\cdot\frac{1}{y+a} + \frac{1}{x+a}\cdot\frac{1}{x+b} = 0,$$
$$\frac{1}{x+a}\cdot\frac{1}{y+b} + \frac{1}{x+b}\cdot\frac{1}{y+a} + \frac{1}{y+a}\cdot\frac{1}{y+b} = 0.$$

Les équations s'écrivent

$$y^2 + 2xy + (2y+x)(a+b) + 3ab = 0,$$
$$x^2 + 2xy + (2x+y)(a+b) + 3ab = 0.$$

Par soustraction et en divisant par $x-y$, on a

$$x + y = -(a+b).$$

Par addition, on a

$$(x+y)^2 + 2xy + 3(x+y)(a+b) + 6ab = 0,$$

et, en tenant compte de l'avant-dernière,

$$xy = (a+b)^2 - 3ab.$$

Donc x et y sont racines de l'équation

$$z^2 + (a+b)z + (a+b)^2 - 3ab = 0.$$

Le discriminant est

$$(a+b)^2 - 4(a+b)^2 + 12ab = -3(a-b)^2.$$

Donc, si a et b sont réels et inégaux, x et y sont toujours imaginaires.

En divisant par $x-y$, on a dû supposer $x \gtrless y$. Si, au contraire $x=y$, on a

$$3x^2 + 3x(a+b) + 3ab = 0,$$

d'où $x=y=-a$ ou $x=y=-b$. Mais ces valeurs ne conviennent pas aux équations proposées puisqu'elles annulent les dénominateurs.

(M. STUYVAERT.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

1469. Le centre C d'un cercle de rayon donné parcourt une droite donnée d. D'un point donné A on mène à ce cercle les tangentes AM, AM'. Trouver

a. L'enveloppe de la corde de contact MM';

b. Le lieu des points de contact;

c. Le lieu du milieu de la droite MM';

d. L'enveloppe des rayons CM, CM'. (J. NEUBERG.)

1470. Résoudre l'équation

$$\frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\cos x} = c,$$

sachant que $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$. (J. DÉPREZ.)

×1471. Construire un triangle connaissant un angle, la hauteur abaissée du sommet de l'angle sur le côté opposé, et la somme des deux autres côtés.

On demande une solution purement géométrique.

1472. Intégrer le système

$$\frac{dx}{dt} = y + x\varphi't, \quad \frac{dy}{dt} = x + y\varphi't. \qquad \text{(ABRAMESCU).}$$

Rectifications. P. 74, ligne 1, lire : *Solution par* MM. EMMERICH *et* DÉPREZ.

P. 75, ligne 21, lire : $V = \frac{1}{3} 2r^2 \sin A \sin B \sin C.4\rho =$

DEUX THÉORÈMES DE GRÉGOIRE DE St-VINCENT,

par M. A. Aubry.

1. Tout le monde connaît la belle démonstration géométrique donnée par Quetelet et Dandelin de l'identité des sections du cône droit avec les courbes du second degré définies par les propriétés de leurs rayons vecteurs, démonstration qui, ainsi que l'a dit Ollivier, est comme un reflet de la géométrie antique. On connaît beaucoup moins celle que, deux cents ans auparavant un autre géomètre belge, Grégoire de St-Vincent avait donnée pour l'hyperbole et qui a l'avantage de s'appliquer à un cône circulaire quelconque (*Opus geometricum*, pp. 540-541). Le marquis de l'Hospital l'a présentée simplement ainsi :

Par les deux génératrices parallèles à un plan sécant A, menons au cône deux plans tangents dont les intersections avec le plan sécant seront appelées a, b. Un plan quelconque parallèle à la base du cône rencontre le plan sécant A suivant une droite qui coupe a en α et le cône en M et N. On s'assure facilement que $\alpha M.\alpha N =$ constante. C. Q. F. D.

2. C'est à Grégoire de St-Vincent qu'est due la découverte de la quadrature de l'hyperbole au moyen des logarithmes, ou du moins, de son équivalent, que voici : *les abscisses de l'asymptote* OA′, OB′,... *croissant en progression géométrique, les trapèzes hyperboliques* AA′B′B, BB′C′C,... *croissent en progression arithmétique.* Ce théorème est la conséquence immédiate du lemme suivant :

Les abscisses OA′, OB′, OC′ *de trois points* A, B, C, *étant en progression géométrique, le diamètre* OB *correspondant au point du milieu, coupe en deux parties égales la corde* AC, *et par suite les deux segments* AB, BC *sont égaux.* De ce lemme, on déduit en effet que les trapèzes AB′, BC′ sont égaux, de même par conséquent que les trapèzes mixtilignes désignés par les mêmes lettres (Voir *Op. g.* pp. 583 et sq.)

3. La démonstration que donne Grégoire de St-Vincent de l'égalité des segments AB et BC est bien propre à faire sentir la différence des méthodes infinitésimales des anciens, ou *méthode d'exhaustion*, et de celle des modernes.

Il appelle *triangle maximum inscrit* dans le segment AB celui dont le sommet S est au point de contact de la tangente parallèle à AB. Ce

triangle est plus grand que la moitié du segment, comme on le voit immédiatement en circonscrivant à ce dernier un parallélogramme.

Les triangles maxima ASB, BTC, inscrits dans les segments AB, BC sont égaux, de même que ceux inscrits dans les quatre segments AS, SB, BT, TC; et ainsi de suite.

Supposons que le segment AB surpasse le segment BC d'une surface Ω. Euclide a fait voir que si d'une quantité donnée on retranche sa moitié ou plus de sa moitié; si du reste on retranche sa moitié ou plus de sa moitié etc.; on arrivera à un reste plus petit qu'une quantité donnée. Donc, en retranchant des segments AB, BC les triangles inscrits dans ces segments, puis ceux inscrits dans les segments AS, SB, BT, TC, et ainsi de suite, on arrivera à deux restes dont le plus grand sera inférieur à Ω : les segments AB, BC différeraient donc d'une surface plus petite que Ω, ce qui est contre l'hypothèse. Par conséquent ces deux segments sont égaux.

4. Le marquis de l'Hospital, qui reproduit également ce théorème, démontre le lemme par la considération des infiniment petits, comme nous le ferions aujourd'hui :

Menons à AC deux parallèles voisines, qui interceptent dans les segments les trapèzes mixtilignes MPP'M', NQQ'N' : or, ceux-ci sont égaux, en en retranchant les segments MM', NN', qui sont infiniment petits par rapport à eux. Il suit de là que les deux segments AB, AC sont équivalents.

L'Hospital tire de là une méthode fort simple de mener une tangente à une conique en un point donné M. On tire les cordes quelconques MA, MB; puis AC parallèle à MB et BD, parallèle à MA : la corde CD est parallèle à la tangente cherchée.

5. C'est Grégoire de St-Vincent qui a entrevu le premier l'osculation des courbes. Il propose en effet ces deux problèmes : In data ellipsi circulum describere maximum eorum qui ellipsim in termino axis contingunt et ab ellipsi comprehendantur. » et « In data parabola axe punctum assignare quo centro circulus describatur maximus illorum, qui parabolam intus in uno tantum contingunt puncto. » Il donne la construction des cercles osculateurs aux extrémités des axes de l'ellipse et de la parabole et les justifie. (*Op. geom.* pp. 314 et 420). Ces questions peuvent avoir été mises à profit par Huygens.

EXERCICES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

1. *Construire un triangle* ABC, *connaissant* b, c *et le rapport* m *de la hauteur* AA′ *au côté* a.

1° Prenons le côté $AC = b$; le point A′ se trouve sur la circonférence de diamètre AC. Si l'on trace une corde quelconque AA_1 de cette circonférence et que sur la corde perpendiculaire CA_1 on porte une longueur $CB_1 = \frac{1}{m} CA_1$, le lieu de B_1 est la circonférence qui a pour diamètre la perpendiculaire CD élevée en C sur AC et égale à $\frac{1}{m} \cdot CA$. Le point B s'obtient maintenant par l'intersection de la circonférence (B_1) avec la circonférence (A, c).

2° Sur une base quelconque B′C′ construisons un triangle A′B′C′ semblable à ABC. Le sommet A′ se trouve d'abord sur une parallèle à B′C′ à la distance $m.B'C'$; il appartient aussi à la circonférence qui a pour diamètre la distance des points qui divisent B′C′ harmoniquement dans le rapport $c : b$. Etc.

3° $$b^2 = a^2 + c^2 \mp 2a\sqrt{c^2 - m^2a^2},$$

d'où $$(1 + 4m^2)a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2 = 0.$$

Cette équation donne deux valeurs réelles de a pourvu que l'on ait $m^2 < \frac{b^2c^2}{(b^2 - c)^2}$. Cette condition résulte aussi des solutions 1° et 2°.

4° L'angle A pourrait se déduire des équations

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad ak = bc \sin A, \quad a = mk.$$

En divisant la première égalité par la seconde on trouve

$$m \sin A + 2 \cos A - \frac{b^2 + c^2}{bc} = 0,$$

équation qu'on résout facilement en posant $\frac{m}{2} = \cot \varphi$.

2. *Soient* A′, B′, C′ *les milieux des côtés du triangle* ABC. *Des points* A, B, C, *comme centres, avec un même rayon* ρ, *on décrit trois circonférences qui rencontrent respectivement les droites* B′C′, C′A′, A′B′ *aux couples de points* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. *Démontrer que ces six points sont*

situés sur une même circonférence ayant pour centre l'orthocentre H *de* ABC.

(G. Majcen, à Agram ; NAM, 1903, p. 195. Steiner, *Ges. W.*, I, 345).

En effet, si la hauteur AH coupe BC en D et B'C' en E, on a

$$\overline{AA_1}^2 - \overline{HA_1}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{HE}^2 = (AE + EH)(AE - EH) = AH.HD.$$

Or, le produit AH.HD est égal aux produits analogues relatifs aux hauteurs BH, CH ; il en résulte $HA_1 = HB_1 = HC_1$.

Si les circonférences (A, ρ), (B, ρ), (C, ρ) ne rencontrent pas les côtés opposés de A'B'C', le théorème peut être énoncé ainsi : Il existe une circonférence, de centre H, telle que son axe radical par rapport aux circonférences (A, ρ), (B, ρ), (C, ρ) coïncide respectivement avec B'C', C'A', A'B'.

3. *Par le sommet* A *d'un triangle* ABC, *on mène une antiparallèle* AA' *à* AB *dans l'angle* ACB. *Démontrer que le produit des trois droites analogues à* AA' *est égal à abc.* (Barisien).

4. *L'aire du triangle qui a pour sommets les milieux* A'', B'', C'' *des symédianes* AA', BB', CC' *du triangle* ABC *a pour expression*

$$\frac{a^2b^2c^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}S.$$

(Barisien).

Les points A'', B'', C'' divisent les côtés du triangle qui a pour sommets les milieux A_1, B_1, C_1 de BC, CA, AB, dans les rapports inverses de ceux des segments déterminés par A', B', C' sur BC, CA, AB. Or, deux triangles inscrits à ABC, dont les deux sommets situés sur un même côté de ABC sont symétriques par rapport au milieu de ce côté sont équivalents ; donc $A''B''C'' = \frac{1}{4} A'B'C'$. De plus, si les sommets d'un triangle divisent BC, CA, AB dans les rapports $l : l'$, $m : m'$, $n : n'$, sa surface est

$$\frac{lmn + l'm'n'}{(l+l')(m+m')(n+n')}S, \quad \text{etc.}$$

5. *On considère une droite fixe limitée* AB, *un point* M *variable sur* AB, *et on décrit les cercles de diamètres* AM *et* MB, *qui sont touchés en* P *et* Q *par une des tangentes communes extérieures à ces deux cercles. Lieu du point de concours* R *des droites* AP, BQ.

La figure PMQR est un rectangle, etc.

Remarque. Le milieu I de PQ décrit une ellipse.

8. *L'angle* BAC *d'un triangle variable* ABC *est fixe, et le centre* O *du cercle circonscrit parcourt une droite d. Trouver le lieu de l'orthocentre* H.
(*Gazeta Matematica* de Bucarest, VIII, p. 178).

La circonférence O passe constamment par le symétrique F de A par rapport à *d*. Si α, β, γ sont les projections de F sur BC, CA, AB, la *droite de Simson* $\alpha\beta\gamma$ est fixe et passe au milieu de FH ; donc le point H décrit une parallèle à $\alpha\beta$.

Remarque. BC enveloppe la parabole de foyer F et ayant pour tangente au sommet $\beta\gamma$.

9. *On considère, sur une circonférence donnée* O, *deux points fixes* B, C *et un point variable* A. *Soient* B', C' *les pieds des hauteurs* BH, CH. *Trouver le lieu du centre* O' *du cercle* AB'C', *celui de l'orthocentre* H' *et du centre de gravité* G' *du triangle* AB'C'. (*Journal de Vuibert.*)

Les triangles AB'C', ABC sont symétriquement semblables ; le rapport de similitude, égal à AB' : AB = cos A est constant. O' étant le milieu de AH et M désignant le milieu de BC, on a AO' = OM, d'où MO' = OA ; par suite, le lieu de O' est une circonférence de centre M. — H' est sur AO et AH' = AH cos A = 2OM cos A ; le lieu de H' est une circonférence de centre O. — Les tangentes en B et C se coupant en D, AD est la symédiane de ABC et est dirigée suivant la médiane AG' de ABC, et l'on a : AG' = AG cos A = $\frac{2}{3}$ AM cos A.

Les deux triangles ABM, ADC ont les angles BAM = DAC, ABM = π — ACD ; donc les côtés opposés à ces angles sont proportionnels, par suite AD : AM = CD : BM = CD : MC = 1 : cos A ; on en conclut AD : AG' = 3 : 2 cos² A. Le lieu de G' est donc homothétique à la circonférence O par rapport à D.

Remarque. La droite B'C', égale à a cos A, est une corde de longueur constante dans la circonférence de diamètre BC ; donc elle enveloppe une circonférence de centre M. (Barisien).

10. *On donne deux droites rectangulaires* OX, OY, *et un cercle* I *de rayon r tangent en* A *à* OX (OA = a).

1° *On prend sur* OX *un point* E(OE = h), *on mène par* E *la seconde tangente au cercle* I, *cette tangente coupe* OY *en* F ; *calculer la longueur* OF.

2° *Déduire du calcul précédent que si d'un point quelconque* P *pris sur*

OY, *on mène les tangentes au cercle* I, *ces tangentes rencontrent* OX *en* C *et* D *tels que l'on ait*

$$OC.OD - \frac{a^2 - r^2}{a}(OC + OD) + a^2 - r^2 = 0. \qquad (1)$$

3° *Où faut-il placer le point* P *pour que* CD *ait une longueur donnée* l. (*Bacc. lettres-math.*, Clermont, nov. 1902).

1° Si OF $= y$, l'égalité OEF = IOE + IEF + IFO donne

$$ky = kr + r\sqrt{k^2 + y^2} + ay;$$

en rendant cette équation rationnelle et en écartant la racine $y = 0$ qui correspond à la tangente fixe EO, on trouve

$$y[(k - a)^2 - r^2] = 2rk(k - a). \qquad (2)$$

2° Si y est donné, on a deux valeurs k_1, k_2, satisfaisant à l'équation (2). En écrivant

$$k_1 + k_2 = \frac{2a(y - r)}{y - 2r}, \quad k_1 k_2 = \frac{y(a^2 - r^2)}{y - 2r}, \qquad (3)$$

puis éliminant y entre les égalités (3), on trouve la relation proposée.

3° On doit avoir

$$l^2 = (k_1 - k_2)^2 = (k_1 + k_2)^2 - 4k_1k_2$$
$$= \frac{4a^2(y - r)^2 - 4y(a^2 - r^2)(y - 2r)}{(y - 2r)^2}, \text{ etc.}$$

Remarque. A une valeur donnée de k correspond une seule valeur de y, mais à une valeur donnée de y correspondent deux valeurs de k. Par suite, la relation entre y et k est de la forme

$$y(Ak^2 + Bk + C) = (A'k^2 + B'k + C').$$

On peut déterminer les coefficients A, B, C, A′, B′, C′ en choisissant des positions *favorables* des points E et F. Si l'on considère les deux tangentes parallèles à OY, on a $k = a - r$ ou $a + r$ et $y = \infty$; donc $Ak^2 + Bk + C$ s'annule pour $k = a - r$ et pour $k = a + r$. On peut donc prendre pour coefficient de y l'expression $(k - a + r)(k - a - r) = (k - a)^2 - r^2$. De même on a $y = 0$ pour $k = 0$ et pour $k = a$, de sorte que $A'k^2 + B'k + C' = A'k(k - a)$. Pour trouver A′, on considère la tangente parallèle à OX qui correspond à $k = \infty$, $y = 2r$.

Il est encore facile de voir que h_1 et h_2 sont liés par une équation symétrique

$$h_1h_2 + M(h_1 + h_2) + N = 0$$

et de déterminer M et N au moyen des deux couples de tangentes parallèles à OY ou issues de O.

NOTES MATHÉMATIQUES.

16. ***Somme des produits k à k des termes successifs d'une progression arithmétique.*** Dans une progression arithmétique, faisons le produit des $k+1$ premiers termes et le produit des termes du second au $(k+2)^{me}$. Soustrayons le premier produit du second : k facteurs sont communs. Si donc nous désignons la raison par r et le premier terme par $a+(m-1)r$, nous obtenons

$$[a+mr]\,[a+(m+1)r]\cdots[a+(m+k-1)r]\,[a+(m+k)r]$$
$$-[a+(m-1)r]\,[a+mr]\cdots[a+(m+k-2)r]\,[a+(m+k-1)r]$$
$$=(k+1)r\,[a+mr]\cdot\cdot[a+(m+k-2)r]\,[a+(m+k-1)r].$$

Faisons successivement $m=1, 2, 3, \cdots \mu$, additionnons et réduisons :

$$\frac{1}{(k+1)r}\{[a+\mu r]\,[a+(\mu+1)r]\cdots[a+(\mu+k)r]$$
$$-a(a+r)(a+2r)\cdots(a+kr)\}$$
$$=\sum_{m=1}^{m=\mu}[a+mr]\,[a+(m+1)r]\cdots[a+(m+k-1)r].$$

Exemples. I. Chercher $S=1.2+2.3+\cdots n(n+1)$. On a

$$a=0,\quad r=1,\quad k=2,\quad \mu=n,$$
$$S=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

II. Trouver $S'=1.3.5+3.5.7+\cdots+(2n+1)(2n+3)(2n+5)$. On a

$$a=-1,\quad r=2,\quad k=3,\quad u=n+1,$$
$$S'=\tfrac{1}{8}[(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)+1.3.5].$$

(M. Stuyvaert.)

17. ***Aire du trapèze.*** Voici une ancienne démonstration intuitive de l'aire du trapèze : Soient AB, DC les bases d'un trapèze ABCD. Prolon-

geons AB de BE = DC et DC de CF = AB, et menons la droite EF. La figure AEFD sera un parallélogramme, composé de deux trapèzes égaux ABCD, FCBE; donc tout trapèze est la moitié du parallélogramme qui a même hauteur que le trapèze et une base égale à la somme des bases du trapèze.

Soient G, K les milieux de AD, EF; la droite GK passe par le milieu H de BC, et les lignes homologues GH, HK des trapèzes égaux ABCD, FCBE sont égales; d'où $GH = \frac{1}{2}(AB + DC)$.

18. ***Sur la question de géométrie analytique du concours général de 1903.*** (Voir ***Mathesis***, (3) IV, p. 61). Prenons OF pour axe polaire, le foyer F pour pôle. Soient (ρ, ω), (ρ_1, ω_1), (ρ_2, ω_2) les coordonnées des points P, M, N, et posons $k = \frac{1}{2}q$. On a

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1 + e\cos\omega_1}{p}, \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{1 + e\cos\omega_2}{p}, \quad 2\omega = \omega_1 + \omega_2.$$

La relation de l'énoncé peut s'écrire ainsi

$$1 + e\cos\omega\cos(\omega - \omega_1) = \frac{p}{q},$$

et l'équation de la tangente en M est

$$\frac{p}{\rho} - e\cos\omega - \cos(\omega - \omega_1) = 0.$$

Si l'on élimine ω_1 entre les deux dernières égalités, il vient pour l'équation du lieu (P) en coordonnées polaires

$$\rho[q(1 - e^2\cos^2\omega) - p] + pqe\cos\omega = 0,$$

et, en coordonnées cartésiennes,

$$a(q - p)y^2 + p(q - a)x^2 + pqcx = 0.$$

Le lieu est une conique dont un axe de symétrie est dirigé suivant OF, le foyer F de l'ellipse donnée est un sommet du lieu.

Discussion du lieu. On a

$$\delta = -4ap(q - p)(q - a),$$
$$\Delta = ac^2p^2q^2(q - p),$$
$$A\Delta = a^2c^2p^2q^2(q - p)^2;$$

on sait que δ permet de reconnaître le genre du lieu, $A\Delta$ détermine les variétés du genre de la conique; on sait aussi que la conique dégénère si le discriminant Δ est nul.

Cela étant, rangeons par ordre de grandeur croissante les valeurs de q (paramètre variable) qui annulent le binome caractéristique δ et le discriminant Δ :

$$q = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \infty .$$

1° $q = 0$; on a $\rho < 0$, $\Delta = 0$. Le lieu est le cercle point placé en F.

2° $q > o$ et $< p$; alors $\delta < 0$, $A\Delta > 0$. Le lieu est une ellipse réelle.

3° $q = p$; dans ce cas $\delta = 0$, $A = 0$. Le lieu est une parabole qui dégénère en deux droites parallèles, la directrice correspondante à F et la parallèle à la directrice menée par F.

4° $q > p$ et $< a$; dans cette hypothèse, $\delta > 0$, $A\Delta > 0$. Le lieu est une hyperbole qui rencontre l'axe OF.

5° $q = a$; on a $\delta = 0$, Δ n'est pas nul. Le lieu est une parabole.

6° $q > a$; alors $\delta < 0$, $A\Delta > 0$. Le lieu est une ellipse réel e.

(J. Déprez).

BIBLIOGRAPHIE.

Plans cotés. Cours de Géométrie descriptive de l'École militaire par F. Chomé, professeur à l'École militaire de Belgique. Deuxième partie (Plans cotés) à l'usage des élèves de l'enseignement supérieur. Bruxelles, Office de Publicité; Paris, Gauthier-Villars, 1904 (In-4° de VI-171 pages avec atlas in-4° de 36 planches). Prix : 10 francs.

I. Cet ouvrage tranche complètement sur tous ceux qui ont paru sur le même sujet et montre combien il était utile de reprendre attentivement l'étude d'un système de représentation qui n'a plus guère attiré l'attention des géomètres, depuis que Noizet en avait coordonné et perfectionné les éléments dans le *Mémorial de l'officier du génie* en 1823.

L'auteur donne une définition nouvelle et très générale de la Géométrie descriptive; il fait une distinction fort utile entre la *projection cotée* et le *plan coté* et propose une notation très simple pour les distinguer; il transporte dans les *plans cotés* toutes les méthodes qu'il a données pour les projections orthogonales dans la *Première Partie* de son *Cours de Géométrie descriptive;* il introduit partout, comme conclusions pratiques des théories, et conformément à la méthode constante qu'il a suivie dans ses autres ouvrages, des règles précises si nécessaires dans l'enseignement; il base toutes ses recherches analytiques sur la théorie des limites; il fait enfin une étude très attentive des *Surfaces d'égale pente* et des *Surfaces topographiques*, et montre par des exemples particulièrement bien choisis, aussi bien dans la théorie pure que dans les applications aux terrassements et aux sciences militaires, avec quelle facilité la méthode des *plans cotés* peut conduire aux résultats dans les questions les plus compliquées.

Nous devons signaler tout spécialement l'étude que fait l'auteur des problèmes qui se rapportent aux Surfaces topographiques : toutes les conventions tacite-

ment admises par tous les auteurs sont mises en évidence et bien des préjugés sont combattus. C'est ainsi qu'on est amené logiquement à condamner, comme absurdes et stériles, ces surfaces réglées de substitution que l'on considère généralement, à l'exemple de Noizet, entre les courbes de niveau consécutives.

La détermination, si importante dans un grand nombre de questions relatives au terrain, des parties vues et des parties cachées pour un point donné, est minutieusement et progressivement exposée en prenant pour exemple le terrain représenté sur une Planchette de la Carte au $\frac{1}{20000}$ de la Belgique. L'auteur met ici en pleine lumière la nécessité de donner pour le contour apparent d'une surface, une définition précise qu'il a déjà publiée en 1899, dans la Première Partie (Livre II) de son Cours de Géométrie descriptive et qui est très différente de celle que l'on trouve partout; la Planche 22 de l'Atlas est fort suggestive à cet égard.

Tout est à lire dans ce chapitre relatif aux *Surfaces topographiques*, mais nous y signalons encore les paragraphes où l'auteur s'occupe spécialement des *Lignes de plus grande pente*, des *Lignes des déclivités maxima et minima*, des *Thalwegs*, des *Lignes de faîte* et des *Crêtes militaires*.

Dans un dernier chapitre, l'auteur applique la représentation des Surfaces topographiques à la construction de quelques *Tableaux graphiques* qui sont d'un emploi journalier et très simple, et qui se construisent facilement sans initiation spéciale. C'est ainsi que l'on trouve dans l'ouvrage : 1° Un Tableau graphique permettant de passer du p °/₀ d'une solution au p °/₀ du dissolvant; 2° Un Tableau graphique servant à la résolution de l'équation trinôme du 3e degré; 3° Un tableau graphique relatif à l'emploi des poutrelles à double T; 4° Trois Tableaux graphiques relatifs à l'emploi des poutres en *sapin rouge*, en *sapin blanc* et en *chêne*.

Un appendice qui termine l'ouvrage donne les programmes détaillés de quatorze épures constituant des exercices extrêmement utiles et intéressants.

En résumé, l'ouvrage de M. Chomé se distingue par son ordonnance générale, par la valeur scientifique et pratique des théories et des méthodes; il contient beaucoup de renseignements qui se rattachent à un même ordre d'idées mais que l'on ne trouve pas réunis ailleurs; il constitue une œuvre didactique importante et nécessaire, qui vient à son heure et dont nous sommes heureux d'annoncer la publication.

II. *Sommaire*. Préface. Introduction (13 pages). 1. Généralités. 2. Des échelles. Ch. I (32 pages). Représentation du point, de la droite et du plan considérés isolément ou l'un par rapport à chacun des autres. 1. Du point(1). 2. De la droite. 3. Du plan. Ch. II (19 pages). Autres problèmes relatifs à la représentation des figures. 1. Généralités. 2. Applications relatives à la représentation des figures, aux sections planes faites dans les polyèdres, aux plus courtes distances et aux grandeurs angulaires. 3. Applications relatives aux courbes et aux

(1) Au n° 32, pp. 15-16, chacune des équations (14) (15) se rapporte à une courbe quelconque tracée sur la surface de niveau et non à la surface même, dans le sens habituel de ce mot *surface*; les équations (13) sont les équations aux dérivées partielles des surfaces de niveau. (*Rédaction.*)

surfaces. Ch. III (20 pages). Lignes et surfaces d'égale pente. 1. Généralités. 2. Talus naturel des terres, rampes. 3. Applications diverses. Ch. IV (62 pages). Surfaces topographiques. 1. Généralités. 2. Problèmes divers. 3. Lignes de plus grande pente d'une surface. 4. Lignes des déclivités maxima ou minima. Thalwegs et lignes de faite. Crête militaire. Ch. V (25 pages). Tableaux graphiques. 1. Généralités. 2. Exemples. 3. Anamorphose des Tableaux graphiques. Appendice (10 pages). Programme d'épures.

E. Cuvelier,
professeur à l'École militaire.

Leerboek der rekenkunde door N. L. W. A. Gravelaar. Eerste deel. Derde, verbeterde druk. P. Noordhoff, 1904, Groningen. Un vol. in-8° de VIII, 186 pages.

Les deux premières éditions de l'ouvrage de M. Gravelaar ont reçu chez nos voisins du nord l'accueil le plus favorable, et cette troisième édition de la première partie vaudra à l'auteur les mêmes éloges. Professeur à l'Ecole normale de l'Etat de Deventer, M. Gravelaar n'écrit pas pour les élèves de l'enseignement moyen, mais pour de futurs instituteurs déjà en possession de connaissances mathématiques très sérieuses. A la suite des meilleurs auteurs français et allemands, il traite son sujet d'une manière abstraite et des plus générales, essayant de constituer l'arithmétique entière avec la seule notion du nombre entier et les principes relatifs à l'addition des nombres entiers; c'est au tiers du volume qu'il expose, pour la première fois, le mécanisme des opérations effectuées dans la base dix.

Nous ne voudrions pas nous livrer ici à un travail de comparaison en décidant si M. Gravelaar a surpassé ses modèles ou s'il est resté en dessous d'eux, nous préférons dire qu'il s'en écarte parfois d'une manière assez originale. La position officielle du professeur de Deventer, le cachet personnel de ses idées, leur influence sur l'enseignement moyen en Hollande, rendent la lecture de son volume particulièrement intéressante. M. Gravelaar, faut-il le rappeler, est un des maîtres de l'histoire des mathématiques; aussi les notes historiques ajoutées en divers endroits de son travail en augmentent encore la valeur.

Voici un aperçu de la Table des matières :

1. Introduction. 2. Définitions des notions fondamentales. 3. Les sept opérations du calcul (c'est-à-dire l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation aux puissances, l'extraction des racines, l'emploi des logarithmes Les logarithmes sont considérés comme exposants et le calcul des radicaux est traité pour le seul cas où les nombres sont une puissance entière de la racine.) 4. De l'ordre successif des opérations. 5. Formes du calcul (Ces deux chapitres sont consacrés à l'écriture et aux algorithmes des opérations de l'arithmétique). 6. Formules remarquables (Décomposition en facteurs de $a^p - b^p$; expression du quotient $\frac{a^p - b^p}{a - b}$; développement de $(a + b)^p$, mais jusqu'à $p = 6$ seulement). 7. Égalités et inégalités. 8. Du zéro. 9. Grandeurs et quantités. 10. Notions historiques. 11. Des divers systèmes de numération. 12. Les quatre opérations fondamentales (addition, soustraction, multiplication, division) des nombres écrits dans la base dix. 13. Divisibilité. 14. Plus grand commun diviseur. 15. Plus petit commun multiple. 16. Nombres premiers. 17. Caractères de divisibilité. 18. Fractions. 19. Les sept opérations du calcul

appliquées aux fractions. 20. Égalités et inégalités des fractions. 21. Des fractions en général. 22. Les quatre opérations fondamentales (addition, soustraction, multiplication, division) des fractions décimales. 23. Conversion des fractions ordinaires en fractions décimales. 24. Conversion des fractions décimales en fractions ordinaires (Ces deux chapitres renferment une bonne théorie des fractions décimales périodiques). 25. Les quatre opérations fondamentales du calcul appliquées aux fractions décimales *périodiques* (Chapitre intéressant). 26. Passage d'une base de numération à une autre. 27. Proportions. 28. Mesures, poids et monnaies. H. Bosmans S. J.

Opgaven der Toepassing van de theorie der rekenkunde door N. L. W. A. Gravelaar. Eerste stukje. Tweede druk. P. Noordhoff, 1904, Groningen. Un vol. in-8° de IV, 92 pages.

Recueil de 880 problèmes se rapportant à l'ouvrage précédent. A la fin, l'auteur donne les résultats, mais sans ajouter les raisonnements. H. B.

Vorlesungen über graphische Statik von Dr. A. Föppl, Prof. a. d. technische Hochschule in München. Zweite Auflage. Leipzig, Teubner, 1908 (XII-471 pp. in-8°, cartonné). Prix : 10 marcs.

Ce volume constitue le second tome des *Vorlesungen über technische Mechanik* de l'auteur. La première édition de ce volume a été épuisée en deux ans; cela prouve que le compte rendu très-favorable que nous avions donné de cet ouvrage était justement mérité. La seconde édition diffère peu de la précédente. Signalons cependant un nouveau paragraphe où l'auteur donne une application intéressante de la méthode du changement des barres, à la détermination des tensions dans une coupole du système employé par M. Zimmermann dans la construction du palais du Reichstag. J. M.

Lezioni di Geometria metrico-projettiva par Burali-Forti, Professeur à l'Ecole militaire de Turin. Turin, Bocca frères, 1904. (In-8° de 308 pp.) Prix : Lire 8.

Sommaire. *Section* I (p. 1-83). I. Points; leurs sommes et leurs produits. II. Vecteurs; leurs sommes et leurs produits. III. Coordonnées cartésiennes. IV. Droites et plans perpendiculaires. V. Coordonnées cartésiennes rectangulaires. VI. Rotation dans le plan. VII. Quelques courbes.

Section II (p. 84-117). I. Réduction des formes géométriques. II. Eléments projectifs. III. Intersections. IV. Loi de dualité.

Section III (p 118-175). Rapport anharmonique. II. Homographie. III. Formes superposées. IV. Involution. V. Coniques.

Section IV (p. 176-246). I. Formes géométriques variables. II. Courbes gauches. Enveloppes de droites et de plans. III. Arc, flexion, torsion. IV. Surfaces réglées. V. Enveloppes et trajectoires d'un système de lignes. VI. Surfaces en général.

Section V (p. 247-303). I. Homographie en général. II. Collinéation. III. Polarité dans le plan et dans la gerbe. IV. Polarité dans l'espace.

L'auteur s'est proposé d'exposer, d'une manière systématique et facile, les principales propriétés métriques et projectives de la Géométrie qui se présentent dans des questions de Physique, de Mécanique et de Géométrie descriptive. Comme instrument de démonstration et de recherches il emploie systématiquement le *calcul géométrique* de Grassmann (Ausdehnungslehre). Y a-t-il un avantage réel à procéder ainsi dans un premier exposé de la science à des commençants? C'est une question sur laquelle nous ne voulons pas nous prononcer. L'essai de M. Burali-Forti est très curieux. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 1416.

(Voir *Mathesis*, (3); III; p. 104.)

On considère les hyperboles d'Apollonius d'un point fixe P ***par rapport aux coniques passant par quatre points fixes*** A, B, C, D. ***Démontrer que ces hyperboles ont, en outre du point*** P, ***trois points communs*** L, M, N ***situés sur la conique des neuf points du quadrangle*** ABCD; ***les droites*** PL, PM, PN ***sont tangentes à une même courbe de la troisième classe, indépendante de la position du point*** P ***et qui est la projection orthogonale (réelle ou imaginaire) d'une hypocycloïde à trois rebroussements.***

(A. Gob).

Solution partielle par M. Abramescu. Soit $f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = 0$, où

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$
$$\varphi(x, y) = A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0,$$

l'équation du faisceau de coniques circonscrites au quadrangle ABCD. Les pieds des normales menées du point $P(x_0, y_0)$ à ces coniques sont situés sur les hyperboles d'Apollonius du point P, dont l'équation est

$$\frac{x_0 - x}{f'_x + \lambda\varphi'_x} = \frac{y_0 - y}{f'_y + \lambda\varphi'_y},$$

ou

$$(x_0 - x) f'_y - (y_0 - y) f'_x + \lambda [(x_0 - x)\varphi'_y - (y_0 - y)\varphi'_x] = 0. \quad (1)$$

On voit ainsi que ces courbes forment un faisceau de coniques qui

---

(*) Nous avons oublié de signaler, p. 125, une bonne solution de la question 1456, par M. L. Schoentjes.

passent par le point P et par trois autres L, M, N appartenant aux deux coniques

$$(x_0 - x) f'_y - (y_0 - y) f'_x = 0 \qquad (2)$$

$$(x_0 - y) \varphi'_y - (y_0 - y) \varphi'_x = 0. \qquad (3)$$

La conique des neuf points, le lieu des centres des coniques, du faisceau donné, a pour équation

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}.$$

On vérifie facilement que les points L, M, N se trouvent sur cette courbe. En effet, le système des équations (2), (3) peut s'écrire

$$\frac{x_0 - x}{y_0 - y} = \frac{f'_x}{f'_y} = \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}.$$

Soient (u, v, w) les coordonnées de la droite PL, et x, y les coordonnées de L; nous aurons

$$ux_0 + vy_0 + w = 0, \qquad (4)$$

$$ux + vy + w = 0, \qquad (5)$$

$$\frac{x_0 - x}{y_0 - y} = \frac{f'_x}{f'_y} = \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}. \qquad (6)$$

De (4) et (5) on tire $u(x_0 - x) + v(y_0 - y) = 0$, ce qui permet d'écrire les équations (6) ainsi :

$$-\frac{v}{u} = \frac{f'_x}{f'_y} = \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y},$$

ou encore

$$u(Ax + By + D) + v(Bx + Cy + E) = 0, \qquad (7)$$

$$u(A'x + B'y + D') + v(B'x + C'y + E') = 0. \qquad (8)$$

Entre les équations (5), (7) et (8) éliminons les coordonnées (x, y) de L; il vient

$$\begin{vmatrix} Au + Bv & Bu + Cv & Du + Ev \\ A'u + B'v & B'u + C'v & D'u + E'v \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0. \qquad (9)$$

On voit que la droite PL enveloppe une courbe de la troisième classe indépendante de la position de P.

Question 1419.

(Voir *Mathesis*, (3) III, p. 128.)

Le lieu du centre d'une ellipse de grandeur donnée (demi-axes a et b), ***normale à deux droites rectangulaires fixes, est une sextique fermée. Evaluer l'aire de cette courbe.*** (A. H. Couvert.)

De bonnes solutions de cette intéressante question nous ont été remises par MM. Abramescu, Barisien, Lez et par M. Couvert lui-même; elles diffèrent l'une de l'autre par la manière de trouver l'équation du lieu. Comme le défaut d'espace nous empêche de les reproduire toutes, nous donnons ici une solution qui nous paraît être la plus simple et emprunte ses éléments à celles de nos honorables correspondants.

1. L'équation de la normale au point (x', y') de l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ peut s'écrire

$$\frac{a^2x}{x'} - \frac{b^2y}{y'} = c^2;$$

en l'identifiant avec l'équation

$$x\cos\delta + y\sin\delta = p,$$

on trouve

$$\frac{a^2}{x'\cos\delta} = -\frac{b^2}{y'\sin\delta} = \frac{c^2}{p}.$$

Tirons de là x' et y' en fonction de p et δ pour substituer les valeurs dans l'équation de l'ellipse et déduisons du résultat la valeur de p :

$$p = \frac{c^2\sin\delta\cos\delta}{\sqrt{a^2\sin^2\delta + b^2\cos^2\delta}}. \qquad (1)$$

Telle est la distance du centre C de l'ellipse à une normale qui fait avec l'axe de la courbe l'angle $\frac{\pi}{2} + \delta$.

2. Supposons maintenant que la même ellipse se déplace de manière à couper normalement deux droites fixes OX, OY. En prenant celles-ci pour axes coordonnés, on peut considérer les coordonnées (x, y) du centre C comme les distances de ce point à deux normales faisant les angles $\pi + \delta$ et $\frac{\pi}{2} + \delta$ avec l'axe focal; donc

$$y = \frac{c^2\sin\delta\cos\delta}{\sqrt{a^2\sin^2\delta + b^2\cos^2\delta}}, \quad x = -\frac{c^2\sin\delta\cos\delta}{\sqrt{a^2\cos^2\delta + b^2\sin^2\delta}}. \qquad (1)$$

Pour avoir l'équation du lieu (C), il faut éliminer ∂ entre les égalités (1). A cet effet, écrivons ces dernières ainsi :

$$\frac{a^2}{\cos^2\partial}+\frac{b^2}{\sin^2\partial}=\frac{c^4}{y^2},\quad \frac{a^2}{\sin^2\partial}+\frac{b^2}{\cos^2\partial}=\frac{c^4}{x^2}, \tag{1}$$

résolvons-les par rapport à $\frac{1}{\sin^2\partial}$, $\frac{1}{\cos^2\partial}$ et exprimons ensuite que $\sin^2\partial+\cos^2\partial=1$. Nous aurons

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)x^2y^2=(a^2y^2-b^2x^2)(a^2x^2-b^2y^2).$$

La courbe (C) est donc une sextique qui a pour axes de symétrie les normales données OX, OY et les bissectrices des angles formés par ces droites. Elle est formée de quatre boucles tangentes à l'origine aux droites $y=\pm\frac{bx}{a}$, $y=\pm\frac{ax}{b}$.

3. Si l'on passe aux coordonnées polaires au moyen des formules $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$, il vient

$$\rho^2=\frac{(a^2\sin^2\omega-b^2\cos^2\omega)(a^2\cos^2\omega-b^2\sin^2\omega)}{(a^2+b^2)\sin^2\omega\cos^2\omega}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2\sin^2\omega\cos^2\omega-a^2b^2}{(a^2+b^2)\sin^2\omega\cos^2\omega}.$$

Appelons U l'aire d'une boucle de la sextique et ω_1, ω_2 les arcs compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ qui ont pour tangentes $\frac{b}{a}$ et $\frac{a}{b}$; alors

$$2U=\int_{\omega_1}^{\omega_2}\rho^2d\omega=\int_{\omega_1}^{\omega_2}(a^2+b^2)\,d\omega-\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{d\omega}{\sin^2 2\omega}$$

$$=(a^2+b^2)(\omega_2-\omega_1)+\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}(\cot 2\omega_2-\cot 2\omega_1)$$

$$=(a^2+b^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{a^2-b^2}{2ab}-\frac{2ab(a^2-b^2)}{a^2+b^2}.$$

Question 1441.

(Voir *Mathesis*, (3); III, p. 240)

On donne deux cercles fixes qui se coupent en O, A.

Par O *on mène une sécante quelconque qui rencontre les deux cercles en* B, D. 1° *Les tangentes en* B, D *se coupent en* F. *Lieu du point* F. 2° *On rabat* OF *en* OM, OM' *sur* BD. *Lieu des points* M, M'. 3° *On projette* F *en* N *sur* BD. *Lieu du point* N. (H. Brocard.)

Solution par M. E. N. Barisien. Prenons des axes coordonnés rectangulaires, O étant l'origine et OA l'axe des y. Les équations des deux cercles et de la sécante BD seront

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0, \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 - 2a'x - 2by = 0. \tag{2}$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi. \tag{3}$$

On en déduit les coordonnées des points B et D :

$$\text{B}\begin{cases} x = 2a\cos^2\varphi + 2b\sin\varphi\cos\varphi, \\ y = 2a\sin\varphi\cos\varphi + 2b\sin^2\varphi. \end{cases} \qquad \text{D}\begin{cases} x = 2a'\cos^2\varphi + 2b\sin\varphi\cos\varphi, \\ y = 2a'\sin\varphi\cos\varphi + 2b\sin^2\varphi. \end{cases}$$

1° La tangente en B au cercle (1) a pour équation

$$\text{X}(x-a) + \text{Y}(y-b) - ax - by = 0,$$

ou, en remplaçant x et y par les coordonnés de B,

$$\begin{aligned} \text{X}(a\cos 2\varphi + b\sin 2\varphi) + \text{Y}(a\sin 2\varphi - b\cos 2\varphi) \\ = 2(a\cos\varphi + b\sin\varphi)^2. \end{aligned} \tag{4}$$

De même, la tangente en D au cercle (2) a pour équation

$$\begin{aligned} \text{X}(a'\cos 2\varphi + b\sin 2\varphi) + \text{Y}(a'\sin 2\varphi - b\cos 2\varphi) \\ = 2(a'\cos\varphi + b\sin\varphi)^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Au lieu d'éliminer φ entre les équations (4) et (5), calculons X et Y en fonction du paramètre variable φ. Pour faire ce calcul facilement, ordonnons l'équation (4) par rapport à a. On a alors

$$\begin{aligned} a^2(1+\cos 2\varphi) - a[\text{X}\cos 2\varphi + (\text{Y} - 2b)\sin 2\varphi] \\ + b[-\text{X}\sin 2\varphi + (\text{Y} - b\cos 2\varphi) + b] = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Or, l'équation (5) ne diffère de celle-ci que par le changement de a en a'. Il en résulte

$$a + a' = \frac{X\cos 2\varphi + (Y - 2b)\sin 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi},$$

$$aa' = \frac{b[-X\sin 2\varphi + (Y - b\cos 2\varphi) + b]}{1 + \cos 2\varphi}.$$

Ces équations s'écrivent

$$X\cos 2\varphi + Y\sin 2\varphi = (a + a')(1 + \cos 2\varphi) + 2b\sin 2\varphi,$$

$$-X\sin 2\varphi + Y\cos 2\varphi = \frac{aa'}{b} - b + \left(\frac{aa'}{b} + b\right)\cos 2\varphi.$$

En les résolvant par rapport à X et Y, on a

$$X = (1 + \cos 2\varphi)\left[(a + a')\cos 2\varphi - \left(\frac{aa'}{b} - b\right)\sin 2\varphi\right], \qquad (7)$$

$$Y - 2b = (1 + \cos 2\varphi)\left[(a + a')\sin 2\varphi + \left(\frac{aa'}{b} - b\right)\cos 2\varphi\right]. \qquad (8)$$

Ces équations paramétriques sont celles d'une *cardioïde*. En effet, les coordonnées d'une cardioïde dont l'origine est au point de rebroussement et dont l'axe des x est la tangente de rebroussement s'écrivent

$$x = A\cos\alpha(1 + \cos\alpha), \qquad y = A\sin\alpha(1 + \cos\alpha).$$

Si on prend de nouveaux axes rectangulaires passant par l'origine, on a pour les nouvelles coordonnées

$$X = x\cos\theta - y\sin\theta = (1 + \cos\alpha)(A\cos\alpha\cos\theta - A\sin\alpha\sin\theta), \qquad (9)$$

$$Y = x\sin\theta + y\cos\theta = (1 + \cos\alpha)(A\cos\alpha\sin\theta + A\sin\alpha\cos\theta). \qquad (10)$$

On remarque que (9) et (7) seront identifiés, ainsi que (8) et (10), si l'on a

$$\alpha = 2\varphi, \quad A\cos\theta = a + a', \quad A\sin\theta = \frac{aa'}{b} - b.$$

Alors

$$A = \sqrt{(a + a')^2 + \left(\frac{aa'}{b} - b\right)^2},$$

$$A = \sqrt{a^2 + a'^2 + b^2 + \frac{a^2a'^2}{b^2}}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{aa'}{b} - b}{a + a'}.$$

A cause de $Y - 2b$ dans le premier membre de (8), on voit que le lieu du point F est une cardioïde dont le point de rebroussement est en A $(0,2b)$, et qui est tangente à chacun des cercles aux points où ils sont rencontrés par la tangente en O à l'autre cercle.

La distance du point de rebroussement au sommet de la cardioïde est $2A$: son axe de symétrie est incliné de l'angle θ sur Ox.

Si $a + a' = 0$, c'est-à-dire si les deux cercles sont symétriques par rapport à OA, AO est la tangente de rebroussement.

Si $aa' = b^2$, c'est-à-dire si l'un des cercles est symétrique par rapport à OA du cercle orthogonal au second cercle et passant par O et A, la tangente de rebroussement est parallèle à Ox.

2° Les coordonnées (9) et (10) du point F peuvent s'écrire

$$X = A(1 + \cos 2\varphi)\cos(2\varphi + \theta),$$
$$Y = A(1 + \cos 2\varphi)\sin(2\varphi + \theta) + 2b.$$

On a $OF = \sqrt{X^2 + Y^2}$, et les points M, M' sont situés sur le cercle de centre O et de rayon OF. On a pour l'équation de ce cercle

$$X^2 + Y^2 = A^2(1 + \cos 2\varphi)^2 + 4b^2 + 4bA(1 + \cos 2\varphi)\sin(2\varphi + \theta). \quad (11)$$

Les points M et M' étant sur BD, on a aussi

$$Y = X \operatorname{tg} \varphi. \quad (12)$$

On aura donc l'équation du lieu des points M et M' en éliminant φ entre (11) et (12). L'équation (11) s'écrit

$$X^2 + Y^2 = 4A^2\cos^2\varphi + 4b^2 + 8bA\cos^2\varphi(\sin 2\varphi\cos\theta + \cos 2\varphi\sin\theta). \quad (13)$$

Or, de (12), on tire

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Y}{X}, \quad \sin\varphi = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}},$$
$$\sin 2\varphi = \frac{2XY}{X^2 + Y^2}, \quad \cos 2\varphi = \frac{X^2 - Y^2}{X^2 + Y^2}.$$

On a donc, en substituant dans (13),

$$(X^2 + Y^2)^2 = 4A^2X^4 + 4b^2(X^2 + Y^2)^2$$
$$+ 8bAX^2[2XY\cos\theta + (X^2 - Y^2)\sin\theta]. \quad (14)$$

Le lieu de M, M' est donc une courbe du 6e degré, tri-circulaire, ayant en O un point quadruple.

En coordonnés polaires, cette sextique a pour équation

$$\rho^2 = 4A^2\cos^2\omega + 4b^2 + 8bA\cos^2\omega\sin(2\omega+\theta).$$

ω étant d'ailleurs l'angle φ précédent.

Cette courbe a pour aire

$$U = \frac{3\pi A^2}{2} + 4\pi b^2 + 2\pi bA\sin\theta,$$

ou

$$U = \frac{\pi}{2}\left[3(a^2+a'^2) + 4aa' + 7b^2 + \frac{3a^2a'^2}{b^2}\right].$$

3° La droite FN a pour équation

$$y - Y = -(x - X)\operatorname{cotg}\varphi,$$

ou

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = X\cos\varphi + Y\sin\varphi.$$

En y portant les valeurs (7) et (8), on a

$$x\cos\varphi + (y-2b)\sin\varphi = (1+\cos 2\varphi)\left[(a+a')\cos\varphi - \left(\frac{aa'}{b} - b\right)\sin\right.$$

$$x\cos\varphi + (y-2b)\sin\varphi = 2\cos^2\varphi\left[(a+a')\cos\varphi - \left(\frac{aa'}{b} - b\right)\sin\varphi\right].$$ (

On aura le lieu de N en éliminant φ entre (3) et (15). On a ainsi

$$(x^2+y^2)^2 = 2(a+a')x^2 + 2by^2 + 2\left(2b - \frac{aa'}{b}\right)x^2y. \qquad (1$$

C'est une quartique unicursale bicirculaire, ayant à l'origine O un point *triple*.

L'équation de cette courbe en coordonnées polaires est

$$\rho = 2\left[(a+a')\cos^2\omega + b\sin^2\omega + \left(2b - \frac{aa'}{b}\right)\cos^2\omega\sin\omega\right].$$

Son aire est

$$U = \frac{\pi}{4}\left[5(a^2+a'^2) + 4aa' + 13b^2 + \frac{a^2a'^2}{b^2}\right].$$

Solution analogue par M. H. Lez.

Les angles FDO, FBO étant respectivement égaux aux angles OAD, O et l'angle DAB étant constant, le lieu de F est la courbe décrite par le so met d'un angle constant dont les côtés roulent sur deux cercles fixes. lieu a été énoncé par M. Mannheim, et traité par M. Cleyzes dans *Mathe* (1) I, p. 43.

Question 1446.

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 264).

Etant donné un cercle O, ***on considère une tangente fixe*** u ***et une tangente mobile*** v. ***Le diamètre passant par le point de contact de*** v ***rencontre*** u ***en un point par lequel on mène la tangente*** w ***(autre que*** u***). Trouver le lieu du point de rencontre des droites*** v ***et*** w. (De Rocquigny.)

Solution par M. A. Droz-Farny. Soit A le point de contact du cercle O avec u; la tangente mobile v coupe u en B, w en P et touche le cercle O en C. On a immédiatement BC = CP; on retrouve ainsi le mode de génération bien connu de la trisectrice de Maclaurin. Elle est tangente en A à la circonférence, son point double est sur le diamètre AO à une distance égale au triple rayon et son asymptote parallèle à u est distante de cette droite de $4r$.

Solution par MM. Boutin, Barisien, Mirea et Emmerich (Mêmes notations). Les tangentes u et v étant symétriques par rapport au diamètre OC, on trouve facilement

$$OP = OB = \frac{OA}{\cos BOA}, \quad \text{angle } BOA = BOC = COD;$$

donc si l'on prend O pour pôle et OA pour axe polaire, la courbe (P) a pour équation

$$\rho = \frac{R}{\cos\frac{\omega}{3}}.$$

En prenant pour axes la tangente u et le diamètre AO et en observant que

$$\rho \sin\omega = x, \quad \rho\cos\omega = R - y, \quad \cos\omega = 4\cos^3\frac{\omega}{3} - 3\cos\frac{\omega}{3},$$

on trouve

$$x^2(4R - y) = y(3R - y)^2.$$

La courbe est la trisectrice de Maclaurin.

MM. Bastin, Lez, Abramescu, Patriciu ont cherché l'équation de la courbe (P) en coordonnées rectangulaires.

Solution par M. Jeřábek. La question 1446 se ramène facilement à la suivante que j'ai traitée dans *Mathesis* (2), IX, p. 111 :

La tangente en un point C ***à un cercle*** O ***rencontre une tangente fixe*** u ***en point*** B. ***Trouver le lieu du symétrique*** P ***de*** B ***par rapport à*** C.

Ce lieu est une trisectrice de Maclaurin ayant pour équation

$$\rho = \frac{R}{\sin\frac{\omega}{3}},$$

l'axe polaire étant le diamètre du cercle O parallèle à x.

Question 1449.

(Voir *Mathésis* (3), III, p. 280).

Démontrer la relation suivante entre les angles A, B, C ***d'un triangl***

$$(\sin B \sin C - 2\cos A)(\sin A \sin C - 2\cos B)\sin C$$
$$+ (\sin A \sin C - 2\cos B)(\sin A \sin B - 2\cos C)\sin A$$
$$+ (\sin A \sin B - 2\cos C)(\sin B \sin C - 2\cos A)\sin B$$
$$= \tfrac{1}{4}\sin 2A \sin 2B \sin 2C.$$

(Enoncé rectifié). (E. N. Barisien.)

Solution par MM. Abramescu, Delahaye, Droz-Farny, Dupon (Liége), Emmerich, Lez, Ots, Plakhovo, Prange. Désignons par S l premier membre de l'égalité proposée; comme c'est une fonction symé trique de A, B, C on trouve facilement en développant le premier terme

$$S = \sin A \sin B \sin C \,\Sigma \sin^2 A + 4\,\Sigma \sin A \cos B \cos C$$
$$- \Sigma \sin^2 C (\sin 2A + \sin 2B).$$

Or,

$$\Sigma \sin^2 A = 2 + 2\cos A \cos B \cos C,$$
$$\Sigma \sin A \cos B \cos C = \sin A \sin B \sin C$$
$$\Sigma \sin^2 C (\sin 2A + \sin 2B) = 2\Sigma \sin A \sin C (\sin C \cos A + \sin A \cos C)$$
$$= 6 \sin A \sin B \sin C.$$

En substituant, on trouve

$$S = 2 \sin A \sin B \sin C \cos A \cos B \cos C = \tfrac{1}{4}\sin 2A \sin 2B \sin 2C.$$

Remarques. I. On vérifie de la même manière l'identité

$$\Sigma (2 \sin B \sin C - \cos A)(2 \sin A \sin C - \cos B)\sin C = \sin A \sin B \sin C$$

(Prange.)

II. En remplaçant A, B, C par $90° - \frac{1}{2}A$, $90° - \frac{1}{2}B$, $90° - \frac{1}{2}C$ o obtient une formule analogue en $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$. (Emmerich.)

Solution par M. J. Déprez. Soient, dans le plan d'un triangle ABC deux points P, Q symétriques par rapport au centre O du cercle ABC

$A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ leurs triangles podaires par rapport au même triangle; x_1, y_1, z_1 les distances de P aux côtés de ABC.

Les points A_1, A_2 sont isotomiques, il en est de même des points B_1, B_2 et des points C_1, C_2; les aires des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sont donc égales, et l'on a

$$\Sigma (2R \cos B - y_1)(2R \cos C - z_1) \sin A = \Sigma y_1 z_1 \sin A.$$

Examinons quelques cas particuliers. 1° P est l'orthocentre du triangle. Dans ce cas,

$$x_1 = 2R \cos B \cos C, \ldots,$$

et l'on a donc la relation

$$\Sigma (\cos B - \cos A \cos C)(\cos C - \cos A \cos B) \sin A = \tfrac{1}{2} \cos A \cos B \cos C . \Sigma \sin 2A$$

ou

$$\Sigma (\sin A \sin C - 2 \cos B)(\sin A \sin B - 2 \cos C) \sin A = \tfrac{1}{4} \sin 2A \sin 2B \sin 2C.$$

La relation qu'il s'agit de démontrer peut donc se traduire ainsi :

Les aires des triangles podaires de l'orthocentre et du centre du cercle de Longchamps sont égales.

2° P est le centre du cercle inscrit du triangle ABC. On a la relation

$$\Sigma (2R \cos B - r)(2R \cos C - r) \sin A = r^2 \Sigma \sin A,$$

ou

$$\Sigma (1 + \cos B - \cos A - \cos C)(1 + \cos C - \cos A - \cos B) \sin A = \frac{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{\cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C}.$$

3° P est le point de Lemoine du triangle.

On a la relation suivante où ω désigne l'angle de Brocard de ABC,

$$\Sigma (2 \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} \omega - 1)(2 \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} \omega - 1) = 3.$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

1153. Résoudre l'équation

$$C_3^{x+3} = C_3^{x+3} + C_2^{2x+2}.$$

En introduisant les formules des combinaisons, on trouve les quatre racines $1, 0, -1, -8$. Mais, si l'on donne au mot *combinaison* le sens concret habituel, aucune de ces racines ne convient à l'équation.

(M. Stuyvaert.)

1154. Résoudre l'équation

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=c. \qquad (1)$$

La méthode la plus simple consiste à multiplier les deux membres par $\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}$, ce qui donne

$$\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}=\frac{a-b}{c}. \qquad (2)$$

La somme de (1) et (2) donne ensuite

$$x=-a+\frac{1}{4}\left[c+\frac{a-b}{c}\right]^2=\frac{1}{4}\left[c^2+\frac{(a-b)^2}{c^2}\right]-\frac{a+b}{2}.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

1473. Trouver l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles qu'un plan quelconque mené par l'axe OZ les coupe suivant une parabole dont l'axe de symétrie est dirigé suivant OZ.

On suppose successivement : 1° le sommet de la parabole mobile et le paramètre constant; 2° le sommet fixe et le paramètre variable; 3° le sommet mobile et le paramètre variable. (J. Neuberg).

***1474.** Dans tout triangle, la somme des carrés des distances du centre du cercle des neuf points aux quatre centres des cercles tritangents au triangle, augmentée de la somme des carrés de ses côtés, est égale à 21 fois le carré du rayon du cercle circonscrit.

(E. N. Barisien.)

1475. ABCD étant un tétraèdre équifacial, soient A_1 un point quelconque de la face BCD_1 A_2 son complémentaire, A_3 son anticomplémentaire; B_1, B_2, B_3 les points correspondants de la face ACD, etc; V, V_1, V_2, V_3 les volumes des tétraèdres ABCD, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$. Démontrer la relation

$$V=V_3+4V_1-32V_2. \qquad \text{(J. Dépret.)}$$

1476. Trouver une courbe telle que le rapport anharmonique de deux points fixes de l'axe Ox et des deux points où la tangente et la normale menée en un même point M de la courbe rencontrent l'axe Ox, ait une valeur constante a. — Cas particulier de $a=-1$. (Abramescu).

Même question en remplaçant l'un des points fixes par le pied de l'ordonnée du point M. (J. N.)

*UNE DÉMONSTRATION DE GAUSS.

Théorème 1 (Euclide, I, 13). Si une droite en rencontre une autre, elle fait avec celle-ci deux angles, droits ou dont la somme est égale à deux droits.

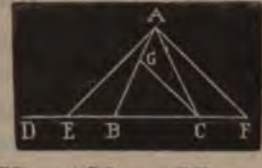
Théorème 2 (Euclide, I, 5). Dans tout triangle isoscèle les angles à la base sont égaux.

Théorème 3 (Euclide, I, 6). Si dans un triangle, deux angles sont égaux, les côtés opposés sont égaux.

Théorème 4. Dans un triangle, il ne peut y avoir deux angles droits.

Théorème 5. Un angle ACB d'un triangle ABC ne peut être égal à l'angle extérieur ABD d'un autre angle du même triangle.

Démonstration. 1° Soit AB = AC. Alors (th. 2) ABC = ACB et, par suite, ABC = ABD ; donc (th. 1) ABC, ACB sont droits ce qui est impossible (th. 4).



2° Soit AB < AC ; B est à l'intérieur d'une sphère de centre A, de rayon AC ; la droite CB coupe cette sphère au delà de B en E. Donc AE = AC, AEB = ACB (th. 2), et AEB = ABD = ABE ; par suite (th. 3), AB = AE = AC, ce qui est contraire à l'hypothèse.

3° Soit AB > AC ; C est à l'intérieur d'une sphère de centre A, de rayon AB ; la droite BC rencontre cette sphère en F. Donc AF = AC, ABF = AFB (th. 2). D'après l'hypothèse, ACB = ABD ; on a donc aussi (th. 1) ACF = ABC = ABF = AFB. Par suite, AC = AF = AB, ce qui est contre l'hypothèse.

Théorème 6. Un angle ACB d'un triangle ABC ne peut être plus grand que l'angle extérieur ABD d'un autre angle du triangle.

Démonstration. Décrivons un cône d'axe CB, de sommet C, d'angle égal à ABD. Si ABD est plus petit que ACB, la ligne CA sera extérieure au cône, par définition, et B, appartenant à l'axe, est à l'intérieur. Donc la droite AB doit couper le cône, en G, par exemple. Alors GCB = GBD, ce qui est impossible d'après le théorème 5 (Gauss, *Werke*, VIII, pp. 191-192)

[Donc on peut établir Euclide I, 17, et, par suite, démontrer que, *dans un triangle, un côté est plus petit que la somme des deux autres*, sans recourir à la notion du plan. P. M.]

SUR LA COURBURE DES COURBES PLANES ET SPHÉRIQUES,

par M. C. E. VAN ESSEN, répétiteur à l'Université de Gand.

1. Nous avons démontré dans *Mathesis* (1), VII, pp. 63-64, la formule

$$\pm\frac{1}{\rho}=\frac{\sin u}{r}+\frac{d\sin u}{dr}, \qquad (1)$$

qui donne le rayon de courbure ρ d'une courbe plane rapportée à des coordonnées polaires (r, θ), u étant l'angle que fait le prolongement du rayon vecteur avec la tangente du côté des θ croissants. Nous allons réduire cette formule aux courbes sphériques.

Soit donc une sphère O de rayon égal à l'unité, et fixons la position d'un point quelconque M de la surface par ses coordonnées polaires r et θ, r étant la longueur de l'arc de grand cercle mené du pôle P au point M, et θ l'angle MPX que fait cet arc avec un grand cercle fixe PX.

Cela étant, considérons sur la sphère une courbe quelconque MM′ $r=f(\theta)$ et proposons-nous de déterminer son rayon de courbure en M.

Observons d'abord que le cercle osculateur C est un petit cercle de la sphère et que, si l'on désigne son rayon sphérique par ρ, le rayon de courbure cherché est égal à $\sin\rho$.

Faisons une projection stéréographique de la figure sur le plan diamétral XY, perpendiculaire à OP, en prenant pour centre de projection le point P_1 diamétralement opposé à P; on sait que la projection C_1 de C sera le cercle osculateur de la projection M_1M_1' de MM′ en M_1, projection de M.

Désignons par r_1 le rayon vecteur OM_1, par S le centre de C_1, par ρ_1 son rayon, par N et N′, les intersections de la droite OS avec C_1, N étant situé sur le prolongement de OS, et par u l'angle que fait le prolongement de PM avec l'arc MM′ situé du côté des θ croissants, lequel angle se conserve dans la projection stéréographique; on aura

$$\rho=\text{angle } N'P_1N=\text{angle } OP_1N-\text{angle } OP_1N'.$$

Or,
$$\text{tang } OP_1N=OS+\rho_1,\quad \text{tang } OP_1N'=OS-\rho_1;$$

donc,
$$\text{tang }\rho=\frac{2\rho_1}{1+\overline{OS}^2-\rho_1^2},$$

ou
$$\frac{1}{\text{tang }\rho}=\frac{1+\overline{OS}^2-\rho_1^2}{2\rho_1}.$$

Cette formule subsiste si l'on considère ρ et ρ_1 comme des valeurs algébriques, positives ou négatives suivant que la courbe $M_1M'_1$ tourne sa concavité du côté de O ou en sens contraire.

Dans ce cas, on a toujours l'égalité

$$\overline{OS}^2 = r_1^2 + \rho_1^2 - 2r_1\rho_1 \sin \varpi.$$

Par suite,

$$\frac{1}{\operatorname{tang} \rho} = \frac{1 + r_1^2 - 2r_1\rho_1 \sin \varpi}{2\rho_1} = \frac{1 + r_1^2}{2\rho_1} - r_1 \sin \varpi.$$

Observons maintenant que

$$r_1 = \operatorname{tang} \frac{r}{2} = \frac{1 - \cos r}{\sin r} = \frac{\sin r}{2 \cos^2 \frac{r}{2}},$$

et que

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\sin \varpi}{r_1} + \frac{d \sin \varpi}{dr_1},$$

formule toujours vraie moyennant la convention précédente sur le signe de ρ_1. On pourra donc écrire

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{2 \sin \varpi \cos^2 \frac{r}{2}}{\sin r} + \frac{2 \cos^2 \frac{r}{2} d \sin \varpi}{dr};$$

d'où

$$\frac{1 + r_1^2}{2\rho_1} = \frac{1}{2\rho_1 \cos^2 \frac{r}{2}} = \frac{\sin \varpi}{\sin r} + \frac{d \sin \varpi}{dr};$$

$$r_1 \sin \varpi = \frac{1 - \cos r}{\sin r} \sin \varpi.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{\operatorname{tang} \rho} = \frac{\sin \varpi}{\sin r} + \frac{d \sin \varpi}{dr} - \frac{1 - \cos r}{\sin r} \sin \varpi,$$

ou enfin

$$\frac{1}{\operatorname{tang} \rho} = \frac{\sin \varpi}{\operatorname{tang} r} + \frac{d \sin \varpi}{dr}. \qquad (2)$$

On remarquera l'analogie de cette formule avec la formule (1) relative aux courbes planes.

Précisons la signification de la quantité ρ; à cet effet, imaginons le

plan P_1MT, MT étant la tangente en M à la courbe MM'; si le cercle osculateur C tombe, par rapport à ce plan, du côté de P, ρ désigne le rayon sphérique de ce cercle, *compté à partir du pôle situé à l'intérieur du cône projetant* C *de* P_1 *et affecté du signe* +; dans le cas contraire, ρ désigne ce même rayon sphérique, pris *négativement*.

9. Comme application de la formule (1), démontrons que *la seule courbe plane réelle ayant son rayon de courbure constant est le cercle.*

Si nous désignons par R la valeur constante du rayon de courbure, prise avec un signe convenable, et par r le rayon vecteur, nous aurons

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin u}{r} + \frac{d \sin u}{dr},$$

d'où l'on tire, C étant une constante,

$$\sin u = e^{-\int \frac{dr}{r}} \left(\int \frac{1}{R} e^{\int \frac{dr}{r}} dr + C \right),$$

ou

$$\sin u = \frac{1}{r}\left(\frac{r^2}{2R} + C\right) = \frac{r}{2R} + \frac{C}{r}.$$

On déduit de là

$$2Rr \sin u = r^2 + 2CR.$$

Supposons que le pôle coïncide avec le centre de courbure au point A; dans ce cas, $r = R$; d'où il vient, en observant que $\sin u = 1$ en A,

$$2R^2 = R^2 + 2CR, \quad 2CR = R^2.$$

Par suite, on aura

$$2Rr \sin u = r^2 + R^2 \quad \text{ou} \quad r^2 + R^2 - 2rR \sin u = 0.$$

Or, si S représente le centre de courbure en M, on a

$$\overline{OS}^2 = r^2 + R^2 - 2rR \sin u.$$

Il en résulte que $OS = 0$. Donc, S coïncide avec O; d'où $OM = SM = R = \text{const.}$; c. q. f. d.

Pour achever la démonstration par l'analyse, remarquons que

$$\sin u = \frac{r\,dr}{ds}.$$

Par suite, la relation $2Rr\sin u = r^2 + R^2$ donne

$$4R^2r^2r^2d\theta^2 = (r^2 + R^2)^2(r^2d\theta^2 + dr^2);$$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^2[4R^2r^2 - (r^2 + R^2)^2]}{(r^2 + R^2)^2} = -\frac{r^2(r^2 - R^2)^2}{(r^2 + R^2)^2}.$$

La condition de réalité de $\frac{dr}{d\theta}$ exige que $r^2 = R^2$; c. q. f. d.

8. Démontrons pareillement que *les seules courbes sphériques réelles qui ont leur rayon de courbure constant sont des cercles.*

En désignant encore par R une constante, on devra donc avoir

$$\frac{1}{\tang R} = \frac{\sin u}{\tang r} + \frac{d\sin u}{dr}.$$

L'intégration de cette équation donne

$$\sin u = e^{-\int\frac{dr}{\tang r}}\left(\int\frac{1}{\tang R}e^{\int\frac{dr}{\tang r}}dr + C\right),$$

ou
$$\sin u = \frac{1}{\sin r}\left(-\frac{\cos r}{\tang R} + C\right) = -\frac{\cos r}{\sin r\tang R} + \frac{C}{\sin r}.$$

On en tire

$$\sin u\sin r\sin R + \cos r\cos R = C\sin R.$$

Admettons que le pôle P des coordonnées coïncide avec l'un des pôles du cercle osculateur au point A; on aura

$$\sin^2 R + \cos^2 R = C\sin R; \quad \text{d'où} \quad C\sin R = 1.$$

Par suite, il vient

$$\sin u\sin r\sin R + \cos r\cos R = 1.$$

Or, si l'on mène l'arc de grand cercle PS, S étant le pôle du cercle osculateur en M répondant à R, on a

$$\cos PS = \cos PM\cos SM + \sin PM\sin SM\cos PMS,$$

ou
$$\cos PS = \cos r\cos R + \sin r\sin R\sin u = 1.$$

Il en résulte que l'arc $PS = 0$, ce qui prouve que S coïncide avec P; l'arc PM est donc constant; ce qui démontre le théorème.

Pour établir la dernière partie par l'analyse, reprenons l'équation

$$\sin u\sin r\sin R + \cos r\cos R = 1,$$

et observons que

$$\sin u = \frac{\sin r d\theta}{ds}, \quad ds^2 = dr^2 + \sin^2 r d\theta^2;$$

il vient

$$\sin^2 r \sin R d\theta = (1 - \cos r \cos R)\, ds;$$

$$\sin^4 r \sin^2 R d\theta^2 = (1 - \cos r \cos R)^2 dr^2 + (1 - \cos r \cos R)^2 \sin^2 r\, d\theta^2;$$

d'où

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{\sin^2 r[\sin^2 r \sin^2 R - (1 - \cos r \cos R)^2]}{(1 - \cos r \cos R)^2} = -\frac{\sin^2 r (\cos r - \cos R)^2}{(1 - \cos r \cos R)^2}.$$

Pour que la dérivée $\frac{dr}{d\theta}$ soit réelle, il faut que

$$\cos r = \cos R = \text{const.};$$

ce qui démontre la proposition.

×EXERCICES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE,

par M. J. Neuberg.

(*Suite*, voir pp. 131-134.)

9. *Construire un triangle* ABC, *connaissant les points* A′, B′, C′ *où les droites* AI, BI, CI *rencontrent le cercle inscrit* I. (Cristesco).

La circonférence circonscrite au triangle A′B′C′ détermine le point I. Les angles B′IC′, C′IA′, A′IB′ sont égaux à $90° + \frac{A}{2}$, $90° + \frac{B}{2}$, $90° + \frac{C}{2}$; on peut donc trouver les angles A, B, C. Les directions des côtés de ABC se déterminent élégamment comme suit : Cherchons les symétriques B_1, C_1 par rapport à IB′, IC′ d'un point quelconque A_1 de IA′; la droite B_1C_1 est parallèle à BC.

10. *On mène parallèlement aux côtés du triangle* ABC *des tangentes au cercle circonscrit; soit* A′B′C′ *le triangle formé par ces tangentes. Déterminer le centre de similitude des triangles* A′B′C′ *et* ABC, *leur rapport de similitude et le produit de leurs surfaces.* (V. Cristesco).

Les tangentes sont menées aux points de rencontre de la circonférence ABC avec les bissectrices intérieures des angles du triangle ABC. Les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un point qui divise la distance OI joignant deux points homologues des triangles homothétiques A′B′C′,

ABC, dans le rapport des droites homologues R, r. Les coordonnées normales de ce point sont proportionnelles aux distances des côtés homologues, ou à $R - R\cos A$, $R - R\cos B$, $R - R\cos C$ ou encore à $\sin^2\frac{A}{2}$, $\sin^2\frac{B}{2}$, $\sin^2\frac{C}{2}$. On a pour les surfaces :

$$SS' = S^2\frac{R^2}{r^2} = \frac{a^2b^2c^2}{4r^2} = \frac{a^2b^2c^2p}{4(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

11. *Le milieu* A_1 *du côté* BC *d'un triangle* ABC *et les pieds* B', C' *des hauteurs issues de* B *et* C *sont les sommets d'un triangle isoscèle. Si l'on donne ce triangle* $AB'C'$, *les lieux des sommets* A, B, C *et de l'orthocentre* H *sont des circonférences.*

12. *On porte sur la circonférence d'un cercle quatre cordes consécutives,* $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$. *Calculer la longueur de la corde* EA.

(E. N. Barisien).

Soient 2α, 2β, 2γ, 2δ, 2ε les arcs soustendus par les cordes a, b, c, d, et la corde $EA = x$. On a, en prenant le rayon du cercle pour unité,

$$\sin\alpha = \tfrac{1}{2}a, \quad \sin\beta = \tfrac{1}{2}b, \quad \sin\gamma = \tfrac{1}{2}c, \quad \sin\delta = \tfrac{1}{2}d, \quad \sin\varepsilon = \tfrac{1}{2}x;$$

$$\sin\varepsilon = \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

$$= \Sigma \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta - \Sigma\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta;$$

$$\varepsilon = \Sigma a\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{4}\right)\left(1-\frac{c^2}{4}\right)\left(1-\frac{d^2}{4}\right)} - \frac{1}{4}\Sigma bcd\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}.$$

La multiplicité des valeurs de x exige une discussion.

13. *Quatre droites* a, b, c, d *donnent lieu à quatre triangles* abc, abd, acd, bcd; *soient* O_d, O_c, O_b, O_a *les centres des cercles circonscrits à ces triangles. Trouver le lieu du centre* ω *de la circonférence* $O_aO_bO_cO_d$ *lorsque les droites* a, b, c, *restant fixes, la droite* d *se déplace parallèlement à elle-même.* (*Journal de Vuibert*, 27e année, 1902-1903, p. 112).

Désignons par A, B, C les sommets du triangle abc, et par A', B', C' les points ad, bd, cd. Le point O_d reste fixe, et dans les triangles BC'A', CB'A', AC'B', les rayons BO_b, CO_c, AO_a des cercles circonscrits sont dirigés suivant les isogonales des hauteurs issues de B, C, A. Il résulte de là que les points O_b, O_c, O_a parcourent des droites menées par B, C, A. De plus, ces rayons concourent en un même point F qui est, dans le triangle ABC, l'inverse du point situé à l'infini dans la direction perpendiculaire à d; par suite, le centre ω de la circonférence $O_aO_bO_cO_d$, qui passe par F, décrit la perpendiculaire élevée au milieu de la droite O_dF.

Remarque. F appartient à la circonférence O_d et est le foyer d'une parabole inscrite au triangle *abc* et ayant ses diamètres perpendiculaires à *d*.

14. *Si par le point* A *du plan d'un cercle* O, *on mène deux cordes* BC *et* DE, *les circonférences circonscrites aux triangles* ADC *et* ABE (*ou* ABD *et* ACE) *se coupent sur la circonférence de diamètre* OA. (Soons).

Les perpendiculaires aux milieux R, Q, P des cordes AB, AC, BC passent respectivement aux centres G, F, O des circonférences ABE, ACD, BECD. Le milieu de AP étant aussi le milieu de RQ, la perpendiculaire élevée en ce point sur BC passe au milieu de chacune des droites AO, GF. En raisonnant de même sur la droite ED, on verrait que GF et AO ont le même milieu ω. Or, le second point de rencontre M des circonférences ABE, ADC est le symétrique de A par rapport à la ligne des centres GF; donc $\omega M = \omega A = \omega O$...

Remarque. Soit K le point de rencontre des droites BE, DC. Si l'on considère le quadrilatère complet formé par les droites BC, ED, EB, DC, on voit, en appliquant un théorème connu, que M est l'intersection des quatre circonférences ABE, ADC, KBC, KED et qu'il appartient à la troisième diagonale KA du quadrilatère inscriptible BEDC.

15. *On considère un triangle* ABC *ayant un angle obtus en* B ; *soient* H *son orthocentre et* A', B', C', *les pieds des hauteurs. Le cercle* HCA'B' *rencontre* AB *en* P *et* P'; *le cercle* HAB'C' *rencontre* BC *en* Q *et* Q'. *Montrer* 1° *que les points* P, P', Q, Q' *sont situés sur une circonférence de centre* H; 2° *que les circonférences* PP'Q, HC'BA' *ont pour axe radical le côté* AC. (E. N. Barisien).

1° $BP.BP' = BA'.BC$, $BQ.BQ' = BA.BC'$, $BA.BC' = BA'.BC$; par conséquent, $BP.BP' = BQ.BQ'$. Les points P, P', Q, Q' sont donc sur une même circonférence, dont le centre est à l'intersection des perpendiculaires HC, HA élevées au milieu des cordes PP', QQ', 2° A et C sont d'égale puissance par rapport aux deux cercles PP'Q, HC'BA'; car $AA'.AH = AP.AP'$,...

16. *On considère une série de circonférences qui touchent une droite donnée* AB *en un point* A. *Le lieu des points de contact des tangentes parallèles à une droite donnée se compose de deux droites menées par* A.

17. *Des cercles se touchent extérieurement en un même point* C. *Trouver l'enveloppe des tangentes menées à ces cercles aux points où elles rencontrent une même droite d parallèle à la tangente commune en* C.

(Cf. *Educational Times*, 1903, p. 398).

Si d rencontre l'un des cercles en P et P′, CP est la bissectrice de l'un des angles formés par PP′ avec la tangente PT menée en P à ce cercle; donc la distance de C à PT est égale à la distance de C à d.

COROLLAIRE. C est le centre d'un cercle inscrit ou exinscrit à un triangle formé par trois quelconques des tangentes considérées.

18. *Construire un triangle* ABC, *connaissant la base* BC, *l'angle opposé* A *et le rapport* DL : DX *des distances du milieu* D *de* BC *au pied* L *de la bissectrice de l'angle* BAC *et au pied* X *de la hauteur* AX.

(*Educational Times*, 1903, p. 398).

Construisons sur BC un segment capable de l'angle A ; soit E le point de rencontre de AL avec la circonférence de ce segment, ce point est connu comme étant le milieu de l'arc soustendu par la corde BC. La hauteur AX se déduit de AX : DE = XL : LD.

NOTES MATHÉMATIQUES.

19. *Sur une propriété des trièdres. Dans les Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire, 5e livre, Catalan énonce la proposition suivante :*

Dans tout trièdre, la somme des angles formés par les arêtes avec les bissectrices des faces opposées est moindre que la somme des faces.

Soit SM la bissectrice intérieure de la face BSC du trièdre SABC. et soit SA′ la symétrique de l'arête SA par rapport à la droite SM. Il est facile de voir que les deux trièdres SAMB, SA′MC ayant un dièdre égal SM compris entre deux faces égales chacune à chacune, l'angle A′SC = ASB.

Cela posé, si l'angle ASM $< 90°$, la figure SAA′C est un trièdre proprement dit, et l'on peut écrire

$$\text{angle ASA}' < \text{ASC} + \text{A}'\text{SC}, \quad \text{ou} \quad \text{ASM} < \frac{\text{ASC} + \text{ASB}}{2}. \qquad (1)$$

Mais si l'angle ASM $> 90°$ (la somme des dièdres SB, SC est alors $> 180°$), on ne peut plus écrire l'inégalité (1). La proposition énoncée ci-dessus exige donc une restriction ou du moins la démonstration n'est plus applicable.

(EDWARD B. ESCOTT, à Ann-Arbor, Michigan.)

20. *Explication d'un paradoxe.* Un correspondant nous soumet la difficulté suivante.

« *Soit à chercher le lieu du milieu* P *d'une corde* MN *d'une ellipse qui* « *est vue du centre* O *sous un angle droit.*

« Les équations de la corde MN et du diamètre conjugué OP étant

$$y = mx + n, \quad y = -\frac{b^2}{a^2 m}x, \tag{1}$$

« et la condition que l'angle MON est droit s'exprimant par l'égalité

$$n^2(a^2 + b^2) = a^2b^2(1 + m^2), \tag{2}$$

« l'équation du lieu (P) s'obtient en éliminant m et n entre les relations « (1) et (2). On trouve

$$(a^2 + b^2)(a^2y^2 + b^2x^2)^2 = a^2b^2(a^4y^2 + b^4x^2). \tag{3}$$

« Le lieu passerait donc par l'origine des coordonnées ou bien l'équa- « tion (3) renfermerait un facteur étranger. »

L'origine est un *point isolé* de la courbe. En effet, la condition de perpendicularité $1 + mm' = 0$ est vérifiée par $m = m' = +\sqrt{-1}$ et par $m = m' = -\sqrt{-1}$. Il résulte de là que les droites MN, OM, ON peuvent se confondre en une seule ayant pour équation $y = x\sqrt{-1}$ ou $y = -x\sqrt{-1}$; O est le milieu d'une telle corde MN.

La même difficulté se présente lorsqu'on cherche la podaire du centre O d'une ellipse. Ce point est un point isolé de la podaire ; il correspond aux asymptotes imaginaires issues du centre (Voir aussi Briot et Bouquet, *Géométrie analytique*, livre II, ch. III, n° 107). (J. N.)

BIBLIOGRAPHIE.

Methodes de résolution et de discussion des problèmes de Géométrie par G. Lemaire, Professeur à l'école Stanley. Paris, Vuibert et Nony, 1904 (In-8° de 223 pages avec 211 figures dans le texte). Prix : fr. 2,50.

Sommaire. I. Lieux géométriques. II. Méthode d'intersection des lieux géométriques. III. Détermination d'une droite. IV. Translation. V. Rotation (1re Partie). VI. Symétrie. VII. Méthode des figures semblables. VIII. Homothétie. IX. Inversion X. Transformation et partage de figures.

Nous possédons déjà plusieurs excellents livres d'exercices de géométrie; Théorèmes et problèmes de Géométrie, par E. Catalan, 7e édition; Exercices de Géométrie par F. J., 3e édition et ceux de Van den Broeck; Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques, par Petersen-Chemin; Problèmes de Geométrie élémentaire par Alexandroff-Aitoff. L'ouvrage de M. Lemaire ne fait pas double emploi avec ceux que nous venons de citer. Chaque chapitre renferme une partie développée et des exercices proposés

(en tout 404). Ainsi que l'indique la table des matières transcrite ci-dessus, l'auteur groupe ses applications d'après les méthodes employées. Les exemples traités sont expliqués dans un style sobre, mais avec une grande clarté et les discussions sont fort complètes; les exercices proposés ont été très bien choisis; outre les questions qui sont classiques depuis longtemps, on rencontre des problèmes entièrement nouveaux ou puisés dans les recueils périodiques et aussi des problèmes de géométrie solide en assez grand nombre.

L'exécution typographique est irréprochable.

Nous recommandons volontiers ce livre aux professeurs et aux élèves.

(J. N.)

Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage von Dr W. Fiedler. Vierte Auflage. I Teil. Die Methoden der darstellenden und die Elemente der projectivischen Geometrie. Leipzig, Teubner, 1904. (In-8° de 431 p., avec deux planches et de nombreuses figures dans le texte). Prix : 10 marcs.

La première édition de cet ouvrage remonte à 1863; cette circonstance nous dispense de faire une analyse détaillée du livre. Pour nos jeunes lecteurs, nous transcrivons les titres des quatre sections du premier volume, ils caractérisent déjà la méthode de l'auteur : *A.* La projection centrale comme méthode de représentation, ses lois générales (p. 1-136). *B.* Théorie constructive des coniques comme projections de circonférences (p. 136-273). *C.* Collinéation centrale de deux espaces, théorie des bas-reliefs (p. 273-298). *D.* Les lois fondamentales de la projection orthogonale, sa transformation; axonométrie.

La marche suivie par M. Fiedler, comme on le voit, diffère de celle des Traités français. Le lecteur trouvera dans ce manuel tous les développements désirables sur la géométrie descriptive alliée à la géométrie projective, c'est un *répertoire* précieux, mais un peu touffu : *Abondance de biens peut nuire.* Les notations sont souvent fatigantes.

Malgré ces défauts de forme, le Traité de M. Fiedler jouit d'une grande réputation; il a exercé une grande influence sur l'enseignement. (J. N.)

Vorstufen der höheren Analysis und analytische Geometrie von Dr. O. Reichel, Professor an der Königl. Landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin. Leipzig, Teubner, 1904 (In-8° de X-111 pp., cartonné; 30 fig. dans le texte). Prix : 2 marcs 40.

Cet opuscule a pour objet principal d'élucider les notions de : limite, convergence, fonction, nombre incommensurable, continuité, nombre complexe, point à l'infini commun à deux parallèles et de faire connaître les premiers principes sur les vecteurs et la géométrie analytique. Ces matières sont bien traitées sans que l'on puisse dire que l'auteur a *innové*.

Sommaire. 1-3. Binome. 4-10bis. Série, fonction, limite, nombre irrationnels. 11-16. Vecteurs. 17-24. Extension de l'idée de fonction; exponentielles et logarithmes. 25-27. Coordonnées, fonctions trigonométriques. 28-30. Imaginaires. 31-33. Sinus et cosinus d'angles très petits. 34-35. Série exponentielle pour un argument imaginaire; série pour sinus et cosinus. Calcul de π. Appendice.

(J. N.)

Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene von Pr. Dr. A. Hochheim. Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. Dritte vermehrte Auflage bearbeitet von Dr. Fr. Hochheim. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1904 (In 8° de VI-98 pp. cartonné). Prix : 2 marcs 40.

Très bon recueil d'exercices numériques et autres sur les commencements de la géométrie analytique. Voici les intitulés des paragraphes, avec leurs nombres d'applications :

Détermination d'un point par ses coordonnées (1-11). Distance de deux points (12-21). Divisions d'un segment dans un rapport donné (22-30). Transformation des coordonnées (31-42).

Equation de la droite (43-48). Détermination d'une droite d'après des conditions données (49-67). Distance d'un point à une droite (68-75). Intersection de deux droites (76-95). Aire d'un polygone (96-114). Droites passant par un point donné (115-125). Angle de deux droites (126-139). Droites parallèles (140-147). Droites rectangulaires (148-166). Bissectrice d'un angle (167 178). Lieux géométriques (179-217). Problèmes divers (218-245) Equations d'un degré supérieur qui représentent des droites (246-275) Faisceau de droites (276-294). Rapport anharmonique d'un quaterne de rayons (295-305). Faisceau harmonique (306-325). Faisceau involutif (326-344). Coordonnées ponctuelles homogènes (345-404).

Équation du point en coordonnées tangentielles (405-439). Rapport anharmonique d'un quaterne de points (440-447). Points harmoniques 448-456). Ponctuelles involutives (457-470). Coordonnées tangentielles homogènes (471-506). Enveloppes (507-521).

Équation du cercle (522-540). Cercle et droite (541-554). Tangente et normale (555-577). Pôle et polaire (578-602). Détermination d'un cercle d'après des conditions données (603-637). Lieux géométriques et enveloppes (638-682). Cercles sécants ou tangents (683-699). Axe radical et centre radical (700 719). Faisceau de cercles (720-742). Tangentes communes, centres et axes de symétrie (743-764). Problème des cercles tangents (765-772).

Bien que l'auteur donne simplement les énoncés, la juste gradation des exercices permet à un élève studieux d'aborder seul la résolution. La table des matières indique suffisamment que le recueil est aussi varié et complet que possible. (J. N.)

Lehrbuch der analytischen Geometrie bearbeitet von O. Fort und O. Schlömilch. Erster Teil. Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort. Siebente Auflage besorgt von R. Heger in Dresden. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1904 (In-8° de XVII-268 pp. avec 68 fig. dans le texte) Prix : 4 marcs.

Cet ouvrage dont la première édition remonte à une cinquantaine d'années et dont les trois dernières éditions ont été mises au courant des nouveaux programmes par M. R. Heger, jouit en Allemagne d'une juste réputation, en ce sens qu'il répond aux exigences de l'enseignement des écoles techniques supérieures.

La partie théorique est bien développée, par ci et par là il y a aussi des applications; mais les exercices proprement dits manquent.

Nous n'avons rien de particulier à signaler dans les chapitres du point, de la droite et du cercle, si ce n'est que les règles des signes sont quelquefois traitées trop rapidement.

La marche suivie dans la théorie des coniques peut intéresser nos lecteurs; elle présente certains avantages. Au chap. IV, ces courbes sont définies comme le lieu des points dont les distances à un point fixe et à une droite fixe sont dans un rapport constant. De là on déduit l'équation $y^2 = 2px + qx^2$, puis les équations $y^2 = 2p\rho$, $a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2$ qui servent à établir les premières propriétés des coniques (existence de deux foyers, asymptotes, équation polaire, etc.). Les chap. V, VI, VII continuent respectivement l'étude des propriétés de la parabole, de l'ellipse et de l'hyperbole au moyen des dernières équations (tangente et normale, diamètres, cercle osculateur, quadrature, etc.).

Le chap. VIII étudie l'équation générale du second degré sous la forme

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Les axes principaux sont déterminés au moyen d'une transformation de coordonnées qui fait évanouir le terme en xy; on cherche ensuite l'équation de la courbe rapportée à son centre; la simplification de l'équation de la parabole est traitée à part. La conique par cinq points, la génération projective, la tangente, la théorie des pôles et polaires avec application au centre et au diamètre, quelques lieux géométriques, et l'emploi des notations abrégées figurent dans le même chapitre.

Nous trouvons au chap. IX quelques généralités sur les courbes algébriques d'un ordre supérieur et des développements sur la parabole cubique, la cissoïde, la lemniscate; au chap. X, des développements sur quelques courbes transcendentes telles que la logarithmique, la sinusoïde, la spirale équiangle, la chaînette, la spirale d'Archimède, la spirale parabolique, la cycloïde et les épicycloïdes. (J. N)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1313.

(Voir *Mathesis*, (3), I, p. 88.)

Construire le triangle ABC, ***connaissant soit le premier*** $A_1B_1C_1$, ***soit le second triangle*** $A_2B_2C_2$ ***de Brocard de*** ABC. (L. RIPERT).

Mathesis a publié dans le tome (1) IX, p. 243 trois solutions de la première partie de cette question. L'article de M. Fitz-Patrick dans le numéro de mai ramène la seconde partie à la première; car le centre d'homologie des deux triangles de Brocard, inscrits au cercle de Brocard, est le barycentre du premier triangle. Rappelons à cette occasion la solution élégante de la seconde partie donnée dans le mémoire de MM. Neuberg et Gob, cité p. 110, § 26 : On cherche les foyers de Steiner F, F′ du triangle $A_2B_2C_2$. Les droites A_2F, B_2F, C_2F coupent

la circonférence $A_2B_2C_2$ aux sommets du premier triangle de Brocard, $A_1B_1C_1$. Les côtés de ABC sont les polaires de A_1, B_1, C_1 par rapport aux cercles FB_2C_2, FC_2A_2, FA_2B_2. Le point F′ conduit à une seconde solution A′B′C′; les triangles ABC, A′B′C′ sont médians réciproques. — Cette construction implique visiblement la réponse complète à la question 1313. (EMMERICH.)

×Question 1455.

(Voir *Mathesis*, (3) IV, p. 32).

On prolonge le côté BC *d'un triangle* ABC *de* $CA_1 = k.BC$; *on prolonge le côté* CA *de* $AB_1 = k.CA$, *et le côté* AB *de* $BC_1 = k.AB$. *Soient* A_2, B_2, C_2 *les milieux de* AA_1, BB_1, CC_1. 1° *Les trois triangles* ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ *ont même centre de gravité;* 2° *Le rapport des aires des triangles* $A_2B_2C_2$ *et* ABC *est* $\frac{1}{4}(1+3k+3k^2)$. (E. N. BARISIEN.)

Solution par E. WEBER. 1° Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Nous allons établir l'équivalence des aires des triangles A_1B_1G, A_1C_1G, B_1C_1G. On voit tout de suite que les triangles A_1B_1A, A_1C_1C, B_1C_1B, ayant pour aire k^2S, sont équivalents, S étant la surface de ABC. D'autre part, les triangles A_1GC, B_1GA, C_1GB ont la même surface $k\frac{S}{3}$. Enfin, chacun des triangles A_1GA, B_1GB, C_1GC a pour surface $\frac{1}{3}S(1+2k)$.

Si M_a, M_b, M_c sont les pieds des médianes du triangle ABC, on observe que les sommets du triangle $A_2B_2C_2$ peuvent être obtenus, en prolongeant respectivement les côtés $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ du triangle $M_aM_bM_c$ de longueurs égales à $\frac{1}{2}ka$, $\frac{1}{2}kb$, $\frac{1}{2}kc$. En vertu de ce qui précède, le triangle $A_2B_2C_2$ a même centre de gravité que le triangle $M_aM_bM_c$, et par suite que le triangle ABC.

2° La surface du triangle $A_1B_1C_1$ a pour expression $S(1+3k+3k^2)$. Le rapport des aires des triangles $A_1B_1C_1$ et ABC est donc $(1+3k+3k^2)$.

On déduit de là, que le rapport des aires des triangles $A_2B_2C_2$ et $M_aM_bM_c$ est $1+3k+3k^2$. Il en découle immédiatement que le rapport des aires des triangles $A_2B_2C_2$ et ABC est $\frac{1}{4}(1+3k+3k^2)$.

NOTE. D'autres solutions nous ont été adressées par MM. DELAHAYE, DUPONT, LEZ, DE ALBA, BASTIN, RIUS Y CASAS, EMMERICH, PRANGE, ERÉLAV SEAM, DROZ-FARNY, DESPRETS, OTS et DÉPREZ.

La question 1455 rentre dans des propositions dont il a été maintes fois question dans *Mathesis* (voir par exemple, t. II, p. 117) et sur lesquelles il n'est peut-être pas inutile de revenir.

Si l'on déplace le sommet A d'un triangle ABC de A en α, le centre de gravité G éprouve un déplacement GG_1 équipollent à $\frac{1}{3}A\alpha$. On passe donc du centre de gravité G de ABC au centre de gravité Γ d'un triangle $\alpha\beta\gamma$, en construisant une ligne polygonale $GG_1G_2\Gamma$ dont les côtés GG_1, G_1G_2, $G_2\Gamma$ sont équipollents à $\frac{1}{3}A\alpha$, $\frac{1}{3}B\beta$, $\frac{1}{3}C\gamma$. Si l'on passe ainsi de ABC à $B_1C_1A_1$, les côtés de la ligne $GG_1G_2\Gamma$, équipollents à $\frac{1}{3}AB_1$, $\frac{1}{3}BC_1$, $\frac{1}{3}CC_1$ forment un triangle et Γ coïncide avec G. Réciproquement, puisque les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ ont même centre de gravité, les lignes AA_1, BB_1, CC_1 sont équipollentes aux côtés d'un même triangle ; par suite, trois points qui divisent ces lignes dans un même rapport sont les sommets d'un triangle ayant le même centre de gravité G. Les mêmes raisonnements sont applicables lorsque A_1, B_1, C_1 sont les sommets de trois triangles semblables A_1BC, B_1CA, C_1AB.

En projetant le triangle ABC suivant un triangle équilatéral A'B'C' on voit facilement que les triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ se projetteront suivant des triangles équilatéraux concentriques avec A'B'C' ; ce qui démontre la première partie de la question et pourrait aussi servir pour la seconde partie. On en déduit également que les trois triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ ont même angle de Brocard (Neuberg, AFAS, 1888).

Si A_1, B_1, C_1 sont trois points quelconques pris sur les côtés BC, CA, AB du triangle ABC, on a

$$\frac{A_1B_1C_1}{ABC} = \frac{BA_1.CB_1.AC_1 + A_1C.B_1A.C_1B}{AB.BC.CA},$$

où il faut appliquer la règle des signes. Cette formule servira à déterminer l'aire du triangle $A_2B_2C_2$ dont les sommets sont sur les côtés du triangle ayant pour sommets les milieux des côtés de ABC. (J. N.)

Question 1456.

(Voir *Mathesis*, (3), IV, p. 32.)

On considère des ellipses semblables qui ont même sommet A *et une tangente commune m ; trouver le lieu des centres.*

Solution par MM. Barisien et Déprez. L'équation d'une tangente *m* à

une ellipse rapportée à ses axes de symétrie étant

$$x\cos\delta + y\sin\delta = \sqrt{a^2\cos^2\delta + b^2\sin^2\delta},$$

la distance du sommet $(a, 0)$ à cette droite est, en supposant $\frac{b}{a} = k$,

$$d = a\cos\delta - a\sqrt{\cos^2\delta + k^2\sin^2\delta}. \qquad (1)$$

Considérons d comme une constante, et (a, δ) comme les coordonnées polaires du centre O, le pôle étant A et l'axe polaire la perpendiculaire abaissée de A sur m. L'équation (1) représentera le lieu cherché en coordonnées polaires ; elle se ramène à

$$a^2k^2\sin^2\delta + 2da\cos\delta - d^2 = 0,$$

et devient en coordonnées rectangulaires

$$k^2y^2 + 2dx - d^2 = 0.$$

Le lieu est donc une parabole.

Autres solutions par MM. Bastin, Emmerich, Couvert. M. Emmerich observe que les deux foyers et le sommet A′ opposé à A décrivent des paraboles homothétiques à la trajectoire du centre O ; les triangles AOB, AOB′ étant d'espèce constante, les sommets B, B′ parcourent également des paraboles.

Plus généralement, tout point invariablement liés à l'ellipse variable décrit une conique et toute droite liée à cette courbe enveloppe une antipodaire de conique. (Déprez).

Question 1480.

(Voir *Mathesis*, (3), IV, p. 56).

Le lieu des foyers des hyperboles équilatères qui passent par deux points fixes d'une circonférence donnée et par les extrémités d'un diamètre variable de cette circonférence, est une lemniscate de Bernoulli. (Barisien.)

Solution par M. Emmerich. Soient A, B les points fixes et MN le diamètre variable de la circonférence. Or, lorsqu'une hyperbole équilatère passe aux sommets d'un triangle rectangle MAN ou MBN, la hauteur issue du sommet de l'angle droit est une tangente de la courbe. En abaissant les perpendiculaires AA′, BB′ sur MN on a donc les tangentes en A et B. Celles-ci étant parallèles, le milieu O de AB est le centre de l'hyperbole. Si, sur AA′, on prend $AC = AD = OA = a$, on a les asymptotes OC, OD. Soient F, F′ les foyers ; FCF′D est un quadrilatère inscriptible et harmonique. Si la médiane FA coupe le cercle circonscrit en E, on a $AE = AF' = BF$; mais $AE.AF = a^2$, donc $BF.AF = a^2$, ce qui démontre la proposition.

Les sommets de l'hyperbole variable parcourent une lemniscate de même orientation passant aux points A et B. Les directrices sont les médiatrices des rayons vecteurs OF, OF'; elles enveloppent l'hyperbole équilatère de foyers A et B. Car la podaire d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre est une lemniscate de Bernoulli.

Note. Soient P un point quelconque d'une lemniscate de Bernoulli, A et B ses sommets, G et G' ses foyers de sorte que $OA = OB = a$, $OG = OG' = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$. M étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABP et H, H' ses points d'intersection avec PG, PG', on a $PG.GH = AG.GB = \frac{1}{2} a^2 = PG.PG'$, donc $GH = PG'$, $G'H' = PG$, $PH = PH'$, donc PM est la bissectrice de l'angle GPG'. N désignant le pied de PM sur AB, on a

$$\overline{PN}^2 = PG.PG' - NG.NG' = \tfrac{1}{2} a^2 - (\tfrac{1}{2} a^2 - \overline{ON}^2),$$

donc $PN = ON$. Si PO rencontre le cercle ABP en Q, QM sera parallèle à AB. D'où l'on conclut que la médiane PQ et la symédiane PR du triangle ABP forment constamment un angle droit. (Emmerich.)

Solution par MM. Bastin et Lez Prenons pour axes la droite qui joint les points fixes A, B et le diamètre perpendiculaire, et représentons par $2a$ la distance AB, par b l'ordonnée du centre de la circonférence. L'hyperbole variable a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2by - a^2 - 2y(y - kx - b) = 0,$$

k étant un paramètre variable. Identifions cette équation avec l'équation focale

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - (mx + ny + t)^2 = 0.$$

Il vient

$$m^2 + n^2 = 2, \quad \alpha + mt = 0, \quad \beta + nt = 0,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 - t^2 + a^2(1 - m^2) = 0.$$

L'élimination de m, n, t conduit à l'équation

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 = 2a^2(\alpha^2 - \beta^2),$$

qui représente une lemniscate de Bernoulli.

Ont résolu la même question MM. Retali, Droz-Farny, Couvert, Rose, et Abramescu. MM. Retali et Déprez indiquent aussi des généralisations assez curieuses de la question.

Question 1461.

(Voir *Mathesis*, (3), IV, p. 80.)

La tangente et la normale en un point M *d'une courbe rencontrent l'axe* OX *en* T *et* N, *l'axe* OY *en* T′ *et* N′.

Déterminer une courbe telle que l'on ait

$$OT + ON = OT' + ON'.$$

(PIRONDINI.)

Solution par M. EMMERICH. Désignons les abscisses des points T, N et les ordonnées des points T′, N′ respectivement par t, n, t', n' ; les équations de la tangente et de la normale,

$$(Y - y) - p(X - x) = 0, \quad p(Y - y) + (X - x) = 0,$$

donnent

$$t = x - \frac{y}{p}, \quad n = x + yp, \quad t' = y - xp, \quad n' = y + \frac{x}{p}.$$

Comme $tn + t'n' = 0$, on voit que trois des quatre quantités sont de même signe et la quatrième de signe contraire, remarque qui se déduit aisément de ce que les angles N′OT, N′MT sont droits.

1° L'hypothèse

$$t + n = t' + n' \qquad (a)$$

se traduit par l'égalité

$$2x + yp - \frac{y}{p} = 2y - xp + \frac{x}{p},$$

ou

$$(x + y)p^2 + 2(x - y)p - (x + y) = 0. \qquad (1)$$

Faisons tourner les axes d'un angle de 45° en posant

$$x\sqrt{2} = \xi - \eta, \quad y\sqrt{2} = \xi + \eta.$$

Il viendra $p = \frac{1 + q}{1 - q}$, q désignant le quotient différentiel $\frac{d\eta}{d\xi}$; l'équation (1) prend alors la forme plus simple

$$\eta q^2 + 2\xi q - \eta = 0. \qquad (2)$$

Pour effectuer l'intégration, éliminons ξ de l'équation (2) et de sa différentielle : $(q^2 + 1)\,d\eta + 2(\xi + q\eta)\,dq = 0$, où l'on a remplacé $q\,d\xi$ par $d\eta$. Il en résulte

$$q\,d\eta + \eta\,dq = 0, \quad \text{donc} \quad q\eta = c.$$

En substituant la valeur $q = \frac{c}{\eta}$ dans l'équation (2), nous trouvons la parabole $\eta^2 = 2c\xi + c^2$ dont le foyer coïncide avec l'origine O et dont l'axe est la bissectrice de l'angle XOY, le paramètre $2c$ étant arbitraire. En effet, les ordonnées des points T, N, T′, N′ par rapport au système ξ, η étant proportionnelles à $c(\eta - c)$, $-\eta(\eta + c)$, $c(\eta + c)$, $\eta(\eta - c)$ respectivement, on a

$$t : n : t' : n' = -c(\eta - c) : \eta(\eta + c) : c(\eta + c) : \eta(\eta - c),$$

de sorte que $t + n = t' + n'$. En valeur absolue la somme de trois distances équivaut à la quatrième. Si, par exemple, $\eta > c$, on a

$$-\mathrm{OT} + \mathrm{ON} = \mathrm{OT}' + \mathrm{ON}'.$$

2° En admettant que la somme des valeurs algébriques de trois segments soit égale à la quatrième, par exemple

$$t + n = -t' + n', \qquad (b)$$

on est conduit à l'équation différentielle

$$(x - y)p^2 - 2px + (x + y) \equiv (p - 1)[(x - y)p - (x + y)] = 0.$$

Le facteur $p - 1$ donne les droites $y = x + c$ qui satisfont à la condition $\mathrm{OT} + \mathrm{ON} = \mathrm{OT}' + \mathrm{ON}'$, car $\mathrm{OT} = \mathrm{OT}'$ et $\mathrm{ON} = \mathrm{ON}'$.

Pour intégrer l'autre facteur, introduisons des coordonnées polaires : $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Nous trouvons ainsi $dr = rd\varphi$, $r = ce^{\varphi}$. C'est l'équation d'une spirale logarithmique dont la tangente et la normale en tout point sont inclinées de 45° vers le rayon vecteur. Dans ce cas, on déduit des quadrilatères inscriptibles OTMN′, OT′MN :

$$\mathrm{OT} = \mathrm{ON}', \quad \mathrm{ON} = \mathrm{OT}'.$$

Dans les autres formes de l'hypothèse (b), les mêmes lieux se présentent sous les formes $y + x = c$, $r = ce^{-\varphi}$.

3° En partant de

$$t - n = t' - n' \qquad (c)$$

on est amené à $(y - x)(p^2 + 1) = 0$ avec la solution singulière $y = x$. $p = 1$. En effet $\mathrm{OT} = \mathrm{OT}' = 0$, $\mathrm{ON} = \mathrm{ON}'$.

Changer simultanément les signes de t, n ou de t', n' dans les hypothèses (a), (b), (c), c'est changer le sens positif de l'un des axes coordonnés. On voit ainsi que la solution précédente épuise toutes les formes de l'équation

$$\pm t \pm n \pm t' \pm n' = 0.$$

Autres solutions moins complètes ou moins simples par MM. Retali, Boutin, Rose, Despretz, Abramescu, Sterkens. M. Boutin exprime la condition du problème au moyen des angles $MOX = \omega$, $OMT = \mu$ et trouve ainsi $\mu = 45^\circ$ ou $\mu + \omega = 45^\circ$.

M. Abramescu intègre l'équation différentielle (1) en employant la substitution de Legendre $xp - y = u$, $p = v$; M. Despretz pose $y = tx$.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1155. Résoudre l'équation

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 4 = 0.$$

(Barisien.)

Écrire $(x-1)^4 - 4(x-1)^2 - 1 = 0$, $x = 1 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{5}}$.

1156. Résoudre le système

$$x + y + z = a,$$
$$(y+z)(z+x)(x+y) = b^3,$$
$$x^2 - y^2 + z(x-y) + z^2 = xy.$$

(Cardoso-Laynes.)

La 3e équation se ramène à $(z+x)^2 = (y+z)(x+y)$; par suite la 2e donne $z + x = b$ et la première, $y = a - b$. La 4e équation peut maintenant s'écrire $b^2 = y^2 + y(x+z) + xz$, d'où xz, etc.

1157. Trouver une courbe telle que la normale soit moyenne proportionnelle entre l'abscisse et l'ordonnée. (Pirondini.)

Equation différentielle de la courbe : $y^2y'^2 = xy$ ou $y^{\frac{1}{2}}dy = x^{\frac{1}{2}}dx$; d'où $y^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} = c^{\frac{3}{2}}$ et sous forme rationnelle

$$x^5(x^5 - y^5 - 2c^5) + y^5(y^5 - x^5 - 2c^5) + c^{10} = 0.$$

1158. Trouver une courbe telle que la sous-normale soit moyenne proportionnelle entre la sous-tangente et l'abscisse. (Pirondini.)

On trouve :

$$y^2y'^2 = x\frac{y}{y'}, \quad x^{\frac{4}{3}}dx = y^{\frac{4}{3}}dy,$$

$$x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}} = c^{\frac{4}{3}}, \quad (x^4 - y^4 - c^4)^3 = 27c^4x^4y^4.$$

1159. Reconnaître la nature des racines de l'équation

$$f(x) \equiv x^4 - 4x^3 - 8x^2 + a = 0.$$

Résoudre complètement l'équation en supposant 1° une racine double ; 2° la somme de deux racines égale à 1 ; 3° une racine égale à $1+\sqrt{11}$. (*Faculté des Sciences*, Bucarest.)

L'équation $f'(x)=0$ ayant pour racines $-1, 0, 4$, appliquer le théorème de Rolle en cherchant les signes de

$$f(-\infty),\quad f(-1),\quad f(0),\quad f(4),\quad f(\infty).$$

Une racine double $-1, 0, 4$ correspond à $a=3, 0, 128$.

1160. Former l'équation qui a pour racines les produits des racines deux à deux de l'équation $f(x)\equiv x^4+px^2+qx+r=0$. (*Faculté des Sciences*, Bucarest.)

Eliminer x entre $f(x)=0$ et $f\left(\frac{y}{x}\right)=0$, ou exprimer que $f(x)$ est divisible par $x^2+\lambda x+y$ et éliminer λ entre les deux équations de condition, ou identifier $f(x)$ avec $(x^2+\lambda x+y)\left(x^2-\lambda x+\frac{r}{y}\right)$.

1161. Soient A, B deux points fixes d'une circonférence O et M un point variable de cette courbe. On prend sur la corde MB un point P tel que $\frac{MP}{MA}=$ const. Lieu du point P. (Barisien.)

Le triangle AMP étant d'espèce constante, P décrit une circonférence.

1162. Étant donné un triangle ABC, on prend sur AB une longueur quelconque AB′, sur AC une longueur AC′ = K. AB′, K étant une constante. Le point d'intersection P des droites BC′, B′C décrit une conique circonscrite au triangle ABC. (Barisien.)

En prenant pour axes de coordonnées AB et AC et en posant $AB=c$, $AC=b$, $AB'=\lambda$, on aura l'équation du lieu (P) en éliminant λ entre les équations

$$\frac{x}{c}+\frac{y}{K\lambda}=1,\quad \frac{x}{\lambda}+\frac{y}{b}=1.$$

Genre de la courbe en supposant K positif ou négatif. Asymptotes. Centre. Courbe rapportée à deux diamètres conjugués ou aux asymptotes.

1163. On projette le sommet C d'un rectangle ABCD en M sur la diagonale BD, et le point M en N et P sur les côtés AB, AD. Démontrer que $\overline{CM}^3=BD.MN.MP$.

1164. Soient xOy un angle aigu quelconque. En un point quelconque A de Ox on élève une perpendiculaire qui rencontre Oy en B ; la perpendiculaire en B à Oy rencontre Ox en C ; la perpendiculaire en C à Ox

coupe Oy en D. Cela posé, si l'on fait $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$, $AB = x$, $BC = y$, $CD = z$, on a les relations :

$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2 - a^2, \quad y^2 = xz, \quad \frac{a^2}{d^2} = \frac{x^2}{z^2}.$$

1165. Il y a 70 nombres de 8 chiffres qui s'écrivent avec quatre chiffres 3 et quatre chiffres 7. 18 de ces nombres sont divisibles par 37.

(Ed. Times.)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

Concours d'admission en 1904.

Composition de mathématiques.

Première question. On donne une sphère de rayon r, de centre 0 origine de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz. Un point de cette sphère primitivement situé en M_0 sur Ox, se déplace uniformément sur le grand cercle M_0N, de M_0 vers N (N sur Oz), avec une vitesse angulaire ω. En même temps, le plan primitivement situé en DM_0N (ou le plan xOz) tourne uniformément autour de ONz, de OM_0N vers OEN (zOy) avec la même vitesse angulaire. Par suite de ce double mouvement, le point mobile considéré, au bout du temps t, occupera une certaine position M.

I. Déterminer en fonction de t les coordonnées du point M, les composantes de sa vitesse v, et celles de son accélération w suivant les directions des axes. Déterminer aussi la grandeur de la vitesse, celle de l'accélération tangentielle w_t et de l'accélération normale w_n.

II. Construire les projections sur les trois plans coordonnés de la trajectoire de M.

III. 1° L'accélération totale de M étant représentée par une droite MW, et cette droite venant percer le plan des xy en P, déterminer dans ce plan le mouvement du point P.

2° Démontrer que la droite MW rencontre une droite fixe.

Deuxième question. Déterminer à 0,001 près la racine positive de l'équation

$$x^3 + x^2 - 27{,}48 = 0,$$

en appliquant la méthode d'approximation de Newton.

CALCUL TRIGONOMÉTRIQUE.

Dans le triangle isoscèle ABC, on a

$$b = c = 35^{m}876, \quad a = 24^{m}853.$$

On demande de calculer

1° la surface du triangle.

2° l'aire du secteur circulaire ABDC dans le cercle de centre A et de rayon AB.

3° le volume engendré par la révolution complète du secteur ABDC tournant autour de son axe de symétrie AD.

EPURE.

On tracera un cadre de 300 mm. de largeur sur 380 mm. de hauteur, et une ligne de terre au milieu de la hauteur.

Une sphère de rayon égal à 40 mm., a son centre O, O' situé à 120 mm. du côté gauche du cadre, à 50 mm. au dessus du plan horizontal, et à 65 mm. en avant du plan vertical.

Un point lumineux (S, S') est à 100 mm. à gauche, à 100 mm. en avant, et à 20 mm. au-dessus du centre de la sphère.

Déterminer par ses deux projections la séparatrice d'ombre propre de la sphère, et ses ombres portées sur les plans de projection; ces dernières seront tracées jusqu'aux limites du cadre.

On déterminera directement : 1° un point courant m, m' de la séparatrice, et la tangente mt, $m't'$ en ce point. 2° les ombres portées, par le point m, m', sur les deux plans de projection et les tangentes aux courbes d'ombres portées. 3° les axes de chacune des projections de la séparatrice. 4° les lignes et les points importants des ombres portées sur les plans de projection.

On emploiera les traits noirs pour tracer les parties vues; les pointe ronds noirs pour les parties cachées; les traits rouges pour les constructions. Les parties dans l'ombre seront couvertes de hachures.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1477. Chercher le lieu des centres des hyperboles équilatères qui touchent une ellipse donnée en l'un de ses points et qui passent par les deux foyers de l'ellipse. (E. N. BARISIEN.)

×**1478.** A un cercle O on inscrit un hexagone DEF'D'E'F' dont les côtés opposés sont parallèles. Désignons les points des concours des diagonales et des côtés non consécutifs comme suit :

$$(DD', EE') \equiv A, \quad (EE', FF') \equiv B, \quad (FF', DD') \equiv C;$$
$$(DF', EF) \equiv A', \quad (DF', E'D') \equiv B', \quad (EF, E'D') \equiv C';$$
$$(D'F, E'F') \equiv A'', \quad (D'F, ED) = B'', \quad (E'F', ED) = C''.$$

Cela posé, 1° O est le centre du cercle inscrit au triangle ABC; 2° les droites A'A'', B'B'', C'C'' passent respectivement par A, B, C et par les points de contact de BC, CA, AB avec le cercle inscrit au triangle ABC; leur point de concours est le point de Gergonne du triangle ABC et le point de Lemoine des triangles A'B'C', A''B''C''; 3° la circonférence de centre A et de rayon AD rencontre EF, DF' en des points G, H situés sur la parallèle à FF' menée par A. (A. C.)

1479. On considère un octaèdre CABA'B'C' dont les diagonales AA', BB', CC' passent par un même point O et sont rectangulaires deux à deux. Démontrer que les orthocentres des huit faces CAB, CBA', ... C'A'B' sont situés sur une même sphère S. (Steiner.)

Si l'on pose $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OA' = a'$, $OB' = b'$, $OC' = c'$, la puissance p de O par rapport à cette sphère et le rayon R sont donnés par

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{aa'} + \frac{1}{bb'} + \frac{1}{cc'},$$

$$\frac{4R^2}{p^2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c'}\right)^2.$$

Lorsque l'octaèdre est inscrit à une sphère de centre ω, la sphère S passe également par les centres de gravité des faces et son centre divise la distance $O\omega$ dans le rapport 1 : 2. (J. Neuberg.)

1480. On donne deux coniques C', C'' dont les axes de symétrie sont dirigés suivant les mêmes droites Ox, Oy. Soient M' un point de C' et M'' un point de C'', tels que les tangentes en ces points aux courbes correspondantes soient parallèles. Trouver l'enveloppe de la droite M'M''. Cas particulier où les coniques C', C'' sont homofocales.

(Arramescu.)

SUR UN COMPLEXE QUADRATIQUE;

par M. Fr. Corin, ingénieur à Sclaigneaux.

M. Fr. Corin nous a remis en 1888, alors qu'il était encore élève-ingénieur des mines, des notes intitulées *Etude partielle d'un complexe*. La valeur et l'intérêt de ce travail nous faisaient espérer que l'auteur compléterait ses recherches, mais la *technique* n'a pas tardé à prendre le pas sur les mathématiques pures. En retrouvant dernièrement le manuscrit dans les archives de *Mathesis*, nous avons vivement regretté d'en avoir retardé si longtemps la publication. Nous le faisons paraître aujourd'hui après quelques retouches et avec des additions, et en le faisant précéder de quelques définitions qui permettront même à un bon élève de première scientifique de comprendre la majeure partie de l'article.

Une droite de l'espace, pour être déterminée, exige quatre conditions *simples*. Toutes les droites qui vérifient une condition simple sont dites former un *complexe*.

Les droites d'un complexe qui passent par un même point, sont, en général, les génératrices d'un certain cône, appelé *cône du complexe*. Il peut arriver que toutes les droites menées par un certain point appartiennent au complexe; un tel point prend le nom de *point principal*. Lorsqu'un cône du complexe se décompose, son sommet devient un *point singulier*.

Les droites d'un complexe qui sont situées dans un même plan, sont, en général, tangentes à une même courbe, appelée *courbe du complexe*. Si toutes les droites d'un plan font partie du complexe, ce plan est nommé *plan principal*. Lorsqu'une courbe du complexe se décompose, son plan devient un *plan singulier*.

L'*ordre* d'un complexe est l'ordre des cônes du complexe ou la *classe* des courbes du complexe; ces deux derniers nombres sont évidemment égaux, car ils expriment combien de droites du complexe sont situées dans un plan donné et passent par un point donné de ce plan. (J. N.)

1. Proposons-nous d'étudier le complexe (u) des droites u dont les distances à deux points donnés A, B sont dans un rapport donné $m : 1$.

Soient C, D les points qui divisent la droite AB, additivement et soustractivement, dans le rapport $m : 1$. Toute droite menée par l'un de ces points appartient au complexe (u); ce sont donc des *points principaux*.

2. Projetons les points A, B, C, D en A′, B′, C′, D′ sur une droite quelconque u du complexe. Nous aurons

$$m = \frac{AA'}{BB'} = \frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AD}{BD} = \frac{A'D'}{B'D'};$$

d'où il résulte que les triangles rectangles AA′C′ et BB′C′ sont semblables

de même que les triangles AA'D' et BB'D'. Par conséquent

$$m = \frac{AC'}{C'B} = \frac{AD'}{BD'};$$

et le lieu des points C', D' est la sphère de diamètre CD.

Ainsi, *le complexe* (κ) *est constitué par les perpendiculaires élevées en un point quelconque* M *de la sphère* (CD) *sur les droites* MC, MD *qui aboutissent aux extrémités* C, D *d'un diamètre fixe de cette surface.*

3. Les perpendiculaires élevées en M sur MC sont situées dans un même plan γ, celles qui sont élevées en M sur MD sont situées dans un second plan δ. On conclut de là que les points de la sphère (CD) sont des points *singuliers* du complexe. C'est pourquoi on dit que la sphère est une *surface singulière* du complexe.

4. Les plans γ et δ se coupent suivant une droite m qui est une ligne *double* du couple de plans γ, δ remplaçant le cône du complexe en M.

Toutes les lignes doubles sont tangentes à la sphère singulière et perpendiculaires à la droite AB.

5. Les droites du complexe qui sont contenues dans un plan mené par AB, passent nécessairement par l'un des points A, B.

On peut dire que l'enveloppe de ces droites est le couple de points AB. Donc tout plan mené par la droite AB est un plan singulier du complexe (κ).

6. Cherchons les droites κ d'un plan π mené par C. D'abord une droite quelconque menée par C dans le plan π fait partie du complexe. Ensuite, le lieu des projections de C sur les autres droites est évidemment la circonférence Σ suivant laquelle π coupe la sphère singulière; ces droites passent par le point C_1 diamétralement opposé à C sur la circonférence Σ.

La courbe du complexe relative à π se compose donc des deux points C, C_1, et l'on voit que tout plan mené par l'un des plans principaux C, D est un plan singulier du complexe.

7. Soit maintenant κ une droite du complexe passant par un point donné N qui n'est pas sur la sphère singulière ni sur la droite AB.

La projection de C sur κ appartient à la circonférence Σ, intersection de la sphère singulière avec la sphère de diamètre CN ou avec le plan perpendiculaire à la droite joignant le milieu O de CD au milieu de CN.

Le cône du complexe, de sommet N, s'appuie sur cette circonférence Σ; il est donc du second ordre.

8. La même conclusion s'applique au cas où N est à l'infini. Mais ce cas peut être établi directement.

Considérons donc les droites u qui sont parallèles à une droite donnée d. Soient A_1, B_1, C_1, D_1 les projections des points A, B, C, D sur un plan λ perpendiculaire à d, et soit P le point de rencontre d'une droite du complexe avec ce plan. Les distances AA′, BB′ se projetant sur λ en vraie grandeur, le rapport $A_1P : B_1P$ étant égal à m, le lieu de P est la circonférence de diamètre C_1D_1, et les droites considérées sont les génératrices d'un cylindre droit.

9. Passons aux droites du complexe contenues dans un plan quelconque π. Le lieu des projections de C et D sur ces droites est la circonférence σ suivant laquelle le plan π coupe la sphère singulière. Si l'on projette les points C et D en C_1, D_1 sur π, les droites considérées s'obtiennent en élevant des perpendiculaires en un point quelconque Q de σ sur les droites QC_1, QD_1. Il en résulte que ces droites enveloppent une conique ayant pour foyers les projections C_1, D_1 de C et D sur le plan π, pour sommets de l'axe focal les extrémités du diamètre de σ dirigé suivant C_1D_1.

La conique sera une ellipse si le plan π passe entre C et D, une hyperbole s'il ne passe pas entre ces points et qu'il rencontre la sphère singulière; elle sera imaginaire si le plan ne rencontre pas cette sphère en des points réels.

Un plan qui est perpendiculaire au diamètre CD en un point compris entre C et D a pour courbe du complexe la circonférence suivant laquelle il coupe la sphère singulière.

Un plan tangent à cette sphère ne contient qu'une seule droite réelle du complexe; celle-ci est perpendiculaire au plan mené par C, D et le point de contact.

Ce qui précède permet au lecteur d'étudier les droites du complexe parallèles à un même plan. (*A continuer.*)

TROIS THÉORÈMES DE MAXIMUM,

par M. A. Aubry.

1. Lemme. On a, en supposant $+kx$ et $-kx$ inférieurs à l'unité,

$$\frac{1-(k-1)x}{1-kx} > 1+x > \frac{1+kx}{1+(k-1)x};$$

faisant successivement $k = 1, 2, 3, \cdots, n$ et multipliant, il vient :

$$\frac{1}{1-nx} > (1+x)^n > 1+nx \tag{1}$$

d'où, si Am est entier

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\pm Am} > 1 \pm A. \tag{2}$$

9. Théorème. *Si les quantités variables $x, y, \cdots z$ sont liées par la relation*

$$Ax + By + \cdots + Cz = M, \tag{α}$$

la fonction $x^a y^b \cdots z^c$ passe par un maximum quand on a

$$\frac{Ax}{a} = \frac{By}{b} = \cdots = \frac{Cz}{c}. \tag{β}$$

(Cauchy, *Calcul différentiel.*)

Les nombres $\alpha, \beta, \cdots \gamma$ étant tels qu'on ait

$$a\alpha + b\beta + \cdots + c\gamma = 0, \tag{γ}$$

on pourra écrire

$$1 = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{ma\alpha + mb\beta + \cdots + mc\gamma}. \tag{δ}$$

Pour plus de généralité, nous supposons, $a, b, \cdots c, \alpha, \beta, \cdots \gamma$ fractionnaires et positifs ou négatifs. Soit m le produit des dénominateurs de tous ces nombres : les nombres $ma\alpha$, $mb\beta$, $\cdots$ seront tous entiers et d'après (2) on pourra poser

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{ma\alpha} > (1+\alpha), \cdots$$

d'où, à cause de (δ)

$$1 > (1+\alpha)^a (1+\beta)^b \cdots (1+\gamma)^c. \tag{ε}$$

Posons $a + b + \cdots + c = S$, $\alpha = \frac{\lambda SA}{aM}$, $\beta = \frac{\mu SB}{bM}$, $\cdots \gamma = \frac{\nu SC}{cM}$, ce qui donnera, à cause de (γ)

$$\lambda A + \mu B + \cdots + \nu C = 0; \tag{ζ}$$

(ε) deviendra après quelques transformations :

$$\left(\frac{aM}{AS}\right)^a \left(\frac{bM}{BS}\right)^b \cdots \left(\frac{cM}{CS}\right)^c > \left(\frac{aM}{AS}+\lambda\right)^a \left(\frac{bM}{BS}+\mu\right)^b \cdots \left(\frac{cM}{CS}+\nu\right)^c. \tag{1}$$

Or, on a

$$A\left(\frac{aM}{AS}\right)+B\left(\frac{bM}{BS}\right)+\cdots=A\left(\frac{aM}{AS}+\lambda\right)+B\left(\frac{bM}{BS}+\mu\right)+\cdots=M.$$

Les valeurs $x=\frac{aM}{AS},\cdots$ satisfont donc à (α) et en même temps à (β).

Corollaires I. Pour $A=B=\cdots=1$, et $a=b=\cdots=1$, on retrouve le théorème des deux moyennes.

II. Considérons le cas de deux variables, fréquent dans les applications élémentaires. On peut dire que, *a et b étant quelconques, le maximum de $x^a y^b$ pour* $Ax+By=M$ *a lieu quand on a*

$$\frac{Ax}{a}=\frac{By}{b}=\frac{M}{a+b},$$

d'où $$x=\frac{aM}{A(a+b)},\quad y=\frac{bM}{B(a+b)}.$$

III. Le maximum de $(\alpha+x)^a\cdots(\gamma+z)^c$ pour $Ax+\cdots+Cz=M$ a lieu quand on a

$$A\frac{x+\alpha}{a}=\cdots=C\frac{z+\gamma}{c},$$

puisque la somme $A(x+\alpha)+\cdots+C(z+\gamma)$ a une valeur constante.

IV. La condition $A^aB^b\cdots C^c=$ constante se ramène au théorème, puisqu'en posant

$$\log A=\alpha,\quad \ldots,\quad \log C=\gamma,$$

on a $$ax+\cdots+\gamma z=\text{constante}.$$

V. Toutes ces propositions de maximum ont leurs corrélatives de minimum; par exemple le cor. III donne la suivante : *le produit $(\alpha+x)^a\cdots(\gamma+z)^c$ étant constant, le minimum de la fonction* $Ax+\cdots+Cz$ *a lieu quand on a*

$$A\frac{\alpha+x}{a}=\cdots=C\frac{\gamma+z}{c}.$$

8. Lemme. A cause du cor. I, p étant $>q$, le produit de $p-q$ facteurs égaux à l'unité multiplié par celui de q facteurs positifs égaux à $1+x$, est $\leq$ la p^e puissance de la moyenne arithmétique de ces mêmes facteurs, laquelle est $1+\frac{qx}{p}$. On a donc

$$(1+x)^{\frac{q}{p}}\leq 1+\frac{qx}{p}. \qquad (3)$$

4. Théorème. *Les variables $x, y \cdots z$ étant liées par la relation $x^\alpha y^\beta \cdots z^\gamma =$ constante la fonction $(1+x)^a (1+y)^b \cdots (1+z)^c$ passe par un minimum quand on a*

$$\frac{a}{\alpha}\frac{x}{1+x} = \frac{b}{\beta}\frac{y}{1+y} = \cdots = \frac{c}{\gamma}\frac{z}{1+z}.$$

Soit l'égalité

$$(A+\lambda)^\alpha (B+\mu)^\beta \cdots (C+\nu)^\gamma = A^\alpha B^\beta \cdots C^\gamma$$

qui exige que certains des nombres $\lambda, \mu, \cdots$ soient positifs et d'autres négatifs. Si on a

$$\frac{a}{\alpha}\frac{A}{1+A} = \frac{b}{\beta}\frac{B}{1+B} = \cdots = \frac{c}{\gamma}\frac{C}{1+C}$$

(α) peut s'écrire

$$\left[\left(1+\frac{\lambda}{A}\right)^{\frac{A}{1+A}}\right]^a \left[\left(1+\frac{\mu}{B}\right)^{\frac{B}{1+B}}\right]^b \cdots \left[\left(1+\frac{\nu}{C}\right)^{\frac{C}{1+C}}\right]^c = 1.$$

Les nombres A, B, ··· C étant positifs, on a $A < 1+A$, ··· Il y a donc

$$\left(1+\frac{\lambda}{1+A}\right)^a \left(1+\frac{\mu}{1+B}\right)^b \cdots \left(1+\frac{\nu}{1+C}\right)^c > 1$$

ou bien

$$(1+A+\lambda)^a \cdots (1+C+\nu)^c > (1+A)^a \cdots (1+C)^c.$$

Corollaires I. Changeons x en $\frac{x+A'}{A''-A'}$, y en $\frac{y+B'}{B''-B'}$, ··· le théorème sera généralisé ainsi : *les variables étant liées par la relation*

$$(x+A')^\alpha \cdots (z+C')^\gamma = \text{const}^{te}$$

la fonction $(x+A'')^a \cdots (z+C'')^c$ passe par un minimum quand on a

$$\frac{a}{\alpha}\frac{x+A'}{x+A''} = \cdots = \frac{c}{\gamma}\frac{z+C'}{z+C''}.$$

II. Si les nombres $\alpha, \beta, \cdots \gamma$, $a, b, \cdots c$ sont tous égaux à l'unité on retrouve un théorème de Desboves, dont on a ainsi une nouvelle démonstration.

5. Théorème. *La moyenne des p^{es} puissances de n nombres positifs est plus grande que la p^e puissance de la moyenne arithmétique de ces mêmes nombres* (Journ. *Math.*, t. IV, 1838).

Appelons S la somme des n nombres positifs $a, b, \cdots c$; on aura :

$$\left(1+\frac{na-S}{S}\right)^p+\cdots+\left(1+\frac{nc-S}{S}\right)^p$$
$$>\left(1+p\frac{na-S}{S}\right)+\cdots+\left(1+p\frac{nc-S}{S}\right)=n,$$

ou bien
$$\frac{a^p+\cdots+c^p}{n}>\left(\frac{a+\cdots+c}{n}\right)^p \qquad (4)$$

6. Théorème. Plus généralement, *m étant un nombre quelconque >1, la fonction $u=\alpha x^m+\cdots+\gamma z^m$ des variables positives liées par la relation*

$$Ax+\cdots+Cz=M$$

passe par un minimum quand on a, en outre,

$$\frac{\alpha x^{m-1}}{A}=\cdots=\frac{\gamma z^{m-1}}{C}. \qquad (\alpha)$$

Les nombres $x', \cdots z', a, \cdots c$ étant positifs, on a :

$$a\left(1+\frac{x'-av}{av}\right)^m+\cdots+c\left(1+\frac{z'-cv}{cv}\right)^m$$
$$\geq a+\cdots+c+m\frac{x'-av+\cdots+z'-cv}{v}$$

d'où, si $v=\dfrac{x'+\cdots+z'}{a+\cdots+c}$, et, après réduction, cette généralisation de (4)

$$u\equiv\frac{x'^m}{a^{m-1}}+\cdots+\frac{z'^m}{c^{m-1}}\geq\frac{(x'+\cdots+z')^m}{(a+\cdots+c)^{m-1}}. \qquad (5)$$

Si nous posons

$$a^{m-1}=\frac{A^m}{\alpha},\quad\cdots\quad c^{m-1}=\frac{C^m}{\gamma}$$

et si nous changeons $x', \cdots z'$ en $Ax, \cdots Cz$, (5) devient

$$u\geq\frac{M^m}{N^{m-1}} \qquad (\beta)$$

en posant

$$\sqrt[m-1]{\frac{A^m}{\alpha}}+\cdots+\sqrt[m-1]{\frac{C^m}{\gamma}}=N.$$

Il reste à faire voir que le second membre de (β) est la valeur que prend u quand on a les relations (α). En effet, on tire de celles-ci

$$\frac{\alpha x^m}{Ax} = \cdots = \frac{\gamma z^m}{Cz} = \frac{U}{M},$$

en appelant U la valeur correspondante de u. De là les relations

$$\frac{A^m U}{\alpha} = MA^{m-1}x^{m-1}, \quad \ldots, \quad \text{d'où} \quad \sqrt[m-1]{NU} = \sqrt[m-1]{M^m}.$$

Corollaires I. Changeons x en x^g et m en $\frac{f}{g}$, on arrive à cette conclusion que *si on a une fonction* $\alpha x^f + \cdots + \gamma z^f$ *des variables* $x, \cdots z$ *liées par la relation* $Ax^g + \cdots + Cz^g = M$, *f étant un nombre quelconque supérieur à g, cette fonction passe par un minimum quand on a, en outre,*

$$\frac{\alpha x^{f-g}}{A} = \cdots = \frac{\gamma z^{f-g}}{C}.$$

II. *Soit à trouver le minimum de la fonction*

$$\alpha(1+x)^m + \beta(1+y)^m + \cdots + \gamma(1+z)^m$$

les variables étant liées par la relation

$$a^x b^y \cdots c^z = M.$$

On posera $\log a = A$, $\log b = B$, $\ldots$, $\log c = C$, $\log M = \mu$, ce qui donnera $A(1+x) + \cdots + C(1+z) = \mu + A + \cdots + C =$ constante. On est ramené au théorème.

III. Le maximum, le minimum ou la constance de $\alpha x + \cdots + \gamma z$ a lieu en même temps que ceux de $\alpha(x+a) + \cdots + \gamma(z+c)$. On peut donc dire que *si* $ax + \cdots + \gamma z =$ *constante et* $m > 1$, *l'expression*

$$A\sqrt[m]{a+x} + \cdots + C\sqrt[m]{c+z}$$

passe par un maximum si on a

$$A\sqrt[m]{(a+x)^{m-1}} = \cdots = C\sqrt[m]{(c+z)^{m-1}}.$$

NOTES GÉOMÉTRIQUES SUR LE TRIFOLIUM DROIT,

par M. A. Droz-Farny.

Bibliographie. — H. Brocard : *Sur le trifolium*, J. M. S., 1891; G. de Longchamps : *Essai sur la géométrie de la règle*, chapitre XII (Les quartiques unicursales), J. M. S. 1886 et *Géométrie analytique*; E. Jurisch : *Questions de géométrie descriptive*, Problème 4.

Au concours d'admission, à l'école centrale de Paris, 1re Session de 1877, on a proposé la question suivante de géométrie descriptive :

On donne 1° *un cylindre ayant pour base un cercle de diamètre* OC, *situé dans le plan horizontal de projection et dont les génératrices sont parallèles à une droite de front donnée.* 2° *Un cône de sommet* S, *situé sur la génératrice du cylindre passant par* O *et dont la projection horizontale coïncide avec* C *et dont le cercle de base situé sur le plan horizontal a pour centre* O *et pour rayon* OC.

Chercher l'intersection des deux corps.

Les deux surfaces du second degré considérées ont un plan principal commun qui est parallèle au plan vertical de projection.

La projection verticale de l'intersection est donc une courbe double du second degré; il est facile de démontrer que c'est une hyperbole (voir Jurisch, *loc. cit.*).

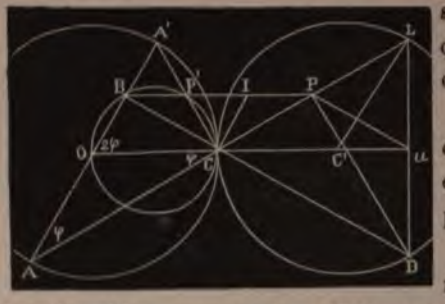
La projection horizontale est une quartique à trois boucles et il est aisé, en la construisant par le procédé classique employé dans la recherche de l'intersection du cylindre et du cône, de l'identifier avec le trifolium droit.

Nous trouverons ainsi un nouveau mode de construction de cette intéressante courbe, et nous en déduirons les constructions indiquées par MM. G. de Longchamps et H. Brocard.

Un diamètre quelconque du cercle O rencontre la circonférence (O) en A et A′ et la circonférence (OC) en B. Les deux cordes CA et CA′ coupent la parallèle à OC menée par B en deux points P et P′ dont le lieu est un trifolium droit.

La parallèle menée par B coupe le cercle (OC) en deux points B et B′. Or, les deux points P et P′ de la courbe, situés sur cette droite et relatifs au diamètre OB, ainsi que les deux points analogues relatifs au diamètre OB′, sont les quatre seuls points de la courbe sur cette droite. C'est donc bien une quartique.

Soit I le point milieu du segment PP'. Le triangle isoscèle ICP' étant semblable à BA'P', il en résulte que CI est parallèle à OA'; donc BI = OC = constant.



Le lieu de I est donc la circonférence symétrique de la circonférence (OC) par rapport à la perpendiculaire en C sur OC.

Comme CI = IP' = IP on retrouve ainsi la première construction bien connue du trifolium droit :

On donne une circonférence et un point fixe C *sur cette dernière. Par un point* I *variable de la courbe, on mène une parallèle au diamètre du point* C *et sur cette dernière on rabat suivant* IP *et* IP' *la corde* IC. P *et* P' *ont pour lieu géométrique commun un trifolium droit.*

Cette construction permet de construire simplement et simultanément les tangentes à la courbe en P et P' :

On élève en C, *une perpendiculaire sur* CI ; *elle rencontre en* X *la tangente en* I, *au cercle lieu de* I ; *les droites* xP *et* xP' *sont les tangentes cherchées.*

La perpendiculaire élevée en P sur CP, rencontre la droite symétrique de CP par rapport à l'axe OC en un point D. Le triangle DCP est semblable à CBO. On a donc

$$\frac{CP}{DC} = \frac{OB}{OC} = \frac{OB}{OA} = \frac{CP}{CA} \quad \text{et, de là, } CA = CD.$$

Le lieu de D est donc la circonférence de centre C' (OC = CC') symétrique de la circonférence (O) par rapport à C.

CP coupe cette circonférence en L ; évidemment D et L sont symétriques par rapport au diamètre CC'. De là le théorème :

On donne une circonférence et un de ses diamètres CC'.

Une corde variable LD *se meut en restant perpendiculaire à* CC'. *Les sommets du triangle orthique de* CLD *décrivent l'un le diamètre fixe, les deux autres un trifolium droit.*

Un axe OC étant donné avec un point fixe, le pôle C, si d'un point variable D, on abaisse une perpendiculaire DP sur la symétrique CP de CD par rapport à l'axe, à chaque point D correspond un point P bien

déterminé. Comme il est facile de le constater, la transformation est crémonienne du troisième ordre.

Si D décrit une certaine courbe, P en décrit une seconde, la transformée de la première. On peut donc dire que le trifolium droit est la transformée du cercle dans une transformation crémonienne du troisième ordre.

Soit u le point milieu de LD, on voit que 1° $uP = uL$ et que 2° uP est perpendiculaire sur le rayon C'L.

De là encore deux autres modes de construction de la courbe.

Ajoutons que ces différentes constructions se prêteraient toutes à une étude synthétique du trifolium.

EXERCICES SUR L'HYPERBOLE $xy = 1$,

par J. Neuberg.

1. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) les coordonnées de quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 de l'hyperbole équilatère $xy = 1$. Les coefficients angulaires des cordes A_1A_2, A_3A_4 sont

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{x_1x_2}, \quad m' = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4} = -\frac{1}{x_3x_4}.$$

Si ces droites sont rectangulaires, la condition $mm' = -1$ donne

$$x_1x_2x_3x_4 = -1. \tag{1}$$

La symétrie de cette relation montre que les cordes A_1A_3 et A_2A_4, A_1A_4 et A_2A_3 sont également rectangulaires. Autrement dit, A_4 est l'orthocentre du triangle $A_1A_2A_3$, ou encore *toute hyperbole équilatère circonscrite à un triangle passe aussi par l'orthocentre* (théorème connu).

Remarque. Si les axes sont obliques et que l'on remplace la relation $mm' = -1$ par $mm' = K$, l'égalité (1) se change en $x_1x_2x_3x_4 = K^{-1}$. On en déduit le théorème suivant : Etant données dans un même plan une hyperbole et une conique centrée dont deux diamètres conjugués sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole, si par chaque sommet d'un triangle inscrit à l'hyperbole on mène une parallèle au diamètre conjugué avec le côté opposé par rapport à la seconde conique, les trois parallèles se rencontrent en un point de l'hyperbole.

Conséquence. Soient abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ trois triangles inscrits à une hyperbole équilatère et d'orthocentres d, d', d''. Si α, β, γ, δ sont les orthocentres des triangles $aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$ et $dd'd''$, δ est l'orthocentre du triangle $\alpha\beta\gamma$. (Duporcq, NAM, 1903, 237.)

En effet, si (x_a, y_a), (x'_a, y'_a) ··· sont les coordonnées des points a, a', ···, l'équation de l'hyperbole étant $xy = 1$, on a

$$x_a x_b x_c x_d = -1, \quad x'_a x'_b x'_c x'_d = -1, \quad x''_a x''_b x''_c x''_d = -1,$$
$$x_a x'_a x''_a x_\alpha = -1, \quad x_b x'_b x''_b x_\beta = -1, \quad x_c x'_c x''_c x_\gamma = -1,$$
$$x_d x'_d x''_d x_\delta = -1.$$

En divisant le produit des quatre dernières égalités par le produit des trois premières, on trouve $x_\alpha x_\beta x_\gamma x_\delta = -1$; par analogie $y_\alpha y_\beta y_\gamma y_\delta = -1$. Le théorème est donc démontré.

2. Si les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 de l'hyperbole équilatère $xy = 1$ sont sur une même circonférence, on a l'égalité

$$\begin{vmatrix} x_i^2 + y_i^2 & x_i & y_i & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

où le déterminant est dénoté par sa première ligne. En remplaçant y par $\frac{1}{x}$ on trouve

$$\begin{vmatrix} x_i^4 + 1 & x_i^3 & x_i & x_i^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} x_i^4 & x_i^3 & x_i & x_i^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_i^3 & x_i & x_i^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ce que l'on peut encore écrire ainsi

$$(x_1 x_2 x_3 x_4 - 1) \begin{vmatrix} x_i^3 & x_i^2 & 1 & x_i \end{vmatrix} = 0.$$

On a ainsi la condition

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = 1. \qquad (3)$$

En comparant les relations (1) et (3), on peut énoncer le théorème suivant :

Un triangle $A_1A_2A_3$ étant inscrit à une hyperbole équilatère, la circonférence circonscrite à ce triangle rencontre l'hyperbole en un quatrième point A'_4, qui est le symétrique de l'orthocentre A_4 par rapport au centre de l'hyperbole.

Comme l'orthocentre est le centre de similitude du cercle $A_1A_2A_3$ et du cercle des neuf points, le milieu de $A_4A'_4$ est sur le second cercle; d'où le théorème connu : *le cercle des neuf points d'un triangle inscrit à une hyperbole équilatère passe par le centre de cette hyperbole.*

Remarque. Cette proposition peut encore être généralisée comme la

précédente, en supposant les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 sur une hyperbole non équilatère $xy = 1$ et sur une conique

$$y^2 - Kx^2 + mx + ny + 1 = 0,$$

ayant deux diamètres conjugués parallèles aux asymptotes de l'hyperbole.

8. Les développements qui vont suivre, nous ont été suggérés par une communication de M. Speckman (Arnhem).

Soient A_1, A_2, A_3, A_4 quatre points quelconques d'une conique Σ. Projetons le point A_4 en B_1, B_2, B_3, sur les côtés A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 du triangle $A_1A_2A_3$, les projetantes étant respectivement parallèles aux diamètres conjugués avec ces côtés. *Les trois points* B_1, B_2, B_3 *sont situés sur une même droite* d_4. Cette généralisation du théorème de la droite de Simson est due à Steiner (*Œuvres complètes*, t. I, p. 203); nous allons la vérifier pour quatre points de l'hyperbole $xy = 1$.

Les droites A_2A_3, A_4B_1 ont pour équations

$$y - y_2 = -\frac{1}{x_2x_3}(x - x_2), \quad y - y_4 = \frac{1}{x_2x_3}(x - x_4);$$

en ajoutant ces égalités on obtient l'ordonnée de B_1, savoir :

$$y = \frac{1}{2}\left(y_2 + y_4 + \frac{1}{x_3} - \frac{x_4}{x_2x_3}\right) = \frac{1}{2}(y_2 + y_4 + y_3 - x_4y_2y_3).$$

Par analogie

$$x = \tfrac{1}{2}(x_2 + x_4 + x_3 - y_4x_2x_3).$$

Si l'on pose

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2X, \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 2Y,$$

$$y_1 + x_4y_2y_3 = 2z_1, \quad y_4x_1x_2x_3 = m,$$

les coordonnées de B_1 prennent la forme

$$y = Y - z_1, \quad x = X - mz_1.$$

L'équation de la droite B_1B_2 sera donc

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ X - mz_1 & Y - z_1 & 1 \\ X - mz_2 & Y - z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Retranchons des deux premières colonnes du déterminant la troisième

multipliée respectivement par X, Y; ensuite de la première, la seconde multipliée par m; l'équation (4) deviendra

$$x - X - m(y - Y) = 0, \text{ ou } x_4(x - X) - x_1x_2x_3(y - Y) = 0. \quad (5)$$

Sa forme symétrique indique que B_3 est sur la droite B_1B_2; de plus, cette ligne passe par le point (X, Y), symétrique du centre de l'hyperbole par rapport au centre des moyennes distances des quatre points A_1, A_2, A_3, A_4. Les droites d_1, d_2, d_3, analogues à d_4, qu'on obtient en projetant les points A_1, A_2, A_3 respectivement sur les côtés des triangles $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ passent évidemment par le même point (X, Y).

Le dernier théorème, pour quatre points d'une même circonférence est dû à M. Emile Lemoine (NAM, 1869, p. 174 et 317).

L'équation (5), si l'on remplace y_4 par $\frac{1}{x_4}$, sera du 3e degré en x_4. On conduit de là que l'enveloppe de la droite d_4, lorsque A_4 parcourt l'hyperbole, est de la troisième classe.

En transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au point qui a pour coordonnées $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}$, $\frac{y_1 + y_2 + y_3}{2}$, on donne à l'équation (5) la forme

$$x_4(2x - x_4) - x_1x_2x_3(2y - y_4) = 0,$$

et l'on trouve pour l'enveloppe les équations en coordonnées ponctuelles ou tangentielles (u, v, w)

$$(4xy + 9)^2 = 16(3yx_1x_2x_3 - 2x^2)(3xy_1y_2y_3 - 2y^2),$$
$$x_1x_2x_3u^3 + y_1y_2y_3v^3 - 2uvw = 0.$$

4. Soient A_1, A_2, A_3, A_4 quatre points quelconques d'une conique centrée. Projetons le point A_4 en C_1, C_2, C_3 sur A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 les projetantes étant respectivement parallèles aux diamètres conjugués avec les directions A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3. Autrement dit, si A_1', A_2', A_3', sont les points diamètralement opposés à A_1, A_2, A_3 sur la conique, les droites A_4A_1', A_4A_2', A_4', A_3 rencontrent A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 en C_1, C_2, C_3. *Ces points sont sur un même diamètre de la conique.*

Un calcul très simple vérifie cette propriété lorsque les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont sur l'hyperbole $xy = 1$. En effet, les droites A_2A_3, A_4C_1 ont pour équations

$$y - y_2 = -\frac{1}{x_2x_3}(x - x_2), \quad y - y_4 = \frac{1}{x_1x_4}(x - x_4),$$

ou $\quad yx_2x_3 + x - x_3 - x_2 = 0, \quad yx_1x_4 - x - x_4 + x_4 = 0.$

En ajoutant ces égalités membre à membre on trouve pour l'ordonnée de C_1

$$y = \frac{x_1 + x_2 + x_3 - x_4}{x_2x_3 + x_1x_4};$$

par analogie

$$x = \frac{y_1 + y_2 + y_3 - y_4}{y_2y_3 + y_1y_4} = x_1x_2x_3x_4 \frac{y_1 + y_2 + y_3 - y_4}{x_2x_3 + x_1x_4},$$

d'où

$$\frac{y}{x} = y_1y_2y_3y_4 \frac{x_1 + x_2 + x_3 - x_4}{y_1 + y_2 + y_3 - y_4}.$$

Ce résultat étant symétrique par rapport à A_1, A_2, A_3, le théorème est démontré.

5. Reprenons les relations

$$x_1x_2x_3x_4 = 1, \qquad y_1y_2y_3y_4 = 1, \tag{A}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = -1, \quad y_1y_2y_3y_4 = -1 \tag{B}$$

dont les premières caractérisent quatre points $A_1A_2A_3A_4$ de l'hyperbole $xy = 1$, appartenant à une même circonférence, et dont les secondes définissent les quatre sommets d'un quadrangle orthogonal inscrit.

Le cercle osculateur en un point A_r rencontre la courbe en trois points confondus en A_r et en un quatrième point $A'_r(x'_r, y'_r)$; d'après les formules (A), on a

$$x_r^3x'_r = 1, \quad y_r^3y'_r = 1, \quad \text{d'où} \quad x'_r = y_r^3, \quad y'_r = y_r^3.$$

Par conséquent, les cercles osculateurs en quatre points concycliques ou aux quatre sommets d'un quadrangle orthogonal inscrit rencontrent la courbe en quatre nouveaux points formant un système analogue.

6. On trouve facilement pour l'équation de la corde d'osculation $A_1A'_1$ (*)

$$y - y_1 = -x_1^2(x - x_1).$$

Le coefficient angulaire de cette droite est donc $-x_1^2 = -\frac{x_1}{y_1}$; elle est par conséquent perpendiculaire au diamètre OA_1. Cette propriété

(*) M. Schoute appelle la droite $A_1A'_1$ *l'antinormale* en A_1, et l'enveloppe de cette droite, l'antidéveloppée de l'hyperbole (AFAS, 1884, p. 43). Au sujet de cette question, voir aussi NCM, V, p. 399.

résulte aussi de ce que la tangente en A_1 et la corde $A_1A'_1$ sont antiparallèles par rapport à un axe et que deux diamètres conjugués font les angles complémentaires avec cet axe.

Si la corde $A_1A'_1$ doit passer par un point donné $P(\alpha, \beta)$, on a

$$\beta - y_1 + x_1^2(\alpha - x_1) = 0,$$

ou en remplaçant y_1 par $\frac{1}{x_1}$,

$$\alpha x_1^4 - \alpha x_1^3 - \beta x_1 + 1 = 0. \qquad (C)$$

A chacune des racines x_1, x_2, x_3, x_4 de cette équation correspond une corde d'osculation passant par P. Par suite l'enveloppe de cette corde qui est une antipodaire centrale de l'hyperbole, est de la 4e classe. De l'équation (C) on déduit facilement

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \alpha. \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \beta, \qquad (D)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = 1, \quad y_1y_2y_3y_4 = 1, \qquad (E)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \alpha^2, \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = \beta^2,$$

$$\overline{OA_1}^2 + \overline{OA_2}^2 + \overline{OA}^2 + \overline{OA_4}^2 = \overline{OP}^2.$$

Les équations (D) montrent que le centre des moyennes distances des points A_1, A_2, A_3, A_4 divise la droite OP dans le rapport 1 : 3. Des égalités (E) on conclut que ces points appartiennent à une même circonférence, résultat déjà connu puisque OA_1 par exemple est perpendiculaire à A_1P.

NOTES MATHÉMATIQUES.

21. Théorème. *Une pyramide hexagonale de cubes, disposés en maçonnerie, contient autant de cubes qu'un hexaèdre régulier, le nombre des cubes d'un côté de base étant le même de part et d'autre.* Soit n le nombre des cubes d'un côté A_0A_n de l'hexagone régulier.

La première base hexagonale contiendra

$$B_n = 2\{n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (2n-1)\} - (2n-1)$$
$$= 3n^2 - 3n + 1$$

cubes ; en sorte que la somme S cherchée sera :

$$S = B_n + B_{n-1} + B_{n-2} + \cdots + B_2 + B_1$$
$$= 3S_2 - 3S_1 + S_0 = n^3,$$

en représentant par S_p la somme des puissances $p^{ièmes}$ des n premiers

nombres entiers et observant que

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad S_1 = \frac{n(n+1)}{2}; \quad S_0 = n.$$

(E. Barbette.)

28. *Exercice de mathématiques élémentaires.* Trouver trois cercles A_1, B_1, C_1 qui se touchent extérieurement deux à deux et qui touchent une circonférence donnée O aux points donnés A, B, C.

(R. F. Davis).

Si A, B, C sont les angles du triangle ABC et R, α, β, γ les rayons des cercles O, A, B, C, les triangles A_1OB_1, B_1OC_1, C_1OA_1 donnent

$$(r+\beta)^2 = (R+\alpha)^2 + (R+\beta)^2 - 2(R+\alpha)(R+\beta)\cos 2C,$$

ou

$$(R+\alpha)(R+\beta) = \alpha\beta \operatorname{cosec}^2 C, \text{ etc.}$$

On en déduit

$$\frac{R}{\alpha} = \cot B + \cot C - 1, \text{ etc.}$$

BIBLIOGRAPHIE.

Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie bearbeitet von E. Study, o. Professor an der Universität Greifswalde. Leipzig, Teubner, 1903 (In-8° de XIII-603 pp. avec 46 figures dans le texte). Prix : 21 marcs.

M. Study, aujourdhui professeur à l'Université de Bonn, où il a succédé à Lipschitz, est l'auteur de l'article remarquable sur les *grandeurs complexes ordinaires et d'un ordre supérieur* dans l'*Encyclopedie der Mathematischen Wissenschaften*, ainsi que de quelques autres travaux de mérite. La Géométrie des dynames ne manquera pas non plus d'attirer l'attention des géomètres tant par les idées nouvelles que par les méthodes nouvelles qui y sont développées.

Le cadre de *Mathesis* ne nous permettant pas une analyse détaillée de cet ouvrage, nous devons nous borner à un résumé du prospectus et à la reproduction de la table des matières, que nous faisons suivre de l'explication de quelques termes propres à l'auteur; d'ailleurs nous n'avons pas la compétence nécessaire pour porter un jugement sur un ouvrage rempli de tant de *nouveautés*.

Dans la Section I, M. Study montre que les propositions connues sur les systèmes de segments rectilignes qui ont pour base le parallélogramme des forces, ne sont qu'un premier chapitre d'une théorie géométrique plus étendue.

Dans la Section II, les mêmes matières sont traitées analytiquement, avec les ressources des notations symboliques et des invariants.

La Section III a un caractère moins élémentaire. Elle donne une théorie des complexes linéaires, un sujet qui a de grandes affinités avec la géométrie des systèmes de forces et qui, sous le nom de *géométrie des vis*, a une certaine

importance pour la cinématique et la mécanique des corps solides. Cette théorie est fondée ici sur des bases nouvelles et est en rapport avec une nouvelle géométrie réglée.

Table des matières. *Section* I. (p. 1-121). Introduction. 1. La croix de lignes. Les mouvements. 2. Collinéations et corrélations qui sont liées à un mouvement. 3. Addition géométrique des barres (Stäbe). 4. Addition géométrique des coins. 5. Suite; sommes formelles de coins. 6. Superposition linéaire des mouvements. 7. Addition géométrique des moteurs. 8. Addition géométrique des moussoirs (Quirle). 9. Superposition corrélative des mouvements. 10. Addition géométrique des impulseurs. 11 et 12. Addition stéréométrique des moteurs. 13. Superposition stéréométrique des mouvements. 14. Récapitulation. Etat complet de la théorie. 15. Dynames et mouvements infiniment petits.

Section II. (p. 121-225). Introduction. 16. Coordonnées. Formes linéaires et bilinéaires. 17. Fonctions métriques. 18. Complexes linéaires, vecteurs, barres. 19. Sommes géométriques de barres, coins et moussoirs. 20 Barres, coins et moussoirs adjoints. 21. Représentation paramétrique des mouvements et des renversements (symétries). 22. Sommes géométriques de moteurs et d'impulseurs. 23. Principe de translation. 24. Applications; Trigonométrie dans l'espace réglé, sommes stéréométriques de moteurs. 25. Superposition stéréométrique des mouvements.

Section III (p. 226-534). Introduction. 26. Projectivités dualistiques et radiales. 27. L'espace réglé comme *continuum*. 28. Rayons imaginaires. 29. Classification des systèmes linéaires de complexes du premier ordre. 30. Chaînes à une et à deux dimensions. 31. Chaînes à trois dimensions. Complexes quadratiques réguliers. 32. Représentation du premier continuum naturel de rayons par une multiplicité de points (Punktmannigfaltigkeit). 33. Congruence aplanaire de chaînes comme élément de l'espace. Analogies entre la géométrie euclidienne et la géométrie projective radiale. 34. Le faisceau de parallèles comme élément de l'espace. 35. Compléments divers. 36. Suite de la classification des systèmes linéaires de complexes du premier ordre. 37. Gerbes aplanaires de complexes du premier ordre et congruences aplanaires de chaînes du premier type. 38. Suite. Introduction de coordonnées et de fonctions elliptiques. 39. Gerbes spéciales de complexes linéaires et de chaînes à deux dimensions. 40. De la mobilité virtuelle d'un corps solide.

Supplément (p. 555-597). Bases d'une nouvelle méthode de cinématique.

Voici l'explication de quelques termes employés par M. Study.

Une force est représentée par un segment de droite, de longueur déterminée, qu'on peut transporter sur son support; un tel segment est désigné par le mot *stab* (barre, bâton). Un couple de forces est représenté par une droite de longueur déterminée, perpendiculaire en un point quelconque du plan du couple; cette droite représentative qu'on peut déplacer parallèlement à elle-même, est un *vecteur*. Une croix de lignes (Linienkreuz) est la figure formée par une droite a à distance finie et la droite b située à l'infini dans un plan perpendiculaire à a. Le *coin* est la figure formée par deux plans non rectangulaires φ, φ'; il a pour *ouverture* la quantité $\operatorname{tg}(\varphi, \varphi')$ et est représenté par une droite de longueur $\operatorname{tg}(\varphi, \varphi')$, portée sur l'intersection des plans φ, φ'; l'addition de deux coins qui ont une face commune correspond à l'addition géométrique de leurs

droites représentatives. Un *moteur* est l'ensemble de deux droites non rectangulaires X, Y; il a pour *ouverture* l'angle (X, Y), pour *longueur* la plus courte distance des droites X, Y; si cette longueur est nulle, le moteur devient un *roteur*; si l'ouverture est nulle, il se change en un *translateur*. Un *mousoir* est la figure formée par un plan π, un point extérieur P et le faisceau de droites menées dans le plan π par la projection de P sur π. Un système quelconque de forces agissant sur un corps solide est une *dyname*; généralement il se réduit à une force R et à un couple W situé dans un plan perpendiculaire à la direction de R, de sorte qu'une dyname peut se représenter géométriquement par une barre et un vecteur portés sur la droite R. (J. N.)

Œuvres scientifiques de L. Lorenz, revues et annotées par H. VALENTINER, publiées aux frais de la fondation Carlsberg. Tome second. Deuxième fascicule. Copenhague, Lehmann et Stage, 1904 (In 8° de XXII pages et pp. 317-583).

L'éminent physicien danois, Louis Valentin Lorenz (18 janvier 1829-9 juin 1891), est, comme l'on sait, le créateur (1867) d'une théorie électromagnétique de la lumière, rivale de celle de Maxwell, et il a aussi écrit maints mémoires sur diverses questions difficiles de physique mathématique. M. Valentiner a traduit en français et publié dans le tome I et dans le premier fascicule du tome II de sa belle édition des œuvres de Lorenz, toutes les recherches de celui-ci sur la physique, en y ajoutant de précieuses notes explicatives. — Il vient de faire paraître le second fascicule du tome II, où l'on trouve d'abord une biographie et une analyse de l'ensemble des travaux de Lorenz, puis la collection de ses mémoires de mathématiques (sur le nombre des nombres premiers; sur le développement des fonctions au moyen des intégrales définies; sur certaines intégrales; sur la compensation des erreurs d'observations; etc.). Comme mathématicien, Lorenz n'est ni assez clair, ni assez rigoureux, mais il est original et comme le dit M. Valentiner, « il a un sens très fin de la valeur des résultats approchés, même quand il ne peut donner aucune limite des erreurs commises ». Très probablement les mémoires dont nous avons cité les titres méritent une étude approfondie, parce qu'ils contiennent des vues nouvelles. (P. M.)

Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques par ED. A.-FOUET, professeur à l'Institut catholique de Paris. Seconde partie. Théorèmes d'existence. Étude des fonctions analytiques au point de vue de Cauchy, de Weierstrass, de Riemann. Paris, Gauthier-Villars, 1904 (In-8° de XI-299 pages). Prix : 10 francs.

Le titre complet de la seconde partie de ce savant ouvrage, que nous avons transcrit en entier, suffit pour en faire connaître l'objet à ceux qui s'occupent des théories difficiles et nullement élémentaires qui y sont exposées avec une science et une érudition remarquables. Le livre de M. A.-Fouet est le seul manuel de la théorie des fonctions analytiques qui fasse connaître jusqu'aux plus récentes recherches sur cette partie de la science mathématique : c'est le plus bel éloge que l'on en puisse faire. (P. M.)

L'Euclide emendato del P. Gerolamo Saccheri. Traduzione e note del Prof. G. Boccardini. Con 55 incisioni. Milano, Hoepli, 1904 (In-18° cartonné de XX-126 p.). Prix : lire 1,50.

Beltrami a fait connaître au monde scientifique, en 1889, l'ouvrage oublié et pourtant si remarquable du P. Saccheri, S. J., *Euclides ab omni naevo vindicatus*, qui a paru à Milan, en 1733, quelques mois avant la mort de l'auteur. Nous avons publié une analyse critique du livre I de l'ouvrage de Saccheri dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (1890, t. XIV, 2^me^ partie, pp. 46-59) et en supplément dans *Mathesis* (1891); Veronese l'a aussi analysé dans ses *Fundamenti di Geometria*; il a été traduit en anglais par Halsted (*The American Mathematical Monthly*, 1894 et suiv.), en allemand par Engel et Stäckel (*Die Theorie der Parallellinien von Euclid bis Gauss*, 1895; Leipzig, Teubner).

Malgré ces analyses ou traductions, l'*Euclides ab omni naevo vindicatus* n'est pas encore aussi connu qu'il mérite de l'être : l'original est extrêmement rare ; les analyses et les traductions font partie de publications volumineuses. On doit donc savoir gré à M. Boccardini de l'avoir rendu accessible à tous les amateurs de la géométrie non euclidienne en en faisant paraître une traduction sous un format commode et avec d'excellentes notes critiques ou explicatives.

Beltrami a proclamé avec raison que Saccheri est un précurseur de Legendre et de Lobatchefsky. Il l'est, non seulement parce qu'il a démontré rigoureusement les premiers principes de la géométrie lobatchefskienne, mais surtout parce qu'il est le créateur de la *critique des postulats*. Pour voir si le postulat V d'Euclide est indépendant des vérités géométriques admises, Saccheri crée un système logique de géométrie indépendant de ce postulat. On n'a eu qu'à l'imiter en laissant de côté le postulat VI d'Euclide et le principe d'Eudoxe appelé postulat d'Archimède, pour construire de toutes pièces la géométrie riemannienne et la géométrie non archimédienne. Il est vrai que Saccheri, insuffisamment instruit dans la théorie des infiniments petits, a essayé de détruire de ses propres mains l'édifice qu'il venait d'élever. Mais cette partie négative de son œuvre n'a eu aucune influence, tandis que la partie positive conduisait Lambert au théorème du déficit; par Lambert ou directement, elle a sans doute agi sur Gauss et les deux Bolyai, par l'analyse qui en a paru dans l'*Euclide* de Camerer, sur Lobatchefsky.

Le petit livre de M. Boccardini contient la traduction presque complète du livre I de Saccheri consacré au postulat V d'Euclide, puis des extraits et une analyse substantielle du livre II où Saccheri défend certains points délicats de la théorie des proportions d'Euclide.

Il n'est plus possible aujourd'hui de bien savoir la géométrie ordinaire, la géométrie euclidienne, sans connaître la géométrie non euclidienne. La manière la plus facile de s'initier à celle-ci consiste à suivre la méthode historique, c'est-à-dire à lire avant tout le livre I de Saccheri. La chose est aisée maintenant; il suffit de prendre pour guide la traduction italienne (*) et les notes de M. Boccardini qui éclairent ou corrigent Saccheri et rattachent, partout où il le faut, ses théorèmes à ceux de la géométrie non euclidienne. (P. M.)

(*) L'italien des géomètres est facile à comprendre pour quiconque connaît le latin ou une des langues néolatines.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 1452.

(Voir *Mathesis*, (3), IV; p. 32.)

Soit M ***un point variable situé sur une ellipse*** E ***fixe de foyers*** F, F' ***et de centre*** O. ***On considère l'hyperbole*** H ***ayant pour asymptotes*** MF, MF' ***et passant par le centre de*** E.

1° ***Le lieu des foyers de*** H ***se compose de deux cercles;*** 2° ***les directrices de*** H ***enveloppent deux ellipses.*** (E. N. Barisien.)

Solution par M. Droz-Farny. Soient $2a$, $2b$, $2c$ et $2a'$, $2b'$, $2c'$ les longueurs des axes et les distances focales des deux courbes E, H.

Les foyers f, f' de H se trouvent sur la bissectrice de l'angle FMF' des angles. Comme OF = OF', FF' est la tangente en O à H. Or, l'équation de l'hyperbole H rapportée à ses asymptotes est $xy = \frac{1}{4}c'^2$; les coordonnées asymptotiques du point O de cette courbe étant $\frac{1}{2}$MF, $\frac{1}{2}$MF', on a MF.MF' $= c'^2$. Par conséquent, $Mf^2 = Mf'^2 = MF.MF'$; autrement dit, Mf et Mf' sont les moyennes géométriques (en grandeur et en position) entre les rayons vecteurs MF, MF' de l'ellipse. Donc, d'après un théorème connu, les points f, f' appartiennent aux cercles de Chasles de E (Voir ***Mathesis***, 1895, p. 130).

La directrice de H relative au foyer f est la droite qui unit les projections D, D' de f sur les asymptotes MF, MF'. Si les coordonnées de M par rapport aux axes de E sont $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$, celles de f sont $(a+b)\cos\varphi$, $(a+b)\sin\varphi$, et l'on trouve facilement pour l'équation de la directrice DD'

$$ay\sin\varphi + bx\cos\varphi = (a+b)b.$$

De là l'équation de l'enveloppe de cette droite

$$a^2y^2 + b^2x^2 = (a+b)^2b^2.$$

Solution par M. H. Lez. Les coordonnées de M étant $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$, les équations des droites MF, MF' sont

$$P \equiv (a\cos\varphi - c)y - (x - c)b\sin\varphi = 0,$$
$$P' \equiv (a\cos\varphi + c)y - (x + c)b\sin\varphi = 0,$$

et celle de l'hyperbole H est de la forme PP' = K. En exprimant que

---

(*) Nous avons reçu, trop tard pour les mentionner en temps utile, de bonnes solutions des questions 1458, 1460, 1467, par M. Nicolesco (Bucharest).

O est sur cette courbe, on trouve

$$a^2b^2\sin^2\varphi - 2ab\omega y \sin\varphi\cos\varphi + y^2(a^2\cos^2\varphi - c^2) + 2bc^2y\sin\varphi = 0.$$

Les foyers sont les points d'intersection des deux hyperboles équilatères

$$x^2 - y^2 + 2by\sin\varphi - 2ax\cos\varphi + c^2 = 0,$$
$$xy - bx\sin\varphi - ay\cos\varphi = 0.$$

En éliminant φ entre ces égalités, on trouve

$$4a^2b^2(x^2+y^2)^2 = a^2y^2(x^2+y^2-c^2)^2 + b^2x^2(x^2+y^2+c^2)^2.$$

Passons aux coordonnées polaires en faisant $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$ et résolvons l'équation obtenue par rapport à ρ^2; nous aurons $\rho^2=(a+b)^2$ ou $\rho^2=(a-b)^2$, c'est-à-dire les équations de deux cercles.

L'équation aux carrés des longueurs des axes d'une conique étant

$$R^2 + \frac{(A+C)\Delta}{AC-B^2}R + \frac{\Delta^2}{(AC-B^2)^2} = 0,$$

on trouve, pour l'hyperbole H,

$$R^2 - (b^2 - c^2\sin^2\varphi)R - b^2c^2\sin^2\varphi = 0;$$

par conséquent,

$$a' = b, \quad b' = c\sin\varphi.$$

La distance du centre M aux directrices de H est donc

$$d = -\frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2\sin^2\varphi}} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}.$$

Or, la distance de O à la tangente en M à l'ellipse est

$$d' = -\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}.$$

Par conséquent, le rapport $d' \mp d : d$ est constant; on en conclut que les directrices de H enveloppent des ellipses homothétiques à E par rapport à O.

Autres solutions par MM. Emmerich, Bastin et Couvert. Nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de les reproduire.

M. Emmerich déduit de la relation $a'=b$ que les sommets réels de H parcourent une courbe parallèle à E.

M. Dérens résout la question 1438 et la généralise en faisant passer les hyperboles H par un point fixe quelconque de FF'; dans cette hypothèse les foyers de H décrivent des ellipses et les directrices enveloppent des ellipses.

×Question 1457.

(Voir *Mathesis*, (3), IV, p. 56.)

Dans tout triangle sphérique ABC, *on a*

$$\left(\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}+\cot\frac{c}{2}\cot\frac{a}{2}+\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}-1\right)$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}-1\right)=4.$$

(R. Guntsche.)

Solution par MM. Emmerich et Déprez. On a

$$\left(\Sigma\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}-1\right)\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

$$=\Sigma\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}=\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\sin p; \quad (1)$$

$$\left(\Sigma\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}-1\right)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=\Sigma\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\sin\varepsilon, \quad (2)$$

2ε désignant l'excès sphérique du triangle ABC. Or,

$$\sin p=\frac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C\sin a}{\sin\frac{1}{2}A}, \quad \sin\varepsilon=\frac{\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\sin A}{\cos\frac{1}{2}a};$$

d'où, en multipliant,

$$\sin p\sin\varepsilon=4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}. \quad (3)$$

Des relations (1), (2), (3) résulte la formule proposée.

Remarques. 1° Dans tout triangle sphérique ABC, on a

$$\Sigma\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}=1+2\cot R\cot r,$$

$$\Sigma\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1+2\operatorname{tg}R\operatorname{tg}r,$$

R et r désignant les rayons des cercles circonscrit et inscrit.

C'est ce qui résulte des formules

$$\operatorname{tg}R=\frac{\sin\varepsilon}{2\sin p\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}, \quad \operatorname{tg}r=\sin p\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C,$$

combinées avec ce qui précède. (Emmerich.)

2° En appliquant la transformation continue en A, ou ce qui revient au même, en se rapportant au triangle adjoint A'BC (côtés : a, $\pi - b$, $\pi - c$; angles : A, π — B, π — C), la proposition de M. Guntsche se change en

$$\left(\operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}+\operatorname{tg}\frac{b}{2}\cot\frac{a}{2}+\operatorname{tg}\frac{c}{2}\cot\frac{a}{2}-1\right)$$

$$\left(\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}-1\right)=4.$$

(EMMERICH.)

Autres solutions par MM. DROZ-FARNY, OTS, DESPRETS, DUPONT, PLAKHOVO, ABRAMESCU et ROSE.

Question 1459.

(Voir *Mathesis*, (3), IV, p. 56.)

Étant donné un rectangle ABCD, *on construit deux cercles* O, O' *qui se touchent extérieurement en* M *et qui touchent le premier* AB *en* B, *le second*, AD *en* D. *Trouver*

1° *le lieu du point* M *et celui du milieu de* OO' ;

2° *l'enveloppe de la ligne des centres* OO' ;

3° *l'enveloppe de la tangente commune en* M ;

4° *l'enveloppe des autres tangentes communes ;*

5° *le lieu du point de rencontre de la circonférence* O *avec la droite* DM ;

6° *le lieu du centre de similitude externe ;*

7° *les lieux des points où la droite* OO' *rencontre une seconde fois les deux circonférences* O, O'.

Solution par M. EMMERICH. Il convient de distinguer deux cas principaux : *a*) les cercles O, O' touchent les côtés correspondants à la fois intérieurement ou à la fois extérieurement, *b*) l'un des cercles touche intérieurement, l'autre extérieurement. Les variantes que comporte encore chacun de ces cas conduisent aux mêmes résultats, mais exigent une autre démonstration. Les résultats, dans les deux cas, étant tout-à-fait analogues, nous nous bornerons au premier cas, et pour fixer les idées nous considérons une figure dans laquelle les centres O et O' se trouvent sur les côtés mêmes du rectangle ABCD.

1° Soit MT la tangente commune en M. On a *angle* $\mathrm{BMT} = \frac{1}{2}\,\mathrm{BOM}$,

ngle $DMT = \frac{1}{2} DO'M$, d'où *angle* $BMD = \frac{1}{2}(BOO' + DO'O) = 135°$. Il s'ensuit que le point M décrit le cercle passant par B, D et dont le centre E est à l'intersection de la bissectrice de l'angle C avec la circonférence ABCD. (Dans le cas *b*, au point E il faut substituer son symétrique par rapport à BD). Si nous faisons $AB = a$, $AD = b$ en supposant $a > b$, les distances du point E aux côtés de l'angle A sont $\frac{1}{2}(a - b) = d$, et aux côtés de l'angle C, $\frac{1}{2}(a + b) = c$. Le triangle isoscèle et rectangle BDE montre que $\overline{EM}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = c^2 + d^2$.

Appelons N le milieu de OO', F et G les projections de E sur CB, CD. La distance de N à FG étant la demi-somme des distances des points O, O' à la même droite équivaut à $\frac{1}{4}(OF + O'G)\sqrt{2} = \frac{1}{4} OO'\sqrt{2} = \frac{1}{2} NC\sqrt{2}$. Par conséquent, le point N décrit l'hyperbole équilatère avec le foyer C et la directrice correspondante FG. Autrement : Si l'on fait $OB = r$, $O'D = r'$, le triangle COO' donne

$$(b - r)^2 + (a - r')^2 = (r + r')^2, \qquad (1)$$

ou

$$(a + r)(b + r') = \frac{1}{2}(a + b)^2 = 2c^2.$$

Or, $\frac{1}{2}(a + r)$, $\frac{1}{2}(b + r')$ sont les distances de N aux droites EF, EG ; il s'ensuit que le point N parcourt l'hyperbole équilatère avec les asymptotes EF, EG et l'axe réel $2c$.

2° Les triangles égaux EBO, EMO font voir que la distance du point E à la droite OO' reste constante. OO' enveloppe donc le cercle de centre E et de rayon c ; c'est le cercle directeur de l'hyperbole ci-dessus.

3° E étant sur la bissectrice de l'angle BOM est aussi sur la bissectrice de l'angle des tangentes BA, MT ; d'où l'on conclut que MT enveloppe le cercle de centre E et de rayon d.

Les autres tangentes communes T_a, T_b touchent le cercle variable COO' ; car leur distance au point $N = \frac{1}{2}(r + r') = NO = NC$. Le cercle COO' enveloppe le cercle qui a pour centre le symétrique C_1 de C par rapport à E, et pour rayon $2c$. Car la relation (1) peut s'écrire

$$[2c - \tfrac{1}{2}(b - r)]^2 + [2c - \tfrac{1}{2}(a - r')]^2 = [2c + \tfrac{1}{2}(r + r')]^2,$$

ou bien

$$[c + \tfrac{1}{2}(a + r)]^2 + [c + \tfrac{1}{2}(b + r')]^2 = [2c + \tfrac{1}{2}(r + r')]^2,$$

ce qui montre que la somme des rayons des cercles $(C_1, 2c)$, $\left[N, \frac{r + r'}{2}\right]$ est égale à la distance de leurs centres.

Comme l'angle $OEO' = \frac{1}{2}BED = 45°$, le cercle COO′ passe par le centre W du cercle circonscrit au triangle OEO′; de plus, l'angle $WCO' = WOO' = 45°$, donc la médiatrice de OO′ coupe CE en W.

4° Soient alors U, V les points d'intersection de la tangente variable T_α avec AB, AD et posons $AU = u$, $AV = v$, $\sqrt{u^2 + v^2} = z$. Comme *angle* $BOU = \frac{1}{2}AUV$, *angle* $DO'V = \frac{1}{2}AVU$, on tire des triangles AUV, BOU, DO′V :

$$r = \frac{v(u-a)}{u-z}, \quad r' = \frac{u(v-b)}{v-z}.$$

S'il s'agit de la tangente T_α, on aura :

$$r = \frac{v(u-a)}{u+z}, \quad r' = \frac{u(v-b)}{v+z}.$$

Comme

$$rr' + br + ar' = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) = c^2 + d^2,$$

on peut éliminer r, r', ce qui donne

$$u^3v^3 + 2d(u^3v^2 - u^2v^3) - (2c^2 - d^2)(u^2v + uv^2) - 3d^2u^2v^2 + c^2(c-d)u^2 + (c^2 + c^2d - d^3)u^2v + (c^2 - c^2d + d^3)uv^2 + c^2(c+d)v^2 - \tfrac{1}{2}c^2(c^2 - d^2)(u^2 + v^2) + \tfrac{1}{4}d^2uv = 0.$$

Pour avoir l'équation tangentielle de l'enveloppe des tangentes T_α, T_α, il faut remplacer u, v par $-\frac{1}{u}, -\frac{1}{v}$.

Cette courbe est de la troisième classe, avec deux tangentes doubles en B et D. $u = a$ donne

$$v_1 = 0 \left(r' = b, \quad r = \frac{d^2}{b}\right); \quad v_2 = v_3 = -\frac{2cd}{b}\left(r = 0, \quad r' = \frac{c^2 + d^2}{a}\right);$$

O coïncide avec B, O′ et V sont à l'intersection de la médiatrice de BD avec CD et AD respectivement. La tangente double en $D\left(v = b, u_2 = u_3 = \frac{2cd}{a}\right)$ est la perpendiculaire menée de D sur la première. Les deux droites sont aussi tangentes au cercle (E, d) puisqu'elles se confondent avec MT.

5° Si DM coupe la circonférence O encore en P, on conclut des triangles semblables DO′M, POM que OP est perpendiculaire sur BC. Comme $OP = OB$, le lieu de P est la bissectrice extérieure de l'angle

droit B. P', point de rencontre de BM avec le cercle O', se meut sur la bissectrice extérieure de l'angle droit D. Les points Q, Q' où les rayons PO, P'O' rencontrent la seconde fois les cercles O, O' respectivement parcourent les bissectrices intérieures des angles B et D.

Comme $a > b$, le point B est à l'intérieur de l'angle P'DQ', et le point D à l'extérieur de l'angle PBQ.

6° Nous pouvons envisager S, centre de similitude externe des cercles O, O', comme point de rencontre de BQ' et DQ. Or, les faisceaux D (Q) et D (P) ou D (M), de même que D (M) et B (M) ou B (P') sont projectifs et de même sens de rotation, et les faisceaux B (P') et B (Q') sont projectifs et de sens contraires. Il en sera de même des faisceaux D (Q), B (Q'); par conséquent, ils engendrent une hyperbole passant en B, D. Les tangentes en B, D se coupent en E. Les axes sont une parallèle à BD et la médiatrice de BD. Les directions des asymptotes se présentent si BQDQ' devient un parallélogramme, ce qui arrive si $r = r'$. Ces valeurs spéciales r_1, r_2 résultent de l'équation

$$r^2 + 2cr = c^2 + d^2.$$

Si le cercle (B, BD) coupe les prolongements de EF au delà de E et F en K_1 et K_2 respectivement, on a $K_1E = r_1$, $K_2E = -r_2$. Ayant construit les droites DQ_1 et BQ'_2 lesquelles se rencontrent sur la médiatrice de BD en H, prolongez BH qui rencontre ED en λ, joignez H au milieu μ de $D\lambda$ et menez la parallèle à $H\mu$ par D laquelle rencontre EH au centre I de l'hyperbole

$$\overline{EI}^2 = \frac{2c^4(c^2 + d^2)}{(2c^2 + d^2)^2}.$$

7° Soit L le point où la droite OO' rencontre une seconde fois la circonférence O. L'angle $PBL = \frac{1}{2}POL = \frac{1}{2}CO'O = \frac{1}{2}CWO = CEO$. Or, PB est parallèle à CE; par conséquent, le point L est sur la parallèle à EO menée par B. En prenant le prolongement de AB et la droite BC pour axes coordonnés, on a

$$x : y = c : d + r, \quad r^2 = x^2 + (y - r)^2;$$

d'où, en éliminant r,

$$x(x^2 + y^2) + 2y(dx - cy) = 0.$$

Résultat analogue pour le lieu du point L'.

Solution partielle par M. Roux.

NOTE. M. BARISIEN nous a adressé une très bonne solution analytique, que l'abondance des matières à notre regret, nous empêche de reproduire. Voici comment notre zélé correspondant traite le 4°. Les notations étant celles de M. Emmerich et les axes étant AB, AD, l'équation de T_a ou T_c est

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0,$$

avec les conditions qui expriment que les distances des points $O(a, r)$, $O'(r', b)$ à ces droites sont égales à r, r' et que les cercles (O, r), $(O'r')$ se touchent :

$$a\cos\varphi + r\sin\varphi - p = \pm r, \quad r'\cos\varphi + b\sin\varphi - p = \pm r',$$
$$(a + r)(b + r') = \tfrac{1}{2}(a + b)^2.$$

Si entre les trois dernières relations on élimine r et r', on trouve

$$[p + a(\sin\varphi - \cos\varphi \mp 1)][p + b(\cos\varphi - \sin\varphi \mp 1)$$
$$= \tfrac{1}{2}(a + b)^2(\sin\varphi \mp 1)(\cos\varphi \mp 1).$$

p et φ sont les coordonnées polaires de la projection de A sur une tangente commune, de manière que l'équation précédente représente la podaire de A par rapport à l'enveloppe des tangentes communes MT, T_a, T_c. Pour T_a et T_c, les signes supérieurs sont associés ainsi que les signes inférieurs; pour MT, les signes de $\pm r$, $\pm r'$ dans les deux premières équations de condition sont contraires.

La question 1459 nous a été suggérée par deux questions proposées dans le *Journal de Vuibert*. Si l'on considère deux cercles variables O, O' qui se touchent extérieurement en M et touchent les côtés d'un angle donné quelconque BAD en des points fixes B, D, le lieu de M et l'enveloppe de la droite OO' sont encore des circonférences; car si C est le point de concours des rayons OB, O'D, l'angle BMD vaut encore la moitié de la somme des angles BO'O, DO'O et le triangle COO' a un périmètre égal à CB + CD. (J. N.)

Question 1462.

(Voir *Mathesis* (3), IV, p. 80).

On considère tous les triangles ABC *ayant même sommet* A, *même pied* A' *de la bissectrice intérieure issue de* A *et tels que* $\frac{AB}{AC} = k$. *Trouver les lieux de l'orthocentre et du centre circonscrit au triangle* ABC.

(E. N. BARISIEN).

Solution par M. V. RETALI. Si ABC est un triangle satisfaisant aux

conditions de l'énoncé, en appelant D le rencontre de BC avec la perpendiculaire à AA′ en A, le groupe (DBA′C) est harmonique et $\frac{A'B}{CA'} = k$; par suite, les projections N et M, de B, C sur | AA′ | sont fixes, car (A′N : A′M) $= -k$ et les points N, M sont conjugués harmoniques par rapport à AA′.

Les lieux des sommets B et C sont donc respectivement les perpendiculaires menées à la droite AA′ en N et M, et nous avons, prenant $\overline{AA'} = 1$,

$$AM = \mu = \frac{1+k}{2k}, \quad AN = \nu = \frac{1+k}{2}.$$

Cela posé, prenons A pour origine des coordonnées rectangulaires et AA′ pour axe des x. Les équations de AB, AC sont $y = \pm tx$, où t est un paramètre variable; les points B et C ont respectivement pour coordonnées $(\nu, \nu t)$ et $(\mu, -\mu t)$; les équations des hauteurs issues de B et C sont donc respectivement

$$x + ty = \mu(1 - t^2), \quad x - ty = \nu(1 - t^2)$$

d'où, en posant pour abréger

$$2m = \mu + \nu = \frac{(1+k)^2}{2k}, \quad 2n = \mu - \nu = \frac{1-k^2}{2k},$$

on obtient

$$x = m(1 - t^2), \quad y = n\frac{(1-t^2)}{t}. \tag{1}$$

Telles sont les équations paramétriques du lieu de l'orthocentre; elles représentent une cubique rationnelle symétrique par rapport à AA′ et ayant un point crunodal en A. En éliminant t on obtient l'équation cartésienne

$$mxy^2 = m^2y^2 - n^2x^2.$$

Les coordonnées des milieux B′, C′ des côtés AB, AC sont $\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu t}{2}\right)$ et $\left(\frac{\mu}{2}, -\frac{\mu t}{2}\right)$, et les équations des perpendiculaires menées en ces points respectivement à AB, AC sont

$$2(x + ty) = \nu(1 + t^2), \quad 2(x - ty) = \mu(1 + t^2),$$

d'où l'on déduit

$$2x = m(1 + t^2), \quad 2y = -n\frac{(1+t^2)}{t}, \tag{2}$$

équations paramétriques du lieu du centre du cercle ABC, qui repré-

sentent une cubique rationelle symétrique par rapport à AA', mais dont le point A est acnodal.

En éliminant t on a l'équation cartésienne

$$2mxy^2 = m^2y^2 + n^2x^2.$$

Remarque. Les équations (1). (2) donnent pour les coordonnées du barycentre du triangle ABC,

$$x = \frac{2m}{3}, \quad y = -\frac{2nt}{3};$$

le lieu de ce point est donc une droite perpendiculaire à | AA' | ce qui est d'ailleurs évident géométriquement.

Les mêmes équations (1), (2) donnent pour les coordonnées du centre du cercle de Feuerbach du triangle ABC,

$$4x = m(3 - t^2), \quad 4y = n\frac{(1 - 3t^2)}{t},$$

qui sont aussi les équations paramétriques du lieu de ce point.

En éliminant t on trouve l'équation

$$n^2(3x - 2m)^2 = 3m^2y^2 - 4mxy^2,$$

qui représente une cubique rationelle ayant AA' pour axe de symétrie et un nœud au point $\left(\frac{2m}{3}, 0\right)$. En transportant l'origine en ce point, l'équation de la courbe devient

$$4mxy^2 = m^2y^2 - 3n^2x^2,$$

Ont résolu la même question MM. H. Lez, Rose, Emmerich, Dupont, Rius y Casas et Abramescu.

×Question 1468.

(Voir *Mathesis*, (3) IV, p. 80).

Si, par les sommets B, C *d'un triangle* ABC, *on élève sur* BC *les perpendiculaires* $BB_a = b$, $CC_a = c$, *les points* B_a, C_a *sont à la même distance du pied* H_a *de la hauteur* AH_a. *Si on rabat* H_aB_a, H_aC_a *sur* BC *en* B'_a, C'_a *et qu'on fasse des constructions analogues sur* CA, AB, *les six points* B'_a, C'_a, C'_b, A'_b, A'_c, B'_c *sont sur une même circonférence ayant pour centre l'orthocentre* H *de* ABC. *Les droites* B_aC_a, C_bA_b, A_cB_c *rencontrent respectivement* BC, CA, AB *en trois points* D_a, D_b, D_c *qui sont en ligne droite.* (A. C.).

Solution par M. Weber (*Liège*). 1° On voit de suite que

$$\overline{H_aB_a}^2 = \overline{H_aC_a}^2 = b^2 + c^2 - \overline{AH_a}^2.$$

2° La distance de l'orthocentre H de ABC au point B'_a est donnée par

$$\overline{HB'_a}^2 = (b^2 + c^2\cos^2 B) + 4R^2\cos^2 B\cos^2 C.$$

D'où l'on tire $\overline{HB'_a} = 2R$. On déduit facilement de là que les six points B'_a, C'_a, C'_b, A'_b, A'_c, B'_c se trouvent sur la circonférence décrite de H comme centre avec 2R pour rayon.

3°) B_aC_a coupe le côté BC en un point D_a qui vérifie la relation

$$\frac{BD_a}{D_aC} = \frac{b}{c}.$$

De même,

$$\frac{CD_b}{D_bA} = \frac{c}{a}; \quad \frac{AD_c}{D_cB} = \frac{a}{b}.$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre, on voit tout de suite que les trois points D_a, D_b, D_c sont collinéaires.

Solutions analogues par MM. Dupont, Drechsel, Bastin, François, H. Lez, Plakhovo, Despreets, Abramescu et Seam Erelav.

M. Emmerich suppose les droites BB_a, CC_a, ... perpendiculaires au plan ABC et démontre que leurs extrémités sont sur une sphère de centre H et de rayon 2R.

Question 1464.

(Voir *Mathesis*, (3) IV, p. 80.)

On donne un plan P *et une droite d oblique à* P. *Par d on mène un plan quelconque* Q. *Soit* AB *une droite perpendiculaire à* Q *en* A *et rencontrant* P *en* B; *on suppose la longueur* AB *constante. Alors pour un même plan* Q, *les lieux des points* A, B *sont des couples de parallèles* (a, a'), (b, b'). *On demande :* 1° *la surface engendrée par les droites* a, a'; 2° *l'enveloppe des droites* b, b', *lorsque le plan* Q *tourne autour de* d; 3° *l'enveloppe des droites* a, a' *considérées dans le plan* Q *tournant autour de* d.

(J. Neuberg.)

Solution par M. F. Dupont. Menons AC et BC perpendiculaires sur l'intersection des plans P et Q. Le triangle ABC étant rectangle en A et l'angle ACB étant la mesure de l'angle dièdre (P, Q), on a

$$CA = l\cot(P, Q) = l\cot\gamma, \quad CB = l\operatorname{cosec}\gamma,$$

l désignant la distance donnée AB et γ l'angle (P, Q).

Pour un même plan Q, le lieu des points tels que A et B sera donc deux couples de parallèles menées respectivement dans Q et P à l'intersection de ces plans, aux distances $l \cot \gamma$, $l \operatorname{cosec} \gamma$.

1. Rapportons la figure à trois axes rectangulaires en prenant pour origine le point dP, pour plan des xy le plan P, pour plan des xz le plan mené par d perpendiculairement à P.

La droite d aura pour équations

$$y = 0, \quad z = x \operatorname{tg} \lambda,$$

et le plan Q peut être représenté par

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0, \tag{1}$$

avec la condition

$$\cos \alpha + \operatorname{tg} \lambda \cos \gamma = 0. \tag{2}$$

Les droites a et a' sont déterminées par les intersections du plan Q avec deux plans horizontaux menés de part et d'autre du plan P à une distance égale à la hauteur AD du triangle ABC, hauteur égale à $l \cos (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = l \cos \gamma$; elles sont donc définies par les équations (1) et

$$z = \pm l \cos \gamma. \tag{3}$$

Pour avoir l'équation de la surface engendrée par les droites a et a', il suffit d'éliminer α, β, γ entre les équations (1), (2), (3) et

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \tag{4}$$

On trouve

$$z^2 (x \sin \lambda - z \cos \lambda)^2 = y^2 (l^2 \cos^2 \lambda - z^2).$$

La surface est un conoïde symétrique par rapport à l'axe des y et par rapport au plan des xz.

2. Les droites b et b' sont le lieu des points $(x, y, 0)$ du plan P dont la distance au plan (1) est égale à l; elles sont donc représentées par

$$x \cos \alpha + y \cos \beta = l. \tag{5}$$

Si l'on tire de (2) et (5) les valeurs de $\cos \gamma$ et $\cos \beta$ en fonction de α pour les substituer dans la relation (4) on trouve

$$(l - x \cos \alpha)^2 = y^2 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \lambda}\right)$$

ou

$$\cos^2 \alpha (x^2 \sin^2 \lambda + y^2) - 2lx \sin^2 \lambda \cos \alpha + (l^2 - y^2) \sin^2 \lambda = 0.$$

L'équation de l'enveloppe des droites b et b' s'obtient en exprimant que la dernière équation donne deux valeurs égales de $\cos\alpha$; elle est donc

$$l^2x^2\sin^2\lambda = (l^2 - y^2)(x^2\sin^2\lambda + y^2),$$

et se décompose en

$$y^2 = 0, \quad y^2 + x^2\sin^2\lambda = l^2.$$

L'enveloppe proprement dite est une ellipse.

3. Pour trouver l'enveloppe des droites a et a' dans le plan Q, nous considérons ce plan comme fixe et nous faisons tourner le plan P autour de d, de manière que l'angle (d, P) reste constamment égal à λ; un point A est défini par la condition que la perpendiculaire élevée en ce point sur Q et limitée à P ait la longueur l.

Nous prenons maintenant d pour axe des x, Q pour plan des xy. Le plan mobile P aura pour équation

$$x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = 0,$$

et le z de B ayant une valeur constante l, le point A (x, y) du plan Q vérifie l'équation

$$x\cos\lambda + y\cos\mu + l\cos\nu = 0.$$

Tirons de là $\cos\nu$, portons la valeur dans la relation

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

et ordonnons le résultat par rapport au paramètre variable $\cos\mu$; il vient

$$(y^2 + l^2)\cos^2\mu + 2xy\cos\lambda\cos\mu + x^2\cos^2\lambda - l^2\sin^2\lambda = 0.$$

En égalant à zéro le discriminant de cette équation on trouve pour l'enveloppe cherchée l'hyperbole

$$x^2\cos^2\lambda - y^2\sin^2\lambda = l^2\sin^2\lambda.$$

La même question a été résolue par M. Rose.

×Question 1465.

(Voir *Mathesis*, (3); IV, p. 103.)

Étant donné un quadrilatère à la fois inscriptible et circonscriptible, dont les côtés consécutifs sont a, b, c, d, ***dont*** S ***désigne l'aire et dont*** Σ ***est l'aire du triangle formé par les points de rencontre des trois diagonales,***

démontrer la relation

$$4S^2 = (a^2b^2 - c^2d^2)(a^2d^2 - b^2c^2)\,\Sigma.$$

(E. N. Barisien).

Solution par M. Emmerich. ABCD étant un quadrilatère inscriptible quelconque, on a, d'après une formule de M. Neuberg (voir *Mathesis*, (2), X, p. 74)

$$4a^2b^2c^2d^2\,S = (a^2b^2 - c^2d^2)(a^2d^2 - b^2c^2)\,\Sigma. \qquad (1)$$

Si le quadrilatère est en même temps circonscriptible, l'expression de l'aire

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

à cause de $a + c = b + d = p$, se réduit à

$$S = \sqrt{abcd}.$$

On a donc la relation proposée.

Le même résultat s'obtient en partant d'un quadrilatère circonscriptible quelconque en vertu d'une autre formule du même auteur (voir *Mathesis*, (2), X, p. 202) :

$$4\alpha\beta\gamma\delta\,S = (\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \delta^2)\Sigma, \qquad (2)$$

α, β, γ, δ désignant les distances des sommets aux points de contact adjacents. Si le quadrilatère est bicentrique, les triangles semblables obtenus en joignant le centre du cercle inscrit aux sommets et aux points de contact, montrent que

$$r^2 = x\gamma = \beta\delta;$$

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha+\delta}{\beta+\gamma} = \frac{d}{b}; \quad \frac{\alpha}{\delta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha+\beta}{\delta+\gamma} = \frac{a}{c};$$

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = da : ab : bc : cd,$$

ce qui nous ramène à la relation (1).

Le produit $da = (x+\beta)(x+\delta)$ revenant à $x(x+\beta+\gamma+\delta)$, la formule (2) peut s'écrire dans le cas actuel :

$$4S^2 = (x+\beta+\gamma+\delta)^2(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \delta^2)\,\Sigma.$$

La seconde démonstration a été donnée également par M. E. Weiss.

Question 1469.

(Voir *Mathesis*, (3) IV; p. 128.)

Le centre C *d'un cercle de rayon donné parcourt une droite donnée d. D'un point donné* A, *on mène à ce cercle les tangentes* AM, AM'. *Trouver*

A. *L'enveloppe de la corde de contact* MM';

B. *Le lieu des points de contact;*

C. *Le lieu du milieu de la droite* MM';

D. *L'enveloppe des rayons* CM, CM'. (J. Neuberg.)

Solution par MM. Emmerich, Abramescu, Jeřabek, Nicolesco et Barisien. A. Prenons d et la perpendiculaire $AO = a$ sur d comme axes coordonnés, les équations du cercle (C, r) et du cercle de diamètre AC seront respectivement :

$$(x - q)^2 + y^2 = r^2, \tag{1}$$

$$x(x - q) + y(y - a) = 0, \tag{2}$$

q désignant le paramètre variable OC. On en déduit l'équation de la corde commune MM' :

$$qx - ay = q^2 - r^2, \tag{3}$$

puis l'équation de son enveloppe :

$$x^2 = 4a\left(y - \frac{r^2}{a}\right), \tag{4}$$

parabole dont la tangente au sommet est la corde commune au cercle de diamètre AO et au cercle (O, r).

B. En éliminant q entre les équations (1) et (2), nous avons l'équation du lieu des points M et M' :

$$x^2(r^2 - y^2) = y^2(y - a)^2.$$

Ce lieu est du 4e ordre; si $r = a$, il se décompose en la droite $y = a$ et la strophoïde droite $x^2 = y^2\dfrac{a - y}{a + y}$.

C. Le milieu de la droite MM' étant à l'intersection des droites MM' et AC, on obtient l'équation de son lieu en éliminant q entre les équations (3) et $ax = q(a - y)$:

$$ax^2y = (y - a)^2(r^2 - ay).$$

Ce lieu est évidemment la podaire du point A par rapport à la parabole (4). L'hypothèse $r = a$ donne une cissoïde.

D. Si x, y, sont les coordonnées de l'un des points M, M', l'équation de CM ou CM' sera

$$Y(x - q) = y(X - q).$$

En éliminant x, y, entre celle-ci et les équations (1) et (3), on trouve :

$$(qx - ay - q^2)^2 = r^2[(x - q)^2 + y^2].$$

Pour avoir l'enveloppe des rayons CM, CM', il reste à éliminer q entre la dernière équation et sa dérivée par rapport à q.

Note. Voici comment M. Barisien parvient aux équations paramétriques des courbes B et D.

Les coordonnées du point M sont

$$x = q + r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

φ désignant l'inclinaison du rayon CM sur l'axe des x. Portons ces valeurs dans l'équation (3), ce qui donne

$$q = \frac{a\sin\varphi - r}{\cos\varphi}, \tag{5}$$

de sorte que les équations paramétriques de la courbe (M) sont

$$x = \frac{a\sin\varphi - r}{\cos\varphi} + r\cos\varphi = \frac{a\sin\varphi - r\sin^2\varphi}{\cos\varphi}, \quad y = r\sin\varphi.$$

L'équation du rayon CM est $y = (x - q)\operatorname{tg}\varphi$, ou en remplaçant q par la valeur (5),

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi = \frac{\sin\varphi(a\sin\varphi - r)}{\cos\varphi}. \tag{6}$$

Dérivons-la par rapport à φ ; il vient

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \frac{a\sin\varphi(1 + \cos^2\varphi) - r}{\cos^2\varphi}.$$

De ces deux équations, on tire les coordonnées d'un point de l'enveloppe de CM :

$$x = \frac{2a\sin\varphi - r(1 + \sin^2\varphi)}{\cos\varphi}, \quad y = \frac{a\sin\varphi - r\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

De l'équation (6) on déduit encore l'équation en coordonnées polaires $\left(\rho,\ \omega = \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ de la même enveloppe

$$\rho = \frac{\cos\omega\,(r - a\cos\omega)}{\sin\omega}.$$

La courbe (M), pour $r \gtrless a$, est le *pancappa;* le milieu de MM′ est une *cochoïde de Sluse*. Voir notre étude *Sur les lignes tracées par le curvigraphe Victor Lebeau*, dans les Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège, 1903.

La solution de M. Jeřabek, qui nous est parvenue pendant l'impression de la présente livraison, renferme des considérations ingénieuses de géométrie solide relatives à la question et sur lesquelles nous reviendrons peut-être.

×Question 1470.

(Voir *Mathesis*, (3), IV, p. 128).

Résoudre l'équation

$$\frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\cos x} = c,$$

sachant que $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$. (J. Déprez.)

Solution par MM. E. N. Barisien et Abramescu. On peut poser

$$a^{\frac{1}{3}} = c^{\frac{1}{3}}\sin\theta, \quad b^{\frac{1}{3}} = c^{\frac{1}{3}}\cos\theta, \tag{1}$$

et l'équation proposée devient

$$\frac{\sin^3\theta}{\sin x} + \frac{\cos^3\theta}{\cos x} = 1.$$

Elle est vérifiée par $x = \theta$, de sorte qu'une *première* solution est

$$\sin x = \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \cos x = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{3}$$

Mais en remplaçant $\cos x$ par $\sqrt{1 - \sin^2 x}$ et faisant disparaître les dénominateurs et les radicaux, on obtient

$$\sin^4 x - 2\sin^3\theta\sin^2 x + (\sin^6\theta + \cos^6\theta - 1)\sin^2 x + 2\sin^3\theta\sin x - \sin^6\theta = 0.$$

Le coefficient de $\sin^2 x$ étant égal à $-3\sin^2\theta\cos^2\theta$, on peut écrire

$$\sin^4 x - 2\sin^3\theta\sin^2 x - 3\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2 x + 2\sin^3\theta\sin x - \sin^6\theta = 0.$$

On voit facilement que cette équation est divisible par $(\sin x - \sin\theta)^2$; ce facteur correspond à la solution (3). Deux autres solutions sont données par

$$\sin^2 x + 2\sin\theta\cos^2\theta\sin x - \sin^4\theta = 0; \qquad (4)$$

elles sont

$$\sin x = -\sin\theta(\cos^2\theta \pm \sqrt{\cos^4\theta + \sin^2\theta}),$$

et par analogie

$$\cos x = -\cos\theta(\sin^2\theta \mp \sqrt{\sin^4\theta + \cos^2\theta}).$$

Ces valeurs sont admissibles, car si l'on désigne le premier membre de l'équation (4) par $\varphi(x)$, on a

$$\varphi(\pm 1) = (1 - \sin^4\theta) \pm 2\sin\theta\cos^2\theta = \cos^2\theta(1 + \sin^2\theta) \pm 2\sin\theta\cos^2\theta$$
$$= \cos^2\theta(1 \pm \sin\theta)^2 > 0, \quad \varphi(0) < 0.$$

Remarque. Si l'on regarde a, b comme des coordonnées rectangulaires l'équation de condition $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$ représente l'enveloppe d'une droite de longueur c qui se meut entre les axes coordonnés. Soit x l'angle aigu de cette droite avec l'axe Ox; la droite mobile sera représentée par l'équation proposée, a et b étant des coordonnées courantes. Par conséquent, le problème de M. Déprez revient à mener des tangentes à une astroïde par un point de cette courbe.

L'astroïde étant transformée par affinité, on obtient une développée d'ellipse. La question 1470 peut donc être considérée comme ayant pour objet de mener les normales à une ellipse par un point donné de la développée.

Ces interprétations géométriques montrent très bien que l'équation proposée a une solution double.

Solution moins complète par MM. Emmerich, Janne et Verheugen.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1166. On considère deux ellipses semblables, concentriques, de même direction d'axes, mais telles que le grand axe de l'une soit le petit axe de l'autre. — Le lieu du sommet des angles droits dont chacun des côtés touche une des ellipses, se compose de deux quartiques qui sont des podaires de centre d'ellipse. (E. N. Barisien.)

Equation des deux coniques :

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad b^2y^2 + a^2x^2 = k^2a^2b^2;$$

équation des deux tangentes rectangulaires :

$$x\cos\delta + y\sin\delta = \pm\sqrt{a^2\cos^2\delta + b^2\sin^2\delta}, \qquad (1)$$

$$-x\sin\delta + y\cos\delta = \pm k\sqrt{a^2\cos^2\delta + b^2\sin^2\delta}. \qquad (2)$$

Il faut éliminer δ entre (1) et (2) ou entre

$$x^2 + y^2 = (1 + k^2)(a^2\cos^2\delta + b^2\sin^2\delta)$$
$$k(x\cos\delta + y\sin\delta) = -x\sin\delta + y\cos\delta,$$

k pouvant être positif ou négatif. On trouve

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x + ky)^2 + b^2(y - kx)^2.$$

Posons $k = \operatorname{tg}\alpha$ et passons aux coordonnées polaires; il vient

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\cos^2(\theta - \alpha) + \frac{b^2}{\cos^2\alpha}\sin^2(\theta - \alpha).$$

En faisant tourner l'axe polaire de l'angle α autour du pôle on obtient une équation de la forme $r^2 = a'^2\cos^2\theta + b'^2\sin^2\theta$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1481. On donne, dans un même plan, une courbe Σ et une droite d. En un point quelconque A de Σ on mène la tangente qui rencontre d en B, puis on construit le triangle ABC semblable à un triangle donné $\alpha\beta\gamma$. Construire la tangente et le cercle osculateur à la courbe décrite par le point C lorsque A se déplace sur Σ. Trouver l'enveloppe de la tangente en C, lorsque A restant fixe sur Σ l'un des angles A, B varie tandis que l'autre conserve sa valeur. (J. NEUBERG.)

1482. Trouver une courbe telle que la somme ou la différence des projections de l'ordonnée sur la tangente et sur la normale en un même point de la courbe soit constante. (J. NEUBERG.)

1483. Etant donné, sur une sphère O, un angle droit AOB formé par deux arcs de grand cercle, on mène par le point fixe A un arc de grand cercle qui coupe OB en C, et l'on prend sur cet arc les segments CM = CN = CO. Le lieu des points M, N peut être appelé *strophoïde sphérique*. Trouver l'équation de cette ligne, la tangente en un point quelconque et indiquer la forme de la courbe.

1484. On joint un point M d'une conique Σ aux extrémités P et Q d'une corde quelconque parallèle à la tangente au point M. Les perpendiculaires abaissées du pôle R de la corde MP sur les droites MP, MQ interceptent sur la normale au point M un segment égal au diamètre du cercle osculateur au point M. (Cl. Servais.)

1485. Soient (r_1, θ_1), (r_2, θ_2), (r_3, θ_3), (r_4, θ_4) les coordonnées polaires des pieds les normales issues du point (r', θ') à l'ellipse

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

Démontrer les relations

$$r_1 r_2 r_3 r_4 = \frac{b^2 r'^2}{e^2}, \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 2\theta' + (2n+1)\pi.$$

(Nanson).

1486. On donne une ellipse E et un cercle C. Soient F un des foyers de l'ellipse P et M un point variable de l'ellipse. On considère le cercle Σ de centre M et de rayon MF. Le lieu des centres de similitude des cercles D et Σ se compose de deux coniques. Conditions pour que ces coniques soient des paraboles. (E. N. Barisien.)

1487. Les tangentes aux points A', B', C' d'une parabole P forment un nouveau triangle ABC, soit Q le point de concours des droites AA', BB', CC'. Lorsque le point Q est fixe, le centre de gravité G du triangle ABC décrit une droite, et l'ellipse qui est inscrite au triangle ABC et a pour centre G passe constamment par Q et reste homothétique à elle-même. (Steiner.)

Steiner démontre cette proposition en faisant une projection cylindrique des triangles équilatéraux circonscrits à une parabole; on en demande une autre démonstration, soit synthétique, soit analytique.

1488. ABCDE étant un pentagone plan convexe, traçons en les diagonales, et appelons α, β, γ, δ, ε les aires des triangles EAB, ABC, BCD, CDE, DEA. Si ϖ est l'aire du pentagone, on a

$$\varpi^2 - \varpi\Sigma\alpha + \Sigma\alpha\beta = 0. \qquad \text{(Möbius.)}$$

Soient α', β', γ', δ', ε' les aires des triangles ACD, BDE, CEA, DAB, EBC. Démontrer la formule

$$\varpi^2 = \Sigma\alpha'^2 \pm 2\Sigma\alpha'\beta';$$

la quantité $\pm\Sigma\alpha'\beta'$ comprend 5 termes positifs et 5 termes négatifs, ces derniers sont $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$, $\gamma'\delta'$, $\delta'\varepsilon'$, $\varepsilon'\alpha'$. (J. Neuberg.)

MÉMORIAL MATHÉMATIQUE

d'après FÉLIX MÜLLER (*).

Octobre.

1. 1684. *Leibniz* publie la *Nouvelle Méthode des maxima et minima*, etc. (= calcul différentiel) dans les *Acta eruditorum*.

2. 1791. Naissance de *V. A. Lebesgue*, à Granvilliers (Oise; France).

3. 1884. Mort de *N. Trudi*, à Naples.

4. 1759. Naissance de *L. F. A. Arbogast*, à Mutzig (Alsace).

5. 1777. Mort de *J. A. v. Segner*, à Halle s. S.

6. 1784. Naissance de *Ch. Dupin*, à Varzy (Nièvre; France). **1831.** Naissance de *Dedekind*, à Brunswick. **1855.** Mort de *A. L. Crelle*, à Berlin.

7. 1903. Mort de *R. Lipschitz*, à Bonn.

8. 1891. Mort de *E. Lucas*, à Paris.

9. 1581. Naissance de *Bachet*, à Bourg en Bresse. **1807.** Mort de *G. F. Malfatti*.

10. 1687. Naissance de *Nicolas I Bernoulli*, à Bâle.

11. 1852. Mort de *F. Eisenstein*, à Berlin.

12. 1847. Mort de *G. Z. Leonelli*, à Corfou.

13. 1776. Naissance de *P. Barlow*, à Norwich.

14. 1687. Naissance de *Robert Simson*, à Kirton-Hall (Ayrshire, Ecosse).

15. 1608. Naissance de *Torricelli*, à Piancaldoli.

16. 1827. Naissance de *Paul Serret*, à Aubenas (Ardège, France).

17. 1887. Mort de *G. Kirchhoff*, à Berlin.

18. 1802. Naissance de *D. Chelini*, à Cragnano, près de Lucques.

19. 1878. Mort de *J. Bienaymé*.

20. 1896. Mort de *F. Tisserand*, à Paris.

21. 1823. Naissance de *E. Betti*, près de Pistoie.

22. 1735. Naissance de *A. M. Lorgna*, à Cerea, près de Verone.

23. 526. Exécution de *Boèce*.

(*) Extrait du *Gedenktagebuch für Mathematiker* von FELIX MÜLLER, publié dans la centième édition du Catalogue d'ouvrages mathématiques de Teubner, pp. 2, 4, ... 82.

24. 1881. Mort de *E. Heine*, à Halle.
25. 1811. Naissance de *E. Galois*, à Bourg-la-Reine.
26. 1849. Naissance de *G. Frobenius*, à Berlin.
27. 1675. Mort de *Roberval*, à Paris.
28. 1703. Mort de *Wallis*, à Oxford.
29. 1675. *Leibniz* imagine la notation différentielle.
30. 1844. Naissance de *G. H. Halphen*, à Rouen.
31. 1815. Naissance de *Weierstrass*, à Ostenfeld en Westphalie.

SUR LES CUBIQUES GAUCHES,

par M. Stuyvaert (Gand).

M. Servais a publié dans *Mathesis* (mai 1904) un article intéressant sur les cubiques gauches. On verra ci-après quels faits algébriques correspondent aux principaux théorèmes établis dans le travail en question.

1. Soient

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \theta^3 : \theta^2 : \theta : 1$$

les équations paramétriques de la cubique gauche; (θ_1, θ_2), (θ'_1, θ'_2), (θ''_1, θ''_2), $(\theta'''_1, \theta'''_2)$ ... les paramètres des extrémités d'une série de cordes. Que faut-il pour que ces cordes soient des génératrices d'un même système réglé? Il faut que d'un point de la cubique, par exemple du sommet E ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) on puisse mener une droite rencontrant toutes les bisécantes données, ou que les plans réunissant E à ces bisécantes forment un faisceau. Or, les équations de ces plans sont

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 - (\theta_1 + \theta_2)x_2 + \theta_1\theta_2 x_3 = 0, \\ x_1 - (\theta'_1 + \theta'_2)x_2 + \theta'_1\theta'_2 x_3 = 0, \quad \text{etc.} \end{cases}$$

Pour qu'ils forment un faisceau, on doit avoir

$$(2) \qquad \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots \\ \theta_1 + \theta_2 & \theta'_1 + \theta'_2 & \dots \\ \theta_1\theta_2 & \theta'_1\theta'_2 & \dots \end{Vmatrix} = 0.$$

S'il y a trois bisécantes, le tableau ci-dessus est un déterminant ordinaire.

2. Si quatre cordes satisfont aux conditions (2), quel est le rapport anharmonique de ces quatre génératrices d'un système réglé? C'est le

rapport anharmonique des quatre plans qui les projettent du point E, ou le rapport anharmonique des droites suivant lesquelles ces plans (1) coupent le plan $x_3 = 0$. Ces droites ont respectivement pour équations

$$x_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = (\theta_1 + \theta_2)x_2,$$
$$x_3 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = (\theta'_1 + \theta'_2)x_2, \quad \text{etc.}$$

Le rapport anharmonique cherché est donc

$$\lambda = \frac{(\theta_1 + \theta_2) - (\theta''_1 + \theta''_2)}{(\theta'_1 + \theta'_2) - (\theta''_1 + \theta''_2)} : \frac{(\theta_1 + \theta_2) - (\theta'''_1 + \theta'''_2)}{(\theta'_1 + \theta'_2) - (\theta'''_1 + \theta'''_2)}.$$

3. Prenons deux plans conjugués par rapport à la cubique; par leur intersection passent deux plans osculateurs (réels ou imaginaires) que nous prenons pour faces x_1 et x_4 du tétraèdre de référence. Les plans conjugués ont alors pour équations

$$x_1 = kx_4, \quad x_1 = -kx_4.$$

Les points A, B, C et A′, B′, C′ où ces plans conjugués coupent la courbe ont respectivement pour paramètres

$$\alpha\sqrt[3]{k}, \quad \beta\sqrt[3]{k}, \quad \gamma\sqrt[3]{k},$$
$$-\alpha\sqrt[3]{k}, \quad -\beta\sqrt[3]{k}, \quad -\gamma\sqrt[3]{k},$$

α, β, γ désignant les trois racines cubiques de $+1$.

Les tangentes en A et A′ et les sécantes BC, B′C′ sont-elles des rayons d'un même système réglé? Il faut pour cela que les conditions (2) soient vérifiées ou que l'on ait, en supprimant les facteurs communs $\sqrt[3]{k}$,

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2\alpha & -2\alpha & \beta+\gamma & -(\beta+\gamma) \\ \alpha^2 & \alpha^2 & \beta\gamma & \beta\gamma \end{Vmatrix} = 0.$$

On vérifie sans peine, en effet, que chacun des déterminants de ce tableau est nul; par exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\alpha & -2\alpha & \beta+\gamma \\ \alpha^2 & \alpha^2 & \beta\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4\alpha & -2\alpha & \beta+\gamma \\ 0 & \alpha^2 & \beta\gamma \end{vmatrix} = 4\alpha(\alpha^2 - \beta\gamma);$$

or, on a $\alpha^3 = 1$ et $\alpha\beta\gamma = 1$, donc $\alpha^2 - \beta\gamma = 0$.

Quel est le rapport anharmonique des deux tangentes en A, A′ et des sécantes BC, B′C′? D'après le n° précédent, on a, en simplifiant par $\sqrt[3]{k}$,

$$\lambda = \frac{2\alpha - (\beta + \gamma)}{2\alpha + \beta + \gamma} : \frac{-2\alpha - (\beta + \gamma)}{-2\alpha + \beta + \gamma},$$

ou, comme $\alpha + \beta + \gamma = 0$,

$$\lambda = \frac{3\alpha}{\alpha} : \frac{-\alpha}{-3\alpha} = 9.$$

4. Dans le plan de trois points, de paramètres θ_1, θ_2, θ_3, de la cubique, se coupent deux plans osculateurs. Cherchons les paramètres θ et θ' de leurs points d'osculation. Il faut que les plans

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2\Sigma\theta_1 + x_3\Sigma\theta_1\theta_2 - x_4\theta_1\theta_2\theta_3 = 0, \\ &x_1 - 3\theta x_2 + 3\theta^2 x_3 - \theta^3 x_4 = 0, \\ &x_1 - 3\theta' x_2 + 3\theta'^2 x_3 - \theta'^3 x_4 = 0 \end{aligned}$$

se coupent suivant une même droite, ou que l'on ait

$$\begin{Vmatrix} 1 & \Sigma\theta_1 & \Sigma\theta_1\theta_2 & \theta_1\theta_2\theta_3 \\ 1 & 3\theta & 3\theta^2 & \theta^3 \\ 1 & 3\theta' & 3\theta'^2 & \theta'^3 \end{Vmatrix} = 0.$$

Développons le déterminant des trois premières colonnes et simplifions par $3(\theta' - \theta)$:

$$3\theta\theta' - (\theta + \theta')\Sigma\theta_1 + \Sigma\theta_1\theta_2 = 0.$$

Développons le déterminant des trois dernières colonnes et simplifions par $3\theta\theta'(\theta' - \theta)$

$$\theta\theta'\Sigma\theta_1 - (\theta + \theta')\Sigma\theta_1\theta_2 + 3\theta_1\theta_2\theta_3 = 0.$$

De ces deux égalités, on tire

$$\theta + \theta' = \frac{\Sigma\theta_1\Sigma\theta_1\theta_2 - 9\theta_1\theta_2\theta_3}{(\Sigma\theta_1)^2 - 3\Sigma\theta_1\theta_2}, \quad \theta\theta' = \frac{(\Sigma\theta_1\theta_2)^2 - 3\theta_1\theta_2\theta_3\Sigma\theta_1}{(\Sigma\theta_1)^2 - 3\Sigma\theta_1\theta_2}$$

et par suite on pourra déterminer θ et θ'.

Reprenons les deux plans conjugués ABC et A′B′C′ du n° 3. Les paramètres des points E et F de la sécante issue du pôle de ABC sont, par hypothèse, 0 et ∞. Les paramètres θ et θ' des points E′ et F′ de la sécante issue du pôle de AB′C′, ou des contacts des plans osculateurs se coupant dans le plan des trois points A$(+\alpha\sqrt[3]{k})$, B′$(-\beta\sqrt[3]{k})$,

C'$(-\gamma\sqrt[3]{k})$, vérifient les relations précédentes qui deviennent ici

$$\theta+\theta'=\sqrt[3]{k}\,\frac{(\alpha-\beta-\gamma)(-\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta\gamma)-9\alpha\beta\gamma}{(\alpha-\beta-\gamma)^2-3(-\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta\gamma)}$$

$$=\sqrt[3]{k}\,\frac{2\alpha\times 2\beta\gamma-9}{(2\alpha)^2-3(2\beta\gamma)}=\sqrt[3]{k}\,\frac{-5\alpha}{-2}=\frac{5\alpha}{2}\sqrt[3]{k},$$

$$\theta\theta'=\sqrt[3]{k^2}\,\frac{(-\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta\gamma)^2-3\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta-\gamma)^2-3(-\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta\gamma)}$$

$$=\sqrt[3]{k^2}\,\frac{(2\beta\gamma)^2-6\alpha}{(2\alpha)^2-3(2\beta\gamma)}=\sqrt[3]{k^2}\,\frac{-2\alpha^2}{-2}=\alpha^2\sqrt[3]{k^2}.$$

Les droites EF, E'F', BC et B'C' font-elles partie d'un même système réglé? Il faut pour cela, d'après le n° 1, que l'on ait les relations suivantes, puisque le plan qui projette EF de E a pour équation $0x_1+x_2+0x_3=0$,

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{5\alpha}{2} & \beta+\gamma & -(\beta+\gamma) \\ 0 & \alpha^2 & \beta\gamma & \beta\gamma \end{Vmatrix}=0,$$

ce qui est exact, puisque $\alpha^2=\beta\gamma$.

Quel est le rapport anharmonique de ces quatre sécantes? D'après le n° 2, c'est, en divisant par $\sqrt[3]{k}$,

$$\lambda=\frac{\infty-(\beta+\gamma)}{\frac{5\alpha}{2}-(\beta+\gamma)}:\frac{\infty+(\beta+\gamma)}{\frac{5\alpha}{2}+(\beta+\gamma)}=\frac{\frac{5\alpha}{2}+(\beta+\gamma)}{\frac{5\alpha}{2}-(\beta+\gamma)}.$$

ou, puisque $\beta+\gamma=-\alpha$,

$$\lambda=\frac{\frac{3\alpha}{2}}{\frac{7\alpha}{2}}=\frac{3}{7}.$$

QUELQUES FORMULES RELATIVES AU TÉTRAÈDRE,

par J. Neuberg.

Le présent article nous a été suggéré par un travail de M. Piccioli qui a paru récemment dans le *Periodico di Matematica* (mars-avril 1904) sous le titre *Contributio alle « Geometria del tetraedro »*.

L'auteur lui-même déclare qu'il n'a pas la prétention de publier des résultats originaux. Comme nous avions proposé l'une de ces formules dans la *Nouvelle correspondance* (t. II, p. 356) et que notre mode de démonstration diffère du sien, il n'est peut-être pas inutile de reprendre ici la question.

1. Désignons par α_1, α_2, α_3, α_4 les aires des faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ respectivement opposées aux sommets A_1, A_2, A_3, A_4; par a_1, a_2, a_3 les arêtes A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2; par a'_1, a'_2, a'_3 les arêtes opposées A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3.

1. En un point quelconque B_3 de l'arête A_4A_3, menons un plan π perpendiculaire à cette droite, et projetons les points A_1, A_2 en B_1, B_2 sur le plan π; nous représenterons par $\alpha_1\alpha_2$ l'angle dièdre $A_1A_4A_3A_2$ qui a pour mesure l'angle $B_1B_3B_2$, et par b_1, b_2, b_3, les côtés B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2 du triangle $B_1B_2B_3$. On a l'égalité

$$b_3^2 = b_1^2 + b_2^2 - 2b_1b_2\cos B_3;$$

multiplions en les deux membres par $\frac{1}{4}a_3'^2$ en observant que b_1, b_2 sont égaux aux hauteurs des faces α_1, α_2 issues de A_2, A_1. Il vient

$$\tfrac{1}{4}a_3'^2b_3^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2\cos\alpha_1\alpha_2.$$

Comme $b_3 = A_1A_2\cos(B_1B_2, A_1A_2) = a_3\sin(a_3, a'_3)$, on peut écrire

$$\tfrac{1}{4}a_3^2a_3'^2\sin^2(a_3, a'_3) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2\cos\alpha_1\alpha_2.$$

Appelons M_1, M_2, M_3, M'_1, ... les milieux des arêtes du tétraèdre; les points $M_1M_2M'_1M'_2$ sont les sommets d'un parallélogramme dont les côtés sont parallèles à a_3, a'_3 et égaux à $\frac{1}{2}a_3$, $\frac{1}{2}a'_3$. Donc, si l'on représente par μ_3 l'aire de ce parallélogramme, on a

$$\begin{aligned} 4\mu_3^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2\cos\alpha_1\alpha_2 \\ &= \alpha_3^2 + \alpha_4^2 - 2\alpha_3\alpha_4\cos\alpha_3\alpha_4. \end{aligned}$$

2. Appelons c_1, c_2, c_3 les longueurs des médianes du triangle $B_1B_2B_3$,

et ν_3, ν'_3 les aires des triangles $A_3A_4M_3$, $A_1A_2M'_3$. Les relations

$$b_1^2 + b_2^2 = 2c_3^2 + \tfrac{1}{2}b_3^2,$$
$$4c_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2\cos B_3.$$

après multiplication par $\frac{1}{4}a_3'^2$ donneront

$$2\nu_3^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\mu_3^2,$$
$$4\nu_3^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\cos\alpha_1\alpha_2.$$

3. Les plans bissecteurs intérieur et extérieur de l'angle dièdre $\alpha_1\alpha_2$ rencontrent l'arête A_3A_4 en deux points L, L', qui se projettent sur B_1B_2 en P, P'. Les longueurs des bissectrices B_3P, B_3P' de l'angle B_3 du triangle $B_1B_2B_3$ sont données par les égalités

$$B_3P = \frac{2b_1b_2}{b_1+b_2}\cos\tfrac{1}{2}B_3, \quad B_3P' = \frac{2b_1b_2}{b_1-b_2}\sin\tfrac{1}{2}B_3;$$

on en déduit pour les aires des *sections bissectrices* $A_3A_4L = \beta$, $A_3A_4L' = \beta'$:

$$\beta = \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\cos\tfrac{1}{2}\alpha_1\alpha_2, \quad \beta' = \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha_1\alpha_2.$$

4. Soient Q, Q' les points qui divisent respectivement A_1A_2, B_1B_2 dans un rapport donné $m : n$, de sorte que

$$\frac{A_1Q}{QA_2} = \frac{B_1Q'}{Q'B_2} = \frac{m}{n}.$$

Pour calculer la longueur B_3Q' en fonction de b_1, b_2, B_3, menons par Q' une parallèle Q'R à B_3B_1 qui rencontre B_3B_2 en R; alors

$$\overline{B_3Q'}^2 = \overline{B_3R}^2 + \overline{Q'R}^2 + 2B_3R.Q'R\cos B_3$$

Or,

$$B_3R = \frac{m.b_1}{m+n}, \quad Q'R = \frac{nb_2}{m+n};$$

substituant ces valeurs dans l'égalité précédente on trouve

$$(m+n)^2 B_3Q'^2 = m^2b_1^2 + n^2b_2^2 + 2mnb_1b_2\cos B_3.$$

Multiplions cette égalité par $\frac{1}{4}a_3'^2$ et appelons γ l'aire du triangle A_3A_4Q; nous aurons

$$(m+n)^2\gamma^2 = m^2\alpha_1^2 + n^2\alpha_2^2 + 2mn\alpha_1\alpha_2\cos\alpha_1\alpha_2.$$

5. Si l'on fait $m = n$ ou $m = \alpha_2$, $n = \alpha_1$ on retrouve les formules donnant ν_3 et β.

Appelons *section symédiane* la section du tétraèdre par un plan mené par l'arête A_3A_4 et divisant l'arête opposée A_1A_2 (et aussi les aires $A_4A_1A_2$, $A_3A_4A_2$) dans le rapport des carrés des faces adjacentes α_2, α_1. En faisant $m = \alpha_2^2$, $n = \alpha_1^2$ dans la formule du § 4, on obtient pour l'aire δ de cette section

$$\delta^2 = \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \cos \alpha_1\alpha_2),$$

$$\delta = \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\nu_3.$$

6. Soit KH la perpendiculaire commune à A_3A_4 et A_1A_2; elle se projette sur le plan π suivant la hauteur B_3H' du triangle $B_1B_2B_3$. De la formule

$$b_1b_2 \sin B_3 = b_3.B_3H'$$

on conclut aisément pour l'aire de la section $A_3A_4H = \lambda$:

$$\alpha_1\alpha_2 \sin \alpha_1\alpha_2 = 2\mu_3\lambda = \lambda\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2 \cos \alpha_1\alpha_2}.$$

NOTES MATHÉMATIQUES.

22. *L'amiral de Jonquières.* L'amiral de Jonquières n'était pas un géomètre de profession. Marin avant tout, il a passé trente-six ans en mer avant de devenir vice-amiral et a pris part à tous les progrès de notre marine (création d'une flotte à vapeur, torpilles, etc.).

Néanmoins il suivait avec intérêt les progrès de la géométrie supérieure et en étudiait les problèmes dès que son service lui laissait quelques moments de liberté. Dans les voyages, il emportait avec lui les œuvres de Poncelet et de Chasles et les méditait. De 1855 à 1866, assis sur son banc de quart, il a écrit une série de Mémoires dont Cayley, en Angleterre, a admiré « la magnifique généralité », tandis que Hesse, en Allemagne, s'étonnait de voir un marin résoudre des problèmes que lui-même n'aurait pas songé à se poser.

Ces travaux, trop tôt interrompus par les exigences du service, montrent, en effet, de grandes qualités d'invention. Ils renferment beaucoup d'idées originales qui, reprises et développées plus tard par d'autres, leur ont assuré une légitime réputation. Mais il ne serait pas juste d'oublier que de Jonquières a été leur précurseur.

Ainsi, c'est lui qui a donné le premier exemple de ces transformations dont l'étude systématique a illustré le nom de Cremona.

Il a abordé le premier le problème des courbes à contacts multiples, repris avec tant de succès par Clebsch.

Mais son principal titre est d'avoir été le premier créateur de la théorie des caractéristiques complétée successivement par Chasles et par Halphen, ce qui suffit à lui assurer un nom durable dans l'histoire des mathématiques (Fouqué, CR, 16 décembre 1901, t. CXXXIII, p. 1049).

28. *Sur une formule de M. Wasteels*, par M. E. Cesàro. La formule (1), rappelée par M. Wasteels dans sa note « *sur la courbure des courbes*, etc. » (p. 154) peut être considérée comme résultant des *conditions d'immobilité*(*) d'un point :

$$\frac{dr}{ds} = -\cos\theta, \quad \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\sin\theta}{r}.$$

On déduit, en effet, de la dernière formule, en tenant compte de la première,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin\theta}{r} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin\theta}{r} + \frac{d\sin\theta}{dr}.$$

Il en est de même de la formule (2). Les conditions d'immobilité d'un point, sur une surface à courbure constante $-\frac{1}{R^2}$, ont été données dans ma note « *sur les fondements de la géométrie intrinsèque non-euclidienne* (**) » sous la forme

$$\frac{dr}{ds} = -\cos\theta, \quad \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{R\,\mathrm{th}\,\frac{\rho}{R}} + \frac{\sin\theta}{R\,\mathrm{th}\,\frac{r}{R}}.$$

Pour une sphère de rayon R, la dernière formule devient

$$\frac{1}{R\,\mathrm{tg}\,\frac{\rho}{R}} = \frac{\sin\theta}{R\,\mathrm{tg}\,\frac{r}{R}} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin\theta}{R\,\mathrm{tg}\,\frac{r}{R}} + \frac{d\sin\theta}{dr},$$

ce qui donne bien, pour $R = 1$, la seconde formule de M. Wasteels, et, pour $R = \infty$, la première.

(*) Cesàro *Geometria intrinseca*, p. 20.

(**) *Rendiconti* des *Lincei*, 1904, p. 443.

24. *Sur la question de M. Fitz Patrick* (v. *Mathesis*, 1904, p. 107), par M. J. Déprez. 1. Le foyer G de l'ellipse de Steiner du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ est le centre de gravité du triangle ABC (Les notations sont les mêmes qu'à la page 107).

Soient K^2 la puissance de G par rapport au cercle ABC; $2a_1$, $2b_1$ les axes de l'ellipse de Steiner du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$; *angle* $\beta'GA' = A'G\gamma' = \alpha$, *angle* $\gamma'GB' = B'G\alpha' = \beta$, *angle* $\alpha'GC' = C'G\beta' = \gamma$.

On a

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°, \quad AG = \frac{K^2}{A'G} = \frac{K^2 \sin\alpha}{x}, \quad BG = \frac{K^2 \sin\beta}{x},$$

$$2AGB = AG.BG \sin(\alpha + \beta),$$

d'où

$$AGB = \frac{K^4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{2x^2} = BGC = CGA.$$

2. Calculons la valeur de x. On a les relations

$$\text{Aire } A'B'C' = A'GB' + B'GC' + C'GA',$$

$$A'GB' = x.G\gamma', \quad B'GC' = x.G\alpha', \quad C'GA' = x.G\beta';$$

mais on sait que

$$G\alpha' + G\beta' + G\gamma' = 3a_1, \quad A'B'C' = 3a_1b_1\sqrt{3},$$

on en conclut

$$x = b_1\sqrt{3} \text{ et } x^2 = \frac{S'}{3}[\operatorname{cotg} V' - \sqrt{\operatorname{cotg}^2 V' - 3}].$$

3. On déduit facilement du problème précédent le théorème signalé par M. G. Brocard (*Mathesis*, 1896, p. 217).

Désignons les points de rencontre des droites $\alpha'G$, $\beta'G$, $\gamma'G$ avec les droites $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$ par α'', β'', γ''.

On a

$$x.\alpha'\alpha'' = 2\alpha'\beta'\gamma' = \tfrac{1}{2}S';$$

d'où

$$\alpha'\alpha'' = \beta'\beta'' = \gamma'\gamma'' = \frac{S'}{2x} = \frac{3}{2}a,$$

$$(\alpha'\alpha'')^2 = \frac{S'}{4}[\operatorname{cotg} V' + \sqrt{\operatorname{cotg}^2 V' - 3}].$$

BIBLIOGRAPHIE.

The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester, F. R. S., D. C. L., L. L. D., Sc. D., Honorary Fellow of St John's College, Cambridge; Sometime Professor at University College, London; at the University of Virginia; at the Royal Military Academy, Woolwich; at the Johns Hopkins University, Baltimore, and Savilian Professor in the University of Oxford. Volume I (1837-1853). Cambridge, at the University Press, 1904 [London : C. J. Clay and Sons] (In-4°, cartonné de XII-650 pp.). Prix : 18 sh.

« Ce volume a pour objet de donner une idée fidèle de l'évolution de la pensée de l'auteur, sans aucune addition relative aux recherches récentes sur les sujets traités; mais de nombreuses corrections ont été introduites dans les notations algébriques et, pour la commodité du lecteur, on a ajouté des renvois aux pages du volume quand Sylvester cite ses propres mémoires.

Le plus long de ces mémoires est le n° 57 : *On the Theory of the Syzygetic Relations of two Rational Integral Functions, comprising an Application to the Theory of Sturm's Functions*. Plusieurs des petits mémoires du volume se rapportent aux mêmes questions.

Le volume contient aussi la méthode dialytique d'élimination (n° 9, etc.), l'*Essai on Canonical Forms* (n° 34), et les premières recherches sur la théorie des invariants (n°s 42, 43, etc.).

On y trouve également des théorèmes célèbres sur les déterminants (n°s 37, 39, 48, etc.), les travaux sur la transformation des formes quadratiques (*la loi d'inertie*, n° 47, la découverte des facteurs invariants d'une matrice, n°s 22, 24, 36).

En tête du volume il y a une table complète des 68 mémoires (Préface de l'éditeur, H. F. Baker, St John's College, Cambridge, avril 1904). »

Une note de quatre pages de M. Baker, à la fin du livre corrige une erreur de Sylvester et contient un autre exposé des trois principaux théorèmes de l'illustre géomètre sur les déterminants.

Il est à peine nécessaire de dire que l'exécution typographique de l'ouvrage est admirable.

Analytische Meetkunde. **Oplossing der Vraagstukken** uit het Leerboek der Analytische Meetkunde van Dr. P. van Geer door H. Siersma. Culemborg, Blom et Olivierse. 1903 (In-8°, de VIII-224 pages). Prix : florins 2,25.

Vraagstukken over de Analytische Meetkunde van het platte vlak en de rechte lijn en het plakke vlak in de ruimte. Verzameld door H. Siersma. Met aanbevelend woord van Prof. P. Van Geer. Blom en Olivierse. Culemborg, 1904. (In-8° de VIII-173 pages). Prix : flor. 1,90.

Les deux volumes de M. Siersma se font suite et se complètent mutuellement. Le premier contient la solution des problèmes proposés dans le Traité de Géométrie Analytique par M. P. van Geer, professeur émérite à l'Université de Leyde. Ces problèmes, destinés à des élèves qui débutent dans l'étude de la Géométrie Analytique, sont d'ordinaire faciles et suffisamment variés; les solutions qu'en donne M. Siersma, très détaillées et passant par tous les calculs intermédiaires. Au surplus, voici les titres des chapitres et le nombre

des exercices résolus dans chacun d'eux : I. Ligne droite. 17. II. Cercle, 13. III. Coniques, 35. IV. Courbure, 10. V. Propriétés générales des coniques, 8. VI. Lieux géométriques. 13. VII. Polaires réciproques. Théorèmes de Pascal et de Brianchon, 7. VIII. Courbes d'un degré supérieur, 5. IX. Courbes unicursales, 14. X. Courbes transcendantes, 6. XI. Droite et plan dans l'espace, 8.

En publiant ce premier volume, M. Siersma n'annonçait pas le second. Dans ces conditions, on pouvait reprocher à l'auteur, et on lui a reproché en effet, d'être *trop* complet et de ne plus rien laisser au travail personnel de l'élève. Cette critique tombe grâce au second volume, qui renferme les énoncés de 1000 exercices non résolus, et permet de regarder le premier comme donnant seulement des modèles à imiter. Ecrivant pour des commençants, M. Siersma a eu l'heureuse idée de s'inspirer des auteurs anglais et de multiplier les applications purement numériques, dans toutes les parties de son travail. Voici de nouveau les titres des chapitres et le nombre des questions proposées dans chacun d'eux. I. Ligne droite, 114. II. Cercle, 12. III. Combinaisons de la droite et du cercle, 25. IV. Introduction à la théorie des coniques, 60. V. Parabole, 102. VI. Ellipse et Hyperbole, 117. VII. Problèmes se rapportant aux trois coniques, 56. VIII. Normales, 34. IX. Coniques remplissant des conditions données, 15. X. Lieux géométriques, 69. XI. Poles et polaires, 24. XII. Equations symboliques des coniques. Théorèmes de Pascal et de Brianchon, 22. XIII. Lignes du 3e degré, 28. XIV. Lignes du 4e degré et courbes unicursales, 42. XV. Courbes trancendantes, 23. XVI. Droite et plan dans l'espace, 58. XVII. Appendice, 95.

En réunissant, sous le nom d'Appendice, 95 énoncés se rapportant à tous les nos précédents, l'auteur semble avoir moins eu en vue d'y donner de vrais exercices de récapitulation, que d'obliger simplement les élèves à résoudre les questions sans être aidés par l'indication du chapitre auquel elles se rapportent; aussi, peut-être eut-il mieux valu les répartir sous leurs titres respectifs. Mais c'est là une critique de pur détail; l'ouvrage est fort bon, et bien volontiers je fais mienne l'approbation élogieuse que le savant professeur de l'Université de Leyde, M. van Geer, lui donne dans la préface.

H. Bosmans, S. J.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1421.

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 215.)

On donne une pyramide de sommet S *et de base* ABC... *Les parallèles à une même direction* Δ *menées par* A, B, C,... *rencontrent un plan donné* π *en* A_1, B_1, C_1,... *Sur la parallèle à* Δ *menée par* S *on porte une longueur quelconque* SS_1. *Soient* S'_1, A'_1, B'_1, C'_1,... *les symétriques de* S_1 A_1, B_1, C_1,... *respectivement par rapport à* S,(*) A, B, C,... *Démontrer que la somme algébrique des volumes des pyramides* $S_1A_1B_1C_1$..., $S'_1A'_1B'_1C'_1$... *est constante.* (Déprez.)

(*) Passage rectifié.

Solution par **M. Emmerich.** Les pyramides en question se composent de tétraèdres correspondants des sommets S_1 et S'_1 respectivement; il suffit donc de démontrer la proposition pour les tétraèdres $S_1A_1B_1C_1$, $S'_1A'_1B'_1C'_1$.

Soient U, U_1, U'_1 les points d'intersection de la direction SS_1 avec les plans ABC, $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$. Si les droites CU, C_1U_1, $C'_1U'_1$ rencontrent les côtés AB, A_1B_1, $A'_1B'_1$ en Q, Q_1, Q'_1 respectivement, on a $QQ_1 = QQ'_1$, puis $UU_1 = UU'_1$; car la droite joignant les milieux des côtés parallèles d'un trapèze bissecte les droites parallèles à ces côtés et limitées aux deux autres côtés.

Désignons alors l'aire de la section droite du prisme tronqué $A_1B_1C_1A'_1B'_1C'_1$ par q. Il viendra

$$\text{vol. } S_1A_1B_1C_1 = \tfrac{1}{3}\,q \cdot U_1S_1, \quad \text{vol. } S'_1A'_1B'_1C'_1 = \tfrac{1}{3}\,q \cdot U'_1S'_1.$$

Nous en concluons qu'en valeur absolue

$$\begin{aligned}\text{vol. } S_1A_1B_1C_1 \pm \text{vol. } S'_1A'_1B'_1C'_1 &= \tfrac{1}{3}\,q(U_1S_1 - U'_1S'_1)\\ &= \tfrac{1}{3}\,q(US'_1 - US_1) = \tfrac{1}{3}\,q \cdot 2US = 2 \text{ vol. } ABCS. \qquad (1)\end{aligned}$$

On prendra la somme ou la différence suivant que le point S est situé ou non entre les points U_1 et U'_1.

Si l'on appelle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) les coordonnées rectangulaires des points A, B, C, S, (α, β, γ) les cosinus directeurs de Δ, ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 les distances AA_1, BB_1, CC_1, SS_1, l'égalité (1) correspond à l'identité

$$\begin{vmatrix} x_1+\alpha\rho_1 & y_1+\beta\rho_1 & z_1+\gamma\rho_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1-\alpha\rho_1 & y_1-\beta\rho_1 & z_1-\gamma\rho_1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Question 1450.

(Voir *Mathesis* (3), III, p. 280.)

Soient $a_1, a_2, \cdots, a_p$, ***les racines supposées inégales de l'équation***

$$F(x) \equiv A_0x^p + A_1x^{p-1} + \cdots + A_p = 0.$$

Former l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction

$$y = C_1(x - a_1)^m + C_2(x - a_2)^m + \cdots + C_p(x - a_p)^m,$$

où $C_1, C_2 \cdots C_p$ ***sont des constantes arbitraires.***

Cas particulier de $F(x) = x^p - 1$. (Boutin.)

Solution par MM. Abramescu, Audibert et Ots. Si m est entier et

inférieur à p, l'équation différentielle cherchée est évidemment $y^{(m+1)} = 0$. S'il n'en est pas ainsi, désignons les différences $x - a_1$, $x - a_2$, ... par X_1, X_2, ... Nous aurons

$$\begin{aligned}
y &= C_1 X_1^m + C_2 X_2^m + \cdots + C_p X_p^m, \\
\frac{1}{m} y' &= C_1 X_1^{m-1} + C_2 X_2^{m-1} + \cdots + C_p X_p^{m-1}, \\
\frac{1}{m(m-1)} y'' &= C_1 X_1^{m-2} + C_2 X_2^{m-2} + \cdots + C_p X_p^{m-2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{1}{m(m-1)\cdots(m-p+1)} y^{(p)} &= C_1 X_1^{m-p} + C_2 X_2^{m-p} + \cdots + C_p X_p^{m-p}.
\end{aligned}$$

Entre ces $(p+1)$ équations, éliminons les p quantités C_1, C_2, ... C_p en égalant à zéro le déterminant formé avec les premiers membres et avec les coefficients de C_1, C_2, ... C_p. En multipliant la première colonne par le produit $1, 2, 3 \cdots m$, en divisant les autres colonnes respectivement par X_1^{m-p}, X_2^{m-p}, ... X_p^{m-p}, et renversant l'ordre des lignes, on obtient pour l'équation cherchée

$$\begin{vmatrix}
(m-p)!\, y^{(p)} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
(m-p+1)!\, y^{(p-1)} & X_1 & X_2 & \cdots & X_p \\
(m-p+2)!\, y^{(p-2)} & X_1^2 & X_2^2 & \cdots & X_p^2 \\
\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
m!\, y & X_1^p & X_2^p & \cdots & X_p^p
\end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Si l'on appelle $\Delta_0, \Delta_1, \cdots \Delta_p$ les déterminants déduits du tableau des p dernières colonnes de (1) respectivement par la suppression des lignes $1, 2, 3, \cdots, p+1$, l'équation (1) prend la forme

$$(m-p)!\, y^{(p)} \Delta_0 - (m-p+1)!\, y^{(p-1)} \Delta_1 + \cdots + (-1)^p m!\, y \Delta_p = 0. \qquad (2)$$

On observe immédiatement que Δ_p est un déterminant de Vandermonde ou plutôt de Cauchy, égal au produit

$$(X_2 - X_1)(X_3 - X_1) \cdots (X_p - X_1)(X_3 - X_2) \cdots (X_p - X_{p-1}) \qquad (3)$$

ou au produit

$$P \equiv (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \cdots (a_1 - a_p)(a_2 - a_3) \cdots (a_{p-1} - a_p).$$

On voit encore facilement que, si l'on fait $A_0 = 1$,

$$\Delta_0 = X_1 X_2 \cdots X_p P = F(x) P,$$

Comme Δ_i s'annule quand on remplace une colonne par une autre, il est divisible par le produit (3) ou par P, et on peut poser $\Delta_i = P\partial_i$, ∂_i désignant une certaine fonction homogène et symétrique, de degré $p - i$ des lettres $X_1, X_2, \cdots X_p$; car Δ_i et Δ_p sont des *fonctions alternées* dont les degrés sont respectivement

$$1 + 2 + \cdots + (i-1) + (i+1) + \cdots + p,$$
$$1 + 2 + \cdots + (i-1) + i + (i+1) + \cdots + (p-1).$$

Les termes diagonaux des déterminants Δ_i, Δ_p étant

$$X_2X_3^2 \cdots X_i^{i-1}X_{i+1}^{i+1}X_{i+2}^{i+2} \cdots X_p^p, \quad X_2X_3^2 \cdots X_i^{i-1}X_{i+1}^i \cdots X_2^{p-1},$$

∂_i doit comprendre le terme $X_{i+1}X_{i+2} \cdots X_p$ pour que le produit $P\partial_i$ reproduise Δ_i. On en conclut que ∂_i est une fonction symétrique, somme de tous les produits analogues à $X_1X_2 \cdots X_{p-i}$. Or, de l'identité

$$F(x) = X_1X_2 \cdots X_p,$$

on tire, par dérivation

$$F'(x) = X_2X_3 \cdots X_p + X_1X_3 \cdots X_p + \cdots + X_1X_2 \cdots X_{p-1} = \partial_1,$$
$$\frac{F''(x)}{1 \cdot 2} = X_3 \cdots X_p + X_1X_3 \cdots X_p + \cdots + X_1X_2 \cdots X_{p-2} = \partial_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{F^{(i)}(x)}{1 \cdot 2 \cdots i} = X_{i+1}X_{i+2} \cdots X_p + \cdots + X_1X_2 \cdots X_{p-i} = \partial_i.$$

Il en résulte l'équation différentielle :

$$(m-p)!\, y^{(p)}F(x) - (m-p+1)!\, y^{(p-1)}F'(x) + (m-p+2)!\, y^{(p-2)}\frac{F''(x)}{1 \cdot 2} + \cdots$$
$$+ (-1)^p m!\, y\frac{F^p(x)}{1 \cdot 2 \cdots p} = 0,$$

ou, en divisant par $(-1)^p(m-p)!$ et renversant l'ordre des termes,

$$\frac{m-1)\cdots(m-p+1)}{p!}yF^p(x) + (-1)\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-p+1)}{(p-1)!}y'F^{p-1}(x) + \cdots$$
$$+ (-1)^i\frac{(m-i)\cdots(m-p+1)}{(p-i)!}y^{(i)}F(x)^{p-i} + \cdots$$
$$+ (-1)^{p-1}\frac{(m-p+1)}{1}y^{p-1}F'(x) + (-1)^p y^pF(x) = 0.$$

Dans le cas particulier de $F(x) \equiv x^p - 1$, il viendra

$$m(m-1)\cdots(m-p+1)y + (-1)(m-1)\cdots(m-p+1)\frac{p}{1}xy' + \cdots$$

$$+ (-1)^i (m-i)\cdots(m-p+1)\frac{p(p-1)(p-i+1)}{i!}x^i y^{(i)} + \cdots$$

$$+ (-1)^{p-1}(m-p+1)\frac{p}{1}x^{p-1}y^{(p-1)} + (-1)^p(x^p-1)y^{(p)} = 0.$$

Question 1454.

(Voir *Mathesis*, (3), IV, p. 32).

Les sommets B, C ***d'un triangle variable*** ABC ***se meuvent sur une droite donnée*** $x'x$ ***et le sommet*** A ***sur une perpendiculaire*** yy' ***à*** xx'. ***Le pied*** B' ***de la hauteur issue de*** B ***étant fixe, on demande les enveloppes des médianes*** AA_1, BB_1, CC_1, ***de la hauteur*** CC' ***et du côté*** AB, ***ainsi que les lieux du milieu de*** AB, ***du pied*** C' ***de la hauteur*** CC'.

Solution par M. Emmerich. La hauteur AA' étant la bissectrice de l'angle B'A'C', le lieu du point C' est la symétrique $A'z$ de A'B' par rapport à $y'y$. Comme $C_1B' = C_1A'$ $(= \frac{1}{2}AB)$, le point C_1 décrit la perpendiculaire au milieu de la droite A'B'.

Les droites AB, HC se meuvent entre les droites rectangulaires $x'x$, $y'y$ de manière à être vues constamment du point B' sous un angle droit. Il en résulte qu'elles enveloppent une même parabole de foyer B' et tangente aux droites $x'x$, $y'y$; la directrice est la droite $A's$ menée par le sommet A' d'un angle droit circonscrit et symétrique du rayon vecteur B'A' par rapport à un côté de cet angle.

Par le milieu D de A'B' menons Du parallèle à BC et rencontrant AC au milieu E de B'C, Dv parallèle à $y'y$ et coupant AC au milieu F de B'A ; il est facile de voir que $EB_1 = B'F$. Par conséquent, le point B_1 décrit une hyperbole équilatère passant par B' et ayant pour asymptotes Du, Dv.

Lorsque l'angle droit BB'A tourne autour de son sommet B', les points A, B, C, C_1 décrivent des ponctuelles projectives. Nous en concluons d'abord que la droite CC_1 enveloppe une conique qui touche la droite $x'x$ et la médiatrice de A'B'. Ensuite, il existe entre les ponctuelles [A]. [A_1] une correspondance (2, 1); car à une position donnée de A correspond une seule de A_1, et à une position donnée de A_1 on peut faire

correspondre pour A chacun des points A, H déterminés sur $y'y$ par les droites joignant B′ aux points de rencontre B, C de $x'x$ avec la circonférence (A′, A_1B'). Par conséquent, la droite AA_1 enveloppe une courbe de la troisième classe. Enfin, l'angle droit mobile $BB'B_1$ marque sur la droite BC et sur l'hyperbole lieu du milieu de AC une ponctuelle rectiligne et une ponctuelle du second ordre qui sont projectives; donc, d'après un théorème connu, la droite BB_1 enveloppe une courbe de la troisième classe.

Solution analytique par M. Rosr.

M. Dérrez qui a résolu complétement la question, trouve que la droite CC_1 enveloppe une conique de foyer B′; car les extrémités C, C_1 se meuvent sur deux droites fixes et l'angle $C_1B'A = C_1AB'' = B'A'C$. Notre zélé correspondant énonce aussi les propriétés suivantes de la même figure :

1° Le centre de gravité du triangle ABC décrit une hyperbole dont les asymptotes sont l'une, parallèle à $x'x$ et l'autre, perpendiculaire à A′B′.

2° Le centre du cercle circonscrit décrit une hyperbole dont l'axe imaginaire est $x'x$; l'axe réel passe par B′ et une asymptote est perpendiculaire à A′B′.

3° Les bissectrices de l'angle C enveloppent une parabole de foyer B′ et ayant pour directrice $x'x$.

4° Les bissectrices de l'angle A enveloppent des paraboles de foyer B′.

Question 1468.

(Voir *Mathesis*, (3) IV; p. 104.)

D'un point donné comme centre, décrire un cercle qui soit harmoniquement inscrit ou circonscrit à une ellipse donnée, c'est-à-dire inscrit ou circonscrit à un triangle conjugué à cette ellipse. Trouver le lieu des centres des cercles qui sont à la fois harmoniquement inscrits et circonscrits à une ellipse donnée.

Y a-t-il des cercles osculateurs d'une ellipse qui soient harmoniquement inscrits ou circonscrits à la courbe? (M. Stuyvaert).

Solution par MM. Rose *et* Abramescu. Soient

$$S \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$S' \equiv (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0,$$

les équations de l'ellipse donnée et d'un cercle quelconque; les inva-

riants Θ et Θ' relatifs à ces deux courbes sont

$$\Theta \equiv \frac{1}{a^2 b^2}(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 - r^2),$$

$$\Theta' \equiv \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 - r^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

I. On sait que Θ s'annule quand S′ est harmoniquement circonscrit à S. Donc le rayon r du cercle demandé est défini par

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - (a^2 + b^2). \qquad (1)$$

Il résulte de là que ce cercle coupe orthogonalement le cercle de Monge (Théorème de *Faure*). Il suffit donc de tracer, du point donné comme centre, un cercle ayant pour rayon la tangente menée de ce point au cercle orthoptique de l'ellipse donnée ; pour que le cercle soit réel, il faut que le point donné soit extérieur au cercle de Monge.

II. Si S′ est harmoniquement inscrit à S, on a $\Theta' = 0$, d'où

$$r^2 = \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right) : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right). \qquad (2)$$

Le cercle S′ est réel quand le point est extérieur à l'ellipse, et il est de rayon nul quand le point est sur l'ellipse.

III. Le centre d'un cercle à la fois harmoniquement inscrit et circonscrit à l'ellipse satisfait à l'équation qu'on obtient en éliminant r^2 entre les conditions (1) et (2) :

$$\frac{\alpha^2}{b^2} + \frac{\beta^2}{a^2} = \frac{a^4 + a^2 b^2 + b^4}{a^2 b^2}.$$

Le lieu de ce centre est donc une ellipse concentrique à l'ellipse donnée, et extérieure au cercle de Monge.

IV. Les coordonnées du centre et le rayon du cercle osculateur, au point $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ de l'ellipse S, sont

$$\alpha = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi, \quad \beta = -\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi, \quad r = \frac{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1) on trouve

$$(a^2 - b^2)^2(b^2\cos^6\varphi + a^2\sin^6\varphi) - (a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^3 - a^2b^2(a^2 + b^2)(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^3 = 0,$$

ou

$$b^2\cos^6\varphi + (a^2 + 2b^2)\cos^4\varphi\sin^2\varphi + (b^2 + 2a^2)\sin^2\varphi\cos^4\varphi + a^2\sin^6\varphi = 0.$$

Si l'on divise tous les termes par $\cos^6\varphi$, l'équation en $\operatorname{tg}^2\varphi$ ainsi obtenue admet une seule solution réelle $\operatorname{tg}^2\varphi = -1$; donc il n'existe pas de cercle osculateur réel qui soit harmoniquement circonscrit à l'ellipse.

V. Un calcul analogue appliqué à la condition (2) donne

$$(a^2+b^2)(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^5 - c^4(b^4\cos^6\varphi+a^4\sin^6\varphi) + a^4b^4(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)^5 = 0.$$

Cette équation se ramène à

$$a^4\sin^6\varphi + a^2(a^2+2b^2)\sin^4\varphi\cos^2\varphi + b^2(b^2+2a^2)\sin^2\varphi\cos^4\varphi + b^4\cos^6\varphi = 0.$$

Elle est vérifiée par $\operatorname{tg}^2\varphi = -1$ et par deux valeurs imaginaires de $\operatorname{tg}^2\varphi$; donc il n'existe pas de cercle osculateur réel qui soit harmoniquement inscrit à l'ellipse.

Question 1472.

(Voir *Mathesis* (3), IV, p. 128).

Intégrer le système

$$\frac{dx}{dt} = y + x\varphi'(t), \quad \frac{dy}{dt} = x + y\varphi'(t).$$

(Abramescu).

Solutions par MM. Emmerich et Rose. En faisant la somme de ces équations multipliées respectivement par y et $-x$, ou par x et $-y$, on trouve

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = y^2 - x^2,$$

$$x\frac{dx}{dt} - y\frac{dy}{dt} = (x^2-y^2)\varphi'(t).$$

Ce nouveau système peut être écrit ainsi :

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} : \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) = dt, \tag{1}$$

$$\frac{xdx - ydy}{x^2-y^2} = \varphi'(t)dt. \tag{2}$$

L'équation (2) donne immédiatement

$$\tfrac{1}{2} l(x^2 - y^2) = \tfrac{1}{2} lC + \varphi(t),$$

ou

$$x^2 - y^2 = Ce^{2\varphi(t)}. \qquad (3)$$

Si l'on fait $y : x = z$, l'équation (1) prend la forme

$$\left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}\right) dz = 2dt;$$

on en déduit une seconde intégrale du système proposé :

$$\frac{x+y}{x-y} = C_1 e^{2t}. \qquad (4)$$

Des équations (3) et (4) on tire facilement des valeurs des quantités $x + y$, $x - y$; ensuite :

$$x = De^{\varphi(t)+t} + D_1 e^{\varphi(t)-t},$$
$$y = De^{\varphi(t)+t} - D_1 e^{\varphi(t)-t},$$

D et D_1 étant des constantes d'intégration.

Solution par M. Desprets. On peut résoudre le système par la méthode de d'Alembert. En effet, ajoutons membre à membre les deux équations après avoir multiplié la seconde par une indéterminée θ, nous aurons

$$\frac{dx}{dt} + \theta \frac{dy}{dt} = y + \theta x + (x + \theta y)\varphi'(t).$$

Posons $x + \theta y = s$, et éliminons x; il vient

$$\frac{ds}{dt} - y\frac{d\theta}{dt} = y + \theta(s - \theta y) + s\varphi'(t) \qquad (1)$$

On fait disparaître y de cette équation en posant

$$\frac{d\theta}{dt} - \theta^2 + 1 = 0; \qquad (2)$$

alors l'équation (1) se réduit à

$$\frac{ds}{dt} - \theta s - s\varphi'(t) = 0. \qquad (3)$$

L'équation (2) a pour solutions évidentes

$$\theta = 1, \quad \theta = -1, \qquad (4)$$

qui ramènent l'équation (3) respectivement à

$$\frac{ds}{dt} - s[1 + \varphi'(t)] = 0. \tag{5}$$

$$\frac{dz}{dt} + z[1 - \varphi'(t)] = 0. \tag{6}$$

Les intégrales de (5) et (6) sont, A et B étant des constantes arbitraires,

$$z = 2Ae^{\varphi(t)+t} = 2Ae^{\varphi(t)}[\mathrm{Ch}\, t + \mathrm{Sh}\, t], \tag{7}$$

$$s = 2Be^{\varphi(t)-t} = 2Be^{\varphi(t)}[\mathrm{Ch}\, t - \mathrm{Sh}\, t]. \tag{8}$$

Mais ayant posé $x + \theta y = s$, les valeurs (7), (8) donnent

$$x + y = 2Ae^{\varphi(t)}(\mathrm{Ch}\, t + \mathrm{Sh}\, t),$$

$$x - y = 2Be^{\varphi(t)}(\mathrm{Ch}\, t - \mathrm{Sh}\, t),$$

d'où l'on déduit en faisant $A + B = M$, $A - B = N$:

$$x = e^{\varphi(t)}[M\,\mathrm{Ch}\, t + N\,\mathrm{Sh}\, t],$$

$$y = e^{\varphi(t)}[N\,\mathrm{Ch}\, t + M\,\mathrm{Sh}\, t].$$

Solution par M. Verheugen. Par addition ou soustraction, on obtient

$$\frac{d(x+y)}{x+y} = [1 + \varphi'(t)]\, dt,$$

$$\frac{d(x-y)}{x-y} = [\varphi'(t) - 1]\, dt,$$

d'où l'on déduit

$$x + y = Ce^{\varphi(t)+t},$$

$$x - y = C_1 e^{\varphi(t)-t}.$$

Il reste à tirer de là les valeurs de x et y en fonction de t.

Autre solution par M. Prange.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1167. Quand on divise le produit $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ (a, b, c, sont des nombres premiers absolus) par a, le nombre des diviseurs de ce produit est diminué de A; quand on le divise par b, le nombre des diviseurs est diminué de B; quand on le divise par c, ce même nombre est diminué de C. Trouver α, β, γ.

1168. Trois associés ont constitué un fonds social de 56134 fr.; la

mise du second surpasse de 1512 fr. les $\frac{2}{5}$ de celle du premier; la mise du 3e s'élève aux $\frac{3}{4}$ de celle du 2e plus 1488 fr. D'autre part, la 1re mise est restée un mois dans l'association, la 2e deux mois, la 3e trois mois, et le bénéfice réalisé est de 514 fr. 45.

Combien revient-il à chaque associé et à quel taux a-t-il placé son argent?

1169. Si les angles de deux triangles ABC, A'B'C' sont liés par les égalités

$$B' = 90° - B, \quad C' = 90° - C,$$

les côtés vérifient la relation

$$b^2a'^2 + a^2b'^2 = (bc' + b'c)^2. \qquad (1)$$

(J. J. DURAN-LORIGA.)

Soit D la seconde extrémité du diamètre AO de la circonférence circonscrite au triangle ABC; le triangle DBC est semblable à A'B'C'. L'égalité

$$AD.BC = AB.DC + AC.DB$$

conduit facilement à la formule (1).

1170. Soit un quadrilatère ABC inscrit dans un cercle de centre O et dont les diagonales AC, BD se coupent rectangulairement en I. Montrer que le centre des moyennes distances des points A, B, C, D est le milieu de la droite OI. (BARISIEN.)

Si M, N sont les milieux des cordes AC, BD, la figure MONI est un rectangle; or, le centre des moyennes distances est le milieu de la droite MN.

1171. Les rayons AO, BO, CO du cercle circonscrit au triangle ABC rencontrent les côtés opposés en A', B', C'; démontrer que

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = \frac{2}{R}. \qquad \text{(DELAHAYE.)}$$

Quel que soit le point O, des théorèmes connus donnent

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1,$$

$$\frac{AO}{AA'} + \frac{BO}{BB'} + \frac{CO}{CC'} = 2.$$

De la seconde égalité on conclut la formule proposée.

1172. Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2 x}}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2 x}}.$$

(BOUTIN.)

La substitution $\sin\alpha \sin x = u$ ramène la première intégrale à

$$\frac{1}{\sin\alpha}\left[\arcsin\left(\sin\alpha\sin x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\alpha}{\sin\alpha}.$$

Après avoir remplacé $\sin^2\alpha\sin^2 x$ par $\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2 x$, on est conduit à poser $\sin\alpha\cos x = u$, et à appliquer la formule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = l\left(x+\sqrt{x^2+a}\right);$$

on trouve ainsi pour la seconde intégrale

$$\frac{1}{\sin\alpha}\, l\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

1173. Si les côtés d'un triangle rectangle sont proportionnels aux nombres 3, 4, 5, les rayons des cercles tritangents sont entre eux comme les nombres 1, 2, 3, 6. (STEINER.)

1174. Par la trace horizontale d'une ligne de front donnée, mener une seconde droite faisant avec celle-ci un angle donné, telle en outre que le segment intercepté sur elle par les deux plans de projection ait une longueur donnée. (*Bacc. lettres-math.*, Dijon, 1903.)

CONCOURS DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN EN BELGIQUE (1904).

Géométrie analytique (*).

Soient deux axes rectangulaires OX, OY; on donne un point A de coordonnées p, q, ainsi que le symétrique B de ce point par rapport à l'origine O.

1° Trouver l'équation du lieu des foyers des hyperboles équilatères passant par les deux points donnés A, B et dont l'axe réel est parallèle à OX.

2° On demande une discussion algébrique de l'équation trouvée, afin de reconnaître la nature du lieu suivant les positions du point A.

3° Dans le cas où le lieu est une ellipse, ramener l'équation à sa forme la plus simple et déterminer les longueurs des axes de symétrie ainsi que la position des foyers.

(*) Nous insérerons volontiers dans *Mathesis* une bonne solution de cette question.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1489. Soient (a, a'), (b, b'), (c, c') les trois couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre ABCD. Par un point quelconque P on mène les droites a'', b'', c'' qui rencontrent respectivement les couples (a, a'), (b, b'), (c, c') aux points (A_1, A_1'), (B_1, B_1'), (C_1, C_1').

Démontrer que le plan $b''c''$ tourne autour d'une droite fixe a''' s'appuyant sur a et a' lorsque le point P parcourt la droite a''. Réciproquement, si un plan tourne autour d'une droite a''' s'appuyant sur a et a', il rencontre les arêtes b, b', c, c' en des points B_1, B_1', C_1, C_1' tels que le point d'intersection des droites B_1B_1', C_1C_1' parcourt une droite a'' s'appuyant sur a et a'. (STEINER.)

×**1490**. On considère un triangle sphérique ABC dans lequel une médiane α est le supplément de la moitié du côté correspondant a. 1° Démontrer que la surface de ce triangle est égale à celle du fuseau droit; 2° Établir la relation

$$\operatorname{cotg} R = \operatorname{cotg}\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\frac{c}{2},$$

a, b, c désignant les côtés du triangle et R, le rayon du cercle circonscrit.

Question posée au concours de l'enseignement moyen en Belgique (1904).

1491. On considère une ellipse, un foyer F, un point variable M sur l'ellipse, le cercle décrit sur MF comme diamètre, et un cercle concentrique à l'ellipse, de rayon R. Le lieu des centres de similitude des deux cercles se compose de deux coniques. Quel doit être le rayon R pour que chacune de ces coniques soit : 1° un cercle, 2° une parabole, 3° une hyperbole équilatère, 4° deux droites.

Traiter la question analogue avec le cercle de centre M et de rayon MF. (R. N. BARISIEN.)

1492. La normale en un point quelconque M d'une courbe C rencontre l'axe Ox au point N; sur la perpendiculaire élevée en N sur NM on prend la longueur $NM' = NM$. Le point M' engendre une seconde courbe C'.

On demande 1° de construire la tangente en M' à la courbe C'; 2° de déterminer la courbe C par la condition que le rayon vecteur OM' soit égal à l'abscisse du point M. (ABRAMESCU.)

SUR UN COMPLEXE QUADRATIQUE,

par M. Fr. Corin, ingénieur à Sclaigneaux.

(Suite; voir *Mathesis*, (3), IV, p. 177.)

Notes. I. C et D étant les points qui divisent la droite AB dans le rapport $m : 1$, et A′, B′, C′, D′ étant les projections des points A, B, C, D sur une droite quelconque u du complexe, on a vu (§ 2) que les points C′, D′ appartiennent à la sphère de diamètre CD. On déduit de là ce théorème dont la démonstration directe est facile :

C et D étant les extrémités d'un diamètre d'une sphère, et C′D′ *une corde quelconque, si l'angle* CC′D′ *est droit, il en est de même de l'angle* DD′C′.

II. Soit O le milieu de CD, et soient A_1, B_1, C_1, D_1, O_1 les projections des points A, B, C, D, O sur un plan λ perpendiculaire à la droite u du complexe au point P; on a $O_1C_1 = O_1D_1 = O_1P$ (§ 8). Or, O_1P est égal à la distance OO′ du point O à la droite u; O_1C_1 est la projection de OC sur λ. Par conséquent, si l'on pose $OO' = \delta$, $OC = R$ et que ε désigne l'angle de u avec AB, on a

$$\delta = R \sin \varepsilon.$$

Cette relation conduit à une construction très simple des cylindres du complexe. En effet, soit v une droite menée par C et faisant avec CD l'angle ε; abaissons de O une perpendiculaire sur v, elle sera égale à $R \sin \varepsilon$. Décrivons la sphère de centre O et de rayon $R \sin \varepsilon$; le cylindre circonscrit à cette sphère et parallèle à v appartient au complexe. Si l'on fait tourner ce cylindre autour de CD, il ne cessera de faire partie du complexe.

III. Prenons la droite AB pour axe des z, et laissons encore l'origine des coordonnées indéterminée. Soient $(0, 0, \alpha)$, $(0, 0, \beta)$, (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) les coordonnées des points A, B et de deux points quelconques M, N d'une droite u du complexe. Le rapport des aires des triangles AMN, BMN doit être égal à m. Le carré de chacune de ces aires étant égal à la somme des carrés de ses projections sur les plans coordonnés, la quantité $4\overline{AMN}^2$ a pour expression

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}^2.$$

ou

$$q_3^2+(\alpha p_2-q_1)^2+(\alpha p_1-q_2)^2,$$

si l'on pose

$$p_1=x_1-x_2, \qquad p_2=y_1-y_2, \qquad p_3=z_1-z_2,$$
$$q_1=y_1z_2-y_2z_1, \quad q_2=z_1x_2-z_2x_1, \quad q_3=x_1y_2-x_2y_1;$$

on sait que p_1. p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 sont les *coordonnées radiales* de u. L'équation du complexe (u), d'après cela, est :

$$q_3^2+(\alpha p_2-q_1)^2+(\alpha p_1-q_2)^2=m^2[q_3^2+(\beta p_2-q_1)^2+(\beta p_1-q_2)^2)].$$

On peut l'écrire ainsi :

$$(q_1^2+q_2^2+q_3^2)(1-m^2)+(p_1^2+p_2^2)(\alpha^2-m^2\beta^2)$$
$$-2(p_1q_2+p_2q_1)(\alpha-m^2\beta)=0.$$

On la simplifie en choisissant l'origine de manière que l'on ait ou $\alpha-m\beta=0$, ou $\alpha+m\beta=0$, ou $\alpha=m^2\beta$; ce qui revient à placer l'origine des coordonnées soit en C, soit en D, soit au milieu O de CD. Dans le dernier cas, l'équation du complexe devient en remplaçant m^2 par $\frac{\alpha}{\beta}$

$$q_1^2+q_2^2+q_3^2=R^2(p_1^2+p_2^2), \qquad (1)$$

où $R^2=\alpha\beta=OA.OB=\overline{OC}^2$.

IV. M. Corin a trouvé certains hyperboloïdes réglés dont les génératrices d'un système appartiennent au complexe (u). Voici comment on peut les déduire de l'équation (1).

A cause de l'identité

$$p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3=0, \qquad (2)$$

l'équation (1) peut être remplacée par

$$q_1^2+q_2^2+q_3^2=R^2(p_1^2+p_2^2)+\nu(p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3)$$

où ν désigne un facteur arbitraire, ou par

$$(q_1^2-\nu p_1q_1-R^2p_1^2)+(q_2^2-\nu p_2q_2-R^2p_2^2)+q_3(q_3-\nu p_3)=0. \qquad (3)$$

Soient λ, μ les racines de l'équation $\alpha^2-\nu\alpha-R^2=0$; l'équation (3) revient à

$$(q_1-\lambda p_1)(q_1-\mu p_1)+(q_2-\lambda p_2)(q_2-\mu p_2)+q_3(q_3-\nu p_3)=0.$$

Elle admet les solutions du système

$$q_1-\lambda p_1=0, \quad q_2-\mu p_2=0, \quad q_3-\nu p_3=0. \qquad (4)$$

Par suite, les droites communes aux trois complexes linéaires représentés par les équations (4) font partie du complexe (𝔄). Pour démontrer que ces droites appartiennent à un hyperboloïde, écrivons les équations (4) ainsi :

$$z_1(y_1 - y_2) - y_1(z_1 - z_2) - \lambda(x_1 - x_2) = 0,$$
$$x_1(z_1 - z_2) - z_1(x_1 - x_2) - \mu(y_1 - y_2) = 0,$$
$$y_1(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2) - \nu(z_1 - z_2) = 0,$$

et éliminons les différences $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$; nous aurons

$$\begin{vmatrix} -\lambda & z_1 & -y_1 \\ -z_1 & -\mu & x_1 \\ y_1 & -x_1 & -\nu \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\lambda x_1^2 + \mu y_1^2 + \nu z_1^2 + \lambda\mu\nu = 0. \qquad (5)$$

Comme x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées d'un point quelconque de 𝔄, et que λ et μ sont de signes contraires, l'équation (5) représente un hyperboloïde lieu de droites du complexe (𝔄).

En faisant la somme des équations (4) multipliées respectivement par p_1, p_2, p_3 on trouve

$$\lambda p_1^2 + \mu p_2^2 + \nu p_3^2 = 0. \qquad (6)$$

Or, p_1, p_2, p_3 sont proportionnels aux paramètres directeurs de 𝔄; donc l'équation (6) représente le cône directeur de l'hyperboloïde, ce qui résulte aussi de l'équation (5).

L'équation (3) admet aussi les solutions du système

$$q_1 - \lambda p_1 = 0, \quad q_2 - \lambda p_2 = 0, \quad q_3 - \nu p_3 = 0;$$

les droites correspondantes appartiennent à un hyperboloïde de révolution.

V. Les notations étant celles du § 2, on peut étudier les complexes des droites vérifiant l'une des équations ($AA' \equiv \alpha$, $BB' \equiv \beta$)

$$\alpha^2 - \beta^2 = R^2, \quad \alpha^2 - m^2\beta^2 = R^2, \quad \alpha^2 + m^2\beta^2 = R^2.$$

Le premier est le lieu des perpendiculaires élevées en un point quelconque M d'un plan fixe π sur la droite joignant M à un point fixe C. Le second est le lieu des perpendiculaires élevées en un point quelconque M d'une sphère donnée S sur la droite unissant M à un point fixe C non situé sur la sphère S. (J. Neuberg.)

NOTE SUR LA CONCHOÏDE DE NICOMÈDE,

par M. A. H. Couvert.

A. *Tangentes issues d'un point* (α, β) P. Soit

$$(x-a)^2(x^2+y^2)-b^2x^2=0 \qquad (1)$$

l'équation d'une conchoïde de Nicomède Γ. Soient A le pôle ou point double de la courbe et D son asymptote; nous appellerons *rayon asymptotique* la distance a de A à D et *paramètre* la longueur b dont on fait varier le rayon vecteur d'un point de D pour obtenir les deux points correspondants de Γ. Exprimons que la tangente au point (x, y) de Γ passe en P; nous aurons :

$$\beta-y=\frac{b^2x-(x-a)(x^2+y^2)-x(x-a)^2}{y(x-a)^2}(\alpha-x). \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) déterminent les points de contact. Nous nous proposons de chercher l'équation aux rayons vecteurs des points de contact. Pour cela, posons

$$x^2+y^2=\rho^2 \qquad (3)$$

et l'équation cherchée s'obtiendra en éliminant x et y entre (1), (2), (3).

De (2), on tire en tenant compte de (1) :

$$b^2\alpha x-(x-a)(\alpha-a)(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)(x-a)^2=0. \qquad (4)$$

De (1) et (3), on déduit

$$x=\frac{a\rho}{\rho-b}, \quad y=\frac{\rho}{\rho-b}\sqrt{(\rho-b)^2-a^2}.$$

Portons ces valeurs dans (4); il vient

$$\frac{ab^2\alpha\rho}{\rho-b}-a\rho^2\left(\frac{\rho}{\rho-b}-1\right)\left(\alpha-\frac{a\rho}{\rho-b}\right)$$
$$-a^2\rho\left(\frac{a\alpha}{\rho-b}+\frac{\beta\sqrt{(\rho-b)^2-a^2}}{\rho-b}\right)\left(\frac{\rho}{\rho-b}-1\right)^2=0.$$

En chassant les dénominateurs et le radical, puis ordonnant par rapport à ρ, on obtient

$$\begin{cases}(\alpha-a)^2\rho^6-2b(\alpha-a)(3\alpha-a)\rho^5+b^2[(3\alpha-a)^2+6\alpha(\alpha-a)]\rho^4\\ \qquad -2b\alpha[(b^2-a^2)(\alpha-a)+3b^2(3\alpha-a)]\rho^3\\ \qquad +b^2[9b^2\alpha^2+2\alpha(b^2-a^2)(3\alpha-a)-a^2b^2\beta^2]\rho^2\\ +2b^3[-3\alpha^2(b^2-a^2)+a^2\beta^2]\rho+(b^2-a^2)[b^2\alpha^2(b^2-a^2)-a^2b^2\beta^2]=0.\end{cases}$$

Il en résulte

$$\Sigma\rho_1 = -\frac{-2b(\alpha-a)(3\alpha-a)}{(\alpha-a)^2} = \frac{2b(3\alpha-a)}{\alpha-a},$$

$$\Sigma\rho_1\rho_2 = \frac{b^2[15\alpha^2-12a\alpha+a^2]}{(\alpha-a)^2},$$

$$\Sigma\rho_1^2 = (\Sigma\rho_1)^2 - 2\Sigma\rho_1\rho_2 = \frac{2b^2(3\alpha^2+a^2)}{(\alpha-a)^2}.$$

Ces diverses sommes ne dépendent pas de β. D'où la proposition suivante :

I. *Lorsque le point* P *se déplace sur une parallèle à l'asymptote de* Γ *1° la somme des rayons vecteurs des points de contact des tangentes issues de* P *est constante. 2° La somme des carrés des mêmes rayons est constante.*

B. *Normales issues d'un point* P (α, β). Traitons la même question pour les normales issues de P. La condition pour que la normale à Γ au point (x, y) passe en P (α, β) est :

$$[b^2x - (x-a)(x^2+y^2)](\beta-y) + (x-a)^2(\alpha y - \beta x) = 0. \quad (5)$$

L'équation aux rayons vecteurs des pieds des normales issues de P s'obtiendra en éliminant x et y entre (1), (5), (3).

Nous savons que

$$x = \frac{a\rho}{\rho-b}, \quad x-a = \frac{ab}{\rho-b},$$

en sorte que (5) peut être écrite, après certaines transformations faciles,

$$\beta\rho(b-\rho)^3 - a^2b\beta\rho + (\rho-b)y[\rho(\rho-b)^2 + ab\alpha] = 0.$$

Remplaçons $(\rho-b)y$ par $\rho\sqrt{(\rho-b)^2-a^2}$; il vient, tous calculs faits,

$$\rho^6 - 6b\rho^5 + (15b^2 - a^2 - \beta^2)\rho^4 + \cdots$$
$$+ b^2(b^2-a^2)[a^2\alpha^2 - (b^2-a^2)\beta^2] = 0.$$

Nous en déduisons :

$$\Sigma\rho_1 = 6b,$$
$$\Sigma\rho_1\rho_2 = 15b^2 - a^2 - \beta^2,$$
$$\Sigma\rho_1^2 = (\Sigma\rho_1)^2 - 2\Sigma\rho_1\rho_2 = 6b^2 + 2a^2 + 2\beta^2,$$
$$\rho_1\rho_2\cdots\rho_6 = b^2(b^2-a^2)[a^2\alpha^2 - (b^2-a^2)\beta^2].$$

De ces relations on tire immédiatement les propriétés suivantes :

II. *La somme des rayons vecteurs des pieds des normales menées d'un point arbitraire* P *à une conchoïde de Nicomède, est constante et égale à six fois le paramètre de cette courbe.*

III. *Lorsque le point* P *se déplace sur une parallèle à l'axe de symétrie de la conchoïde, la somme des carrés des rayons vecteurs des pieds des normales menées de* P *à la courbe est constante.*

IV. *Le lieu des points* P *tels que le produit des rayons vecteurs des pieds des normales issues de ce point soit constant, est une conique ayant son centre au pôle de la conchoïde.*

C. *Intersection de la conchoïde avec une droite* D'. Prenons les coordonnées polaires et soient :

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} + b, \quad (6) \qquad \text{et} \qquad \rho = \frac{1}{p\sin\theta + q\cos\theta}, \quad (7)$$

les équations respectives de Γ et de D'. Nous obtiendrons l'équation aux rayons vecteurs des points d'intersection en éliminant θ entre (6) et (7).

Résolvons ces équations par rapport à $\cos\theta$, $\sin\theta$, puis posons $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, nous aurons successivement

$$\frac{[(1-aq)\rho - b]^2}{p^2\rho^2(\rho-b)^2} + \frac{a^2}{(\rho-b)^2} - 1 = 0,$$

$$-p^2\rho^4 + 2bp^2\rho^3 + (1 - 2aq + a^2q^2 + a^2p^2 - b^2p^2)\rho^2 - 2b(1-aq)\rho + b^2 = 0,$$

$$\Sigma\rho_1 = -\frac{2bp^2}{-p^2} = 2b,$$

$$\Sigma\rho_1\rho_2 = \frac{1 - 2aq + (a^2 - b^2)p^2 + a^2q^2}{-p^2},$$

$$\Sigma\rho_1^2 = 2\left[a^2 + b^2 + \left(\frac{1-aq}{p}\right)^2\right].$$

Cette somme sera constante si $\frac{1-aq}{p} = K$ ou $1 - aq - Kp = 0$, relation qui exprime que la droite passe par un point fixe de l'asymptote.

Enfin, nous avons

$$\Sigma\frac{1}{\rho_1} = \frac{2(1-aq)}{b}.$$

Cette expression sera constante avec q et $q = constante$ exprime que D′ tourne autour d'un point de l'axe de Γ.

Nous tirons de là les théorèmes suivants :

V. *La somme des rayons vecteurs des points d'intersection d'une droite quelconque avec la conchoïde est constante et égale au double du paramètre.*

VI. *Lorsqu'une droite variable* D′ *tourne autour d'un point fixe de l'asymptote de* Γ, *la somme des carrés des rayons vecteurs des points d'intersection de* D′ *et* Γ *est constante.*

VII. *Lorsqu'une droite variable* D′ *tourne autour d'un point fixe de l'axe de* Γ, *la somme des inverses des rayons vecteurs des points communs à* D′ *et à* Γ *reste constante.*

Cherchons l'équation aux coefficients angulaires des droites joignant l'origine aux points de rencontre de D′ et de Γ.

Revenons aux coordonnées cartésiennes et soit :

$$ux + vy - 1 = 0 \qquad (8)$$

l'équation de D′. Le faisceau des droites considérées aura pour équation :

$$[x - a(ux + vy)]^2 (x^2 + y^2) - b^2 x^2 (ux + vy)^2 = 0,$$

et l'équation aux coefficients angulaires sera :

$$[1 - a(u + vm)]^2 (1 + m^2) - b^2 (u + vm)^2 = 0.$$

D'où nous tirons aisément

$$\Sigma m_1 = 2\frac{1 - au}{av}, \quad \Sigma m_1 m_2 = \left(\frac{1 - au}{av}\right)^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Ces expressions ainsi que Σm_1^2 seront constantes si $1 - au = \lambda av$ ou $ua + v\lambda a - 1 = 0$, ce qui exprime que D′ passe par un point fixe de l'asymptote.

D'où la propriété suivante :

VIII. *Lorsque la droite variable* D′ *tourne autour d'un point fixe de l'asymptote de* Γ, 1° *la somme des tangentes trigonométriques des angles polaires des points d'intersection de* D *et de* Γ *est constante* ; 2° *la somme des carrés des tangentes des mêmes angles est constante.*

Il y a lieu de rapprocher cette propriété de la propriété VI.

D. *Intersection de la conchoïde avec un cercle* C. Soit

$$\rho^2 - 2\rho(\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta) + \gamma = 0 \qquad (9)$$

l'équation du cercle C. Nous obtiendrons l'équation aux rayons vecteurs des points d'intersection en éliminant θ entre (6) et (9). En déduisant de

celles-ci $\cos\theta$ et $\sin\theta$, on trouve

$$\frac{[\rho^3 - b\rho^2 + (\gamma - 2a\alpha)\rho - b\gamma]^2}{4\beta^2\rho^2(\rho - q)^2} + \frac{a^2}{(\rho - b)^2} - 1 = 0,$$

ou
$$\rho^6 - 2b\rho^5 + \cdots + b^2\gamma^2 = 0. \qquad (10)$$

La somme des racines de cette équation est $2b$. Donc

IX. *La somme des rayons vecteurs des points d'intersection de la conchoïde avec un cercle quelconque est constante et égale au double du paramètre.*

Le produit des rayons vecteurs est égal à $b^2\gamma^2$; il sera constant quand γ sera constant. Donc

X. *Lorsque la puissance de l'origine par rapport à un cercle quelconque est constante, le produit des six rayons vecteurs des points d'intersection de ce cercle et de la conchoïde est constant.*

Cas particulier. Examinons ce qui se passe lorsque le cercle passe au pôle de Γ. L'équation (10) devient en faisant $\gamma = 0$ et supprimant le facteur ρ^2 :

$$\rho^4 - 2b\rho^3 + (b^2 - 4a\alpha - 4\beta^2)\rho^2 + 4b(\beta^2 + a\alpha)\rho + 4[a^2\alpha^2 + (a^2 - b^2)\beta^2] = 0. \qquad (11)$$

D'où
$$\Sigma\frac{1}{\rho_1} = \frac{-b(\beta^2 + a\alpha)}{a^2\alpha^2 + (a^2 - b^2)\beta^2}.$$

Dans le cas où $\alpha = 0$, $\Sigma\frac{1}{\rho_1} = \frac{b}{b^2 - a^2}$. Donc

XI. *Lorsqu'un cercle variable est tangent au pôle à l'axe de la conchoïde, la somme des inverses des rayons vecteurs des points communs aux deux courbes est constante.*

Nous tirons en outre de l'équation (11) :

$$\Sigma\rho_1 = 2b, \quad \Sigma\rho_1\rho_2 = b^2 - 4a\alpha - 4\beta^2,$$
$$\Sigma\rho_1^2 = 2[b^2 + 4(\beta^2 + a\alpha)].$$

Cherchons maintenant l'équation aux coefficients angulaires des droites joignant le pôle aux points communs à Γ et au cercle ; il faut éliminer ρ entre (6) et $\rho = 2(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)$, ce qui donne en posant $\operatorname{tg}\theta = t$,

$$2(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta) = \frac{a + b\cos\theta}{\cos\theta},$$

$$a^2t^4 - 4a\beta t^3 + (2a^2 - 4a\alpha + 4\beta^2 - b^2)t^2 + 4\beta(2\alpha - a)t + a^2 - 4a\alpha + 4\alpha^2 - b^2 = 0.$$

D'où nous déduisons les relations :

$$\Sigma t_1 = \frac{-4a\beta}{a^2} = \frac{4\beta}{a},$$

$$\Sigma t_1 t_2 = \frac{2a^2 - 4a\alpha + 4\beta^2 - b^2}{a^2},$$

$$\Sigma t_1^2 = \frac{2(4\beta^2 + 4a\alpha + b^2 - 2a^2)}{a^2},$$

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = \frac{(a - 2\alpha)^2 - b^2}{a^2}.$$

En rapprochant ces divers résultats, on en déduit les théorèmes suivants :

XII. *Si on considère les points communs, autres que le pôle, à une conchoïde et à un cercle variable passant au pôle :*

1° *Lorsque le centre du cercle décrit la parabole* $y^2 + ax = \text{constante}$, *où* a *est le rayon asymptotique de la conchoïde :*

A) *La somme des carrés des rayons vecteurs des points communs est constante.*

B) *La somme des carrés des tangentes des angles polaires est constante.*

2° *Lorsque le centre du cercle décrit une parallèle à l'axe de la conchoïde la somme des tangentes des angles polaires des points communs est constante.*

3° *Lorsque le centre du cercle décrit une parallèle à l'asymptote, le produit des mêmes tangentes est constant.*

Remarque. La propriété XI s'étend aisément au cas d'un cercle quelconque, au moyen de l'équation (10); elle peut s'énoncer alors ainsi :

XIII. *Quand le centre d'un cercle variable quelconque se déplace sur la perpendiculaire à l'axe d'une conchoïde menée par son pôle, la somme des inverses des rayons vecteurs des points communs aux deux courbes est constante et égale au double de l'inverse du paramètre.*

E. *Diamètres rectilignes de la conchoïde.* Soit $y = mx + p$ une droite variable de direction fixe. Les abscisses des points d'intersection de cette droite avec Γ sont fournies par l'équation :

$$(1 + m^2)x^4 + 2[mp - a(1 + m^2)]x^3 + \cdots = 0.$$

Le centre des moyennes distances aura donc pour abscisse :

$$x = \frac{-mp + a(1 + m^2)}{2(1 + m^2)} \qquad (13)$$

Remplaçons p par $y - mx$; nous aurons, pour le diamètre rectiligne de la direction m,

$$(m^2 + 2)x + my - a(1 + m^2) = 0,$$

ou

$$(x - a)m^2 + my + 2x - a = 0.$$

L'enveloppe quand m varie est :

$$y^2 - 4(x - a)(2x - a) = 0.$$

XIV. *Les diamètres rectilignes de la conchoïde sont tangents à une hyperbole indépendante du paramètre.*

Pour terminer cette note nous énonçons encore la propriété suivante facile à établir :

XV. *Dans une conchoïde dont le paramètre est égal au rayon asymptotique, le lieu du centre de gravité des trois points d'intersection à distance finie, et autres que le pôle, d'un cercle tangent à la conchoïde au point de rebroussement avec la courbe est une parallèle à l'asymptote.*

MÉMORIAL MATHÉMATIQUE

Novembre.

1. 1864. Naissance de *L. Schlesinger*, à Tyrnau (Hongrie).

2. 1826. Naissance de *H. J. S. Smith*, à Dublin. **1897.** Mort de *E. Schering*, à Gœttingue.

3. 1643. Mort de *Guldin*, à Graz. **1793.** Naissance de *Lobatchefsky*, dans le gouvernement de Nijnii-Novgorod.

4. 1744. Naissance de *Jean III Bernoulli*, à Bâle.

5. 1666. *Leibniz* subit les épreuves du doctorat à l'Université d'Altdorf. **1848.** Naissance de *J. W. L. Glaisher*, à Lewisham, Kent (Angleterre).

6. 1808. Naissance de *Richelot*, à Königsberg (Prusse).

7. 1872. Mort de *Clebsch*, à Gœttingue.

8. 1848. Naissance de *M. Pasch*, à Breslau.

9. 1896. Mort de *H. Gylden*, à Stockholm.

10. 1829. Naissance de *E. B. Christoffel*, à Montjoie (Province rhénane).

11. 1811. Naissance de *J. F. W. Gronau*, à Königsberg.

12. 1835. Naissance de *Ch. Méray*, à Châlon-s.-S.

13. 1827. Naissance de *L. Lindelöf*, à Karvia, Ikalis, Finlande.
14. 1716. Mort de *Leibniz*, à Hanovre.
15. 1630. Mort de *Kepler*, à Ratisbonne. **1793.** Naissance de *Chasles*, à Épernon.
16. 1717. Naissance de *d'Alembert*, à Paris. **1835.** Naissance de *Beltrami*, à Cremone.
17. 1790. Naissance de *Möbius*, à Schulpforta.
18. 1816. Naissance de *R. Hoppe*, à Naumbourg a. S.
19. 1808. Naissance de *B. Tortolini*, à Rome.
20. 1856. Mort de *W. Bolyai*, à Maros-Vásárhely (Hongrie).
21. 1866. Mort de *G. Rocb*, à Venise.
22. 1803. Naissance de *G. Bellavitis*, à Bassano, près de Padoue.
23. 1616. Naissance de *Wallis*, à Ashford, Kent (Angleterre).
24. 1789. *Lagrange* termine la *Mécanique analytique*.
25. 1841. Naissance de *E. Schröder*, à Pforzheim.
26. 1678. Naissance de *Mairan*, à Béziers.
27. 1754. Mort de *Moivre*, à Londres.
28. 1902. Mort de *Gruey*, à Besançon.
29. 1750. Mort de *Nicolas I Bernoulli*, à Bâle.
30. 1755. Mort de *Weidler*, à Wittenberg.

BIBLIOGRAPHIE.

Vorlesungen über projektive Geometrie von F. Enriques, ord. Professor an der Universität Bologna. Deutsche Ausgabe von Dr. H. Fleischer. Mit einem Einführungswort von Felix Klein und 187 Figuren im Text. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1903 (In-8° de XIV-374 pp.). Prix : 8 marcs.

Sommaire. Préface de F. Klein. Préface de l'auteur. Introduction. 1. Théorèmes fondamentaux. 2 Principe de dualité. 3. Groupes harmoniques. 4. L'axiome de continuité et ses applications. 5. Théorème fondamental sur la projectivité. 6. Projectivité entre des figures de première espèce. 7. Involution de figures de première espèce. 8. Projectivité entre figures de seconde espèce. 9. Les coniques. 10. Projectivité entre coniques. 11. Problèmes déterminés relatifs aux coniques. 12. Propriétés des foyers des coniques. 13. Propriétés métriques des cônes du second degré. 14. Projectivité entre deux figures de troisième espèce. *Appendice.* 1. Groupes de projectivités. 2. Géométrie abstraite. 3. Transformations où les sphères correspondent aux sphères. 4. Coordonnées projectives. 5. Eléments imaginaires. 6. Notice historico-critique sur l'origine des idées fondamentales de la géométrie projective. — Corrections. — Index.

« L'Italie est depuis vingt ans le vrai centre des progrès de la géométrie pro-

jective. En outre, les géomètres italiens ont su faire descendre le résultat de leurs recherches dans le domaine pédagogique en écrivant d'excellents traités pour l'enseignement moyen et l'enseignement supérieur; les manuels allemands analogues, au contraire, ont trop perdu le contact avec la partie progressive de la science. Le livre de M. Enriques contient un exposé complet, clair et tout à fait rigoureux de la géométrie projective, en rapport avec l'état actuel de la science. Il faut signaler en particulier la manière dont sont traitées les propriétés métriques en les déduisant des propriétés projectives par l'intermédiaire de l'absolu » (D'après l'introduction de F. Klein,.

Nous signalons en particulier aux lecteurs de *Mathesis* déjà familiers avec la géométrie projective, sous une forme moins purement projective que le livre de M Enriques, les trente pages de l'appendice : elles sont toutes imprégnées des idées logico-mathématiques les plus modernes.

Die technische Mechanik. Elementares Lehrbuch fur mittlere maschinentechnische Fachschulen und Hilfsbuch für Studierende höherer technischer Lehranstalten von P. Stephan, Regierungsbaumeister, Lehrer an der Kgl. höheren Maschinenschule in Posen. Erster Teil. **Mechanik starrer Körper**, mit 255 Figuren im Text. Leipzig und Berlin. Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1904 (Cartonné, in 8° de VIII-334 pp.). Prix : 7 marcs.

Sommaire. I. *Principes et statique du point matériel.* 1. Introduction. 2 Principes. 3. Statique du point matériel. II. *Statique des solides invariables.* 4. Statique des solides invariables entièrement libres; 5, ou non entièrement libres. 6. Systèmes funiculaires Courroies et poulies. III. *Statique des systèmes de corps.* 7. indéformables; 8, ou non. IV. *Dynamique du point matériel.* 9. Cinématique. 10. Principes de la dynamique. 11. Mouvement d'un point matériel. V. *Dynamique des solides invariables.* 12. Principes généraux et mouvement de translation. 13. Mouvement de rotation. 14. Le choc.

Essai d'exposition élémentaire (sans analyse infinitésimale) de la mécanique des solides, avec des exemples empruntés à la mécanique appliquée. La seconde partie contiendra la mécanique des fluides et la théorie de la stabilité des constructions.

Essai sur l'origine et les fondements de la Géométrie par M. le Colonel J. Sornein. Cherbourg, Le Maout 1904 (Extrait des *Mémoires de la Société nationale des Sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg*, t. XXXIV, 1904, pp. 257-360).

Il faudrait beaucoup de temps et d'espace pour comparer la brochure de M. le Colonel Sornein aux écrits analogues de Lobatchefsky, De Tilly, Veronese, Pieri etc., là où il s'occupe comme eux des notions fondamentales de la géométrie, distance, sphère, circonférence, droite, plan, etc. Nous devons nous borner à faire connaître sa manière de voir relativement aux postulats qui distinguent la géométrie euclidienne des deux géométries non euclidiennes.

Dès le début, par son axiome III (p. 268), *la distance peut croître au delà de toute*

longueur désignée, il exclut la géométrie riemannienne de ses recherches. Plus loin (p. 320), il exclut de même la géométrie lobatchefskienne en essayant de démontrer qu'une perpendiculaire AP et une oblique BO à une droite AB se rencontrent: car, dit-il, si l'oblique BO pouvait être asymptote de la perpendiculaire AP, elle ne pourrait pas, en tournant autour de l'un de ses propres points B, engendrer la partie du plan où elle ne rencontre pas la perpendiculaire; le plan ne serait donc pas déterminé par ce point B, centre de rotation, et par la perpendiculaire AP. Il importe de remarquer que l'auteur définit le plan, le lieu des points équidistants de deux points donnés et qu'il n'a nullement prouvé que la surface ainsi définie doit être engendrée toute entière par le mouvement d'une droite passant par un point fixe B et s'appuyant sur une autre droite AP. En réalité, sans le postulatum d'Euclide que l'on veut démontrer, on ne peut pas établir ce mode de génération complète du plan, tout comme on ne pourrait l'établir si AP était remplacé par une demi-hyperbole de sommet A, de centre B et tournant sa convexité vers B.

Plus loin (pp. 329-332), il essaie d'établir autrement le postulalum : Il compare une bande PQQ'P de surface T', comprise entre deux perpendiculaires PAP', QBQ' à une droite AB de longueur k, deux lignes PQ, P'Q' équidistantes de AB, de part et d'autre à une distance $l = AP = AP' = BQ = BQ'$, et le secteur QBO de surface S', de rayon $l = BQ$, compris entre l'une des perpendiculaires BQ à AB en B et l'asymptote BO de l'autre perpendiculaire AP, menée par ce point B, dans l'hypothèse lobatchefskienne de l'existence de cette asymptote. Il prouve aisément que si l'angle QBO du secteur est la $n^{ième}$ partie de quatre droits, on a $(T' : nS') > \frac{2}{n}$, quel que soit l. Il en conclut, pour l infini, une relation, absurde selon lui, parce qu'il croit que T' est une fraction indéfiniment décroissante de nS'. On pourrait prouver qu'il en est ainsi, si l'on avait établi *auparavant* le postulatum d'Euclide ; mais, puisqu'on veut le démontrer, on ne peut l'admettre comme point de départ. Or, quand on ne l'admet pas, on trouve

$$\lim (T' : nS') \equiv \frac{k}{\pi L} \geq \frac{2}{n}$$

L étant la constante lobatchefskienne; cette relation n'a rien de contradictoire. La démonstration ne vaut donc rien, elle présuppose ce que l'on veut prouver.

L'erreur fondamentale de l'auteur est la même, au fond, que celle de Saccheri, de Bertrand de Genève et de beaucoup d'autres : il regarde comme égales à la limite certaines grandeurs géométriques qui croissent indéfiniment, sans prouver que la limite de leur rapport est l'unité. (P. M.)

Traité de Perspective linéaire par O. Lambot, Professeur à l'Athénée royal d'Arlon. Bruxelles, Castaigne, 1904. (In-8° de VI-132 pages et atlas in-8° de 31 planches ou 132 figures.) Prix : 4 fr.

L'auteur établit les principes de la perspective par la méthode d'observation au moyen d'un tableau transparent; il en déduit, par des raisonnements géométriques toujours simples, des règles pratiques pour la mise en perspective

directe des corps sans tracé préalable des projections. Ouvrage avant tout pratique et abondant en exemples, s'adressant aux nombreux professeurs de dessin dans les académies, les écoles moyennes et les écoles normales, et aux candidats au diplôme de professeur de dessin devant le jury de Louvain.

(B. L.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1478.

(Voir *Mathesis*, (3); IV, p. 152.)

Trouver l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles qu'un plan quelconque mené par l'axe OZ ***les coupe suivant une parabole dont l'axe de symétrie est dirigé suivant*** OZ. ***On suppose successivement : 1° le sommet de la parabole mobile et le paramètre constant; 2° le sommet fixe et le paramètre variable; 3° le sommet mobile et le paramètre variable.***

(J. Neuberg.)

Solutions par MM. Janne *et* Rose. La parabole génératrice est représentée par les équations

$$x^2 + y^2 + 2az + b = 0, \quad y = cx,$$

d'un paraboloïde de révolution autour de OZ et d'un plan mené par OZ.

Dans le premier cas, $2a$ est constant, b et c sont variables. On établira une relation $b = 2F(c)$ entre ces variables, et l'équation des surfaces considérées sera

$$x^2 + y^2 + 2az + 2F\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

En dérivant celle-ci successivement par rapport à x et à y, on trouve

$$x + ap - F'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2} = 0,$$

$$y + aq + F'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} = 0.$$

Eliminons maintenant la fonction arbitraire F' et nous aurons l'équation cherchée

$$x^2 + y^2 + a(px + qy) = 0.$$

Dans le deuxième cas, b est constant tandis que $2a$ et c sont variables. Pour que la surface soit déterminée, il faut se donner une relation $a = F(c)$;

alors l'équation de la surface sera

$$x^2+y^2+b+2z\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)=0.$$

En dérivant, on obtient

$$x+p\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)-z\mathrm{F}'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}=0,$$
$$y+q\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)+z\mathrm{F}'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=0.$$

L'élimination de F′ donne

$$x^2+y^2+(px+qy)\,\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)=0;$$

remplaçons maintenant F par $-\dfrac{x^2+y^2+b}{2z}$, et nous aurons l'équation demandée

$$(x^2+y^2)(px+qy-2z)+b(px+qy)=0.$$

Dans le troisième cas, il faut se donner deux relations $a=\mathrm{F}(c)$, $b=2f(c)$; alors l'équation de la surface sera

$$x^2+y^2+2z\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)+2f\left(\frac{y}{x}\right)=0.$$

En dérivant, on trouve

$$x+p\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)-\left[z\mathrm{F}'\left(\frac{y}{x}\right)+f'\left(\frac{y}{x}\right)\right]\frac{y}{x^2}=0,$$
$$y+q\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)+\left[z\mathrm{F}'\left(\frac{y}{x}\right)+f'\left(\frac{y}{x}\right)\right]\frac{1}{x}=0.$$

L'élimination de la quantité entre crochets donne

$$x^2+y^2+(px+qy)\,\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)=0. \qquad (1)$$

En dérivant ce résultat on obtient

$$2x+(p+rx+sy)\,\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)-(px+qy)\,\mathrm{F}'\cdot\frac{y}{x^2}=0,$$
$$2y+(q+sx+ty)\,\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)+(px+qy)\,\mathrm{F}'\cdot\frac{1}{x}=0.$$

Eliminons entre les deux dernières égalités la fonction F′, ce qui conduit à

$$2(x^2+y^2)+(px+qy+rx^2+2sxy+ty^2)\,F\left(\frac{y}{x}\right)=0,$$

et remplaçons F par sa valeur tirée de l'équation (1); il vient la relation cherchée, savoir :

$$rx^2+2sxy+ty^2=px+qy.$$

---

*Question 1474.

(Voir *Mathesis* (3), IV, p. 152).

Dans tout triangle, la somme des carrés des distances du centre du cercle des neuf points aux quatre centres des cercles tritangents au triangle, augmentée de la somme des carrés de ses côtés, est égale à 21 fois le carré du rayon du cercle circonscrit. (E.-N. Barisien).

Solution par MM. Lez, Plakhovo, Emmerich, Nicolesco et Abramescu.

Si R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, le rayon du cercle des neuf points sera $\rho=\frac{R}{2}$; or, ce cercle, de centre O′, est tangent aux cercles inscrit et ex-inscrits, dont les centres sont en O, O_a, O_b, O_c. Les carrés des distances des centres sont donc :

$$\overline{O'O_a}^2=\left(\frac{R}{2}+r_a\right)^2,\quad \overline{O'O_b}^2=\left(\frac{R}{2}+r_b\right)^2,$$

$$\overline{O'O}=\left(\frac{R}{2}+r_c\right)^2,\quad \overline{O'O}^2=\left(\frac{R}{2}-r\right)^2,$$

et leur somme

$$\Sigma=R^2+R(r_a+r_b+r_c-r)+(r^2+r_a^2+r_b^2+r_c^2). \qquad (1)$$

Mais on sait que $r_a+r_b+r_c-r=4R$; par suite, l'égalité (1) devient

$$\Sigma=R^2+4R^2+16R^2\quad 2[r_a(r_b-r)+r_b(r_c-r)+r_c(r_a-r)].$$

Si on remplace les rayons r, r_a, r_b, r_c par leurs valeurs connues,

on a :

$$\Sigma = 2lR^2 - 2[(p-c)b + (p-b)a + (p-a)c]$$
$$= 2lR^2 - [(a+b+c)b + (a-b+c)a + (-a+b+c)c]$$
$$= 2lR^2 - (a^2+b^2+c^2).$$

M. Plakhovo nous fait remarquer, depuis l'envoi de sa solution, que la question 1474 se trouve dans le livre de M. Cl. Thiry : *Théorème de Stewart et Barycentre*.

---

*Question 1475.

(Voir *Mathesis*, (3) IV, p. 152).

ABCD *étant un tétraèdre équifacial, soient* A_1 *un point quelconque de la face* BCD, A_2 *son complémentaire*, A_3 *son anticomplémentaire*, B_1, B_2, B_3 *les points correspondants de la face* ACD, *etc.*, V, V_1, V_2, V_3 *les volumes des tétraèdres* ABCD, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$. *Démontrer la relation*

$$V = V_3 + 4V_1 - 32V_2. \qquad \text{(J. Déprez).}$$

Solution par M. Abramescu. Les coordonnées barycentriques absolues du point D_1 étant désignées par a_1, b_1, c_1, $0\,(a_1+b_1+c_1=1)$, celles des points A_1, B_1, C_1 seront (*Mathesis*, (3) IV, p. 73)

$$0, c_1, b_1, a_1 ; \quad c_1, 0, a_1, b_1 ; \quad b_1, a_1, 0, c_1,$$

et l'on aura

$$\frac{V_1}{V} = \begin{vmatrix} 0 & c_1 & b_1 & a_1 \\ c_1 & 0 & a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 & 0 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \end{vmatrix} = -\alpha_1\beta_1\gamma_1,$$

où l'on a posé

$$\alpha_1 = -a_1 + b_1 + c_1 = 1 - 2a_1, \quad \beta_1 = 1 - 2b_1, \quad \gamma_1 = 1 - 2c_1.$$

Ainsi,

$$-\frac{V_1}{V} = (1-2a_1)(1-2b_1)(1-2c_1)$$
$$= -1 + 4\Sigma a_1b_1 - 8a_1b_1c_1. \qquad (1)$$

Les coordonnées absolues de D_1 par rapport au triangle ABC étant a_1, b_1, c_1, celles de son complémentaire D_2 et de son anticomplémen-

taire D_s seront respectivement

$$a_2 = \frac{b_1 + c_1}{2} = \frac{1 - a_1}{2}, \quad b_2 = \frac{1 - b_1}{2}, \quad c_2 = \frac{1 - c_1}{2},$$

$$a_3 = b_1 + c_1 - a_1 = 1 - 2a_1, \quad b_3 = c_2 + a_2 - b_2 = 1 - 2b_1, \quad \cdots$$

On en conclut

$$-\frac{V_2}{V} = (1 - 2a_2)(1 - 2b_2)(1 - 2c_2) = a_1 b_1 c_1, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} -\frac{V_3}{V} &= (1 - 2a_3)(1 - 2b_3)(1 - 2c_3) \\ &= (4a_1 - 1)(4b_1 - 1)(4c_1 - 1) \\ &= 64 a_1 b_1 c_1 - 16 b \Sigma a_{11} + 3. \end{aligned} \tag{3}$$

Si entre les relations (1), (2), (3) on élimine les quantités $\Sigma a_1 b_1$, $a_1 b_1 c_1$, on obtient la formule proposée.

×Question 1479.

(Voir *Mathesis*, (3), IV, p. 176).

On considère un octaèdre CABA'B'C' *dont les diagonales* AA', BB', CC' *passent par un même point* O *et sont rectangulaires deux à deux. Démontrer que les orthocentres des huit faces* CAB, CBA', ... C'A'B' *sont situés sur une même sphère* S. (Steiner).

Si l'on pose $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OA' = a'$, $OB' = b'$, $OC' = c$, *la puissance* p *de* O *par rapport à cette sphère et le rayon* R *sont donnés par*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{aa'} + \frac{1}{bb'} + \frac{1}{cc'},$$

$$\frac{4R^2}{p^2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c'}\right)^2.$$

Lorsque l'octaèdre est inscrit à une sphère de centre ω, *la sphère* S *passe également par les centres de gravité des faces et son centre divise la distance* $O\omega$ *dans le rapport* (1 : 2). (J. Neuberg.)

Solution par M. Abramescu. Prenons pour les axes coordonnés Ox, Oy, Oz les diagonales A'A, B'B, C'C, et observons que les ortho-

centres des faces de l'octaèdre sont les projections de O sur ces faces. L'équation du plan ABC et celles de la perpendiculaire abaissée de O étant

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \quad ax=by=cz,$$

on trouve facilement pour les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC;

$$\frac{m}{a}, \quad \frac{m}{b}, \quad \frac{m}{c}, \quad \text{où} \quad m=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}.$$

Cela posé, si l'on exprime que la sphère

$$x^2+y^2+z^2-2Ax-2By-2Cz+D=0 \qquad (1)$$

passe par les orthocentres des triangles ABC, A'BC, AB'C, ABC', on obtient les égalités

$$1-\frac{2A}{a}-\frac{2B}{b}-\frac{2C}{c}+D\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=0, \qquad (2)$$

$$1-\frac{2A}{a'}-\frac{2B}{b}-\frac{2C}{c}+D\left(\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=0,$$

$$1-\frac{2A}{a}-\frac{2B}{b'}-\frac{2C}{c}+D\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c^2}\right)=0,$$

$$1-\frac{2A}{a}-\frac{2B}{b}-\frac{2C}{c'}+D\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c'^2}\right)=0.$$

En retranchant la première de ces relations de chacune des suivantes on trouve

$$2A-D\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)=0, \quad 2B-D\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)=0, \quad 2C-D\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c'}\right)=0.$$

Tirons de là les valeurs de 2A, 2B, 2C pour les substituer dans l'équation (2); nous aurons

$$D=\frac{1}{\frac{1}{aa'}+\frac{1}{bb'}+\frac{1}{cc'}}, \quad A=\frac{D}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right), \quad \cdots \qquad (3)$$

La symétrie de ces formules montre que la même sphère passe par les orthocentres des autres faces de l'octaèdre.

La puissance p de l'origine des coordonnées étant égale à D, on voit que

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{aa'}+\frac{1}{bb'}+\frac{1}{cc'}.$$

Le rayon de la sphère est donné par :

$$R^2=A^2+B^2+C^2-D=\frac{D^2}{4}\Sigma\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)^2-D$$
$$=\frac{D^2}{4}\left[\Sigma\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)^2-\frac{4}{D}\right]=\frac{p^2}{4}\left[\Sigma\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)^2-4\Sigma\frac{1}{aa'}\right]$$
$$=\frac{p^2}{4}\Sigma\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)^2.$$

Si l'octaèdre est inscrit à une sphère de centre $\omega(\alpha, \beta, \gamma)$, on a

$$a+a'=2\alpha,\quad b+b'=2\beta,\quad c+c'=2\gamma,$$
$$aa'=bb'=cc'=n,$$
$$D=\frac{n}{3},\quad A=\frac{\alpha}{3},\quad B=\frac{\beta}{3},\quad C=\frac{\gamma}{3}.$$

Des valeurs de A, B, C on conclut que le centre de la sphère (1) divise la distance $O\omega$ dans le rapport 1 : 2.

L'équation (1), lorsqu'on y substitue les valeurs (3), prend la forme

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{aa'}+\frac{1}{bb'}+\frac{1}{cc'}\right)-x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)-y\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)$$
$$-z\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c'}\right)+1=0.$$

Remplaçons a', b', c' par $\frac{n}{a}, \frac{n}{b}, \frac{n}{c}$; il vient

$$\frac{3}{n}(x^2+y^2+z^2)-x\left(\frac{1}{a}+\frac{a}{n}\right)-y\left(\frac{1}{b}+\frac{b}{n}\right)-z\left(\frac{1}{c}+\frac{c}{n}\right)+1=0.$$

On voit facilement que les coordonnées $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$ du centre de gravité du triangle ABC vérifient cette équation.

Pour une démonstration géométrique du théorème de Steiner, on peut voir *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, par E. CATALAN, 7e édition.

(J. N.)

Question 1484.

(Voir *Mathesis*, (3) IV, p. 216.)

On joint un point M *d'une conique* Σ *aux extrémités* P *et* Q *d'une corde quelconque parallèle à la tangente au point* M. *Les perpendiculaires abaissées du pôle* R *de la corde* MP *sur les droites* MP, MQ *interceptent sur la normale au point* M *un segment égal au diamètre du cercle osculateur au point* M. (Cl. Servais.)

Solution par M. E. N. Barisien. Prenons pour axes de coordonnées la tangente Mx et la normale My en M. Les perpendiculaires abaissées de R sur MP et MQ rencontrent My en S et en T. L'équation de la conique Σ est

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2y = 0.$$

Soit $y = k$ l'équation de la droite PQ. Les coordonnées de P et Q étant (x_1, k), (x_2, k), x_1 et x_2 sont racines de l'équation

$$Ax^2 + 2Bkx + Ck^2 + 2k = 0. \qquad (1)$$

La tangente en P a pour équation

$$Axx_1 + B(xk + yx_1) + Cky + y + k = 0.$$

Si on fait $y = 0$, on trouve

$$Axx_1 + Bxk + k = 0,$$

d'où

$$x_2 = -\frac{k}{Ax_1 + Bk}.$$

La perpendiculaire abaissée de R sur MP a pour équation

$$y = \left(x + \frac{k}{Ax_1 + Bk}\right)x - \frac{X_1}{k}.$$

En y faisant $x = 0$, on a

$$Y_1 = MS = -\frac{x_1}{Ax_1 + Bk}.$$

On a de même

$$Y_2 = MT = -\frac{x_2}{Ax_1 + Bk}.$$

Donc

$$ST = Y_1 - Y_2 = \frac{x_2 - x_1}{Ax_1 + Bk}. \qquad (2)$$

Or, l'équation (1) s'écrit

$$(Ax + B\lambda)^2 = (B^2 - AC)\lambda^2 - 2A\lambda.$$

Donc

$$Ax_1 + B\lambda = -\sqrt{(B^2 - AC)\lambda^2 - 2A\lambda},$$

$$Ax_2 + B\lambda = +\sqrt{(B^2 - AC)\lambda^2 - 2A\lambda},$$

$$A(x_2 - x_1) = 2\sqrt{(B^2 - AC)\lambda^2 - 2A\lambda}.$$

La relation (2) devient donc

$$ST = -\frac{2}{A}.$$

Or, on sait que $-\frac{1}{A}$ représente le rayon de courbure à l'origine. La question est donc démontrée.

Pour trouver le rayon de courbure au point M, on considère un cercle touchant la courbe en M et passant par un point N (x, y) de la courbe infiniment voisin de M. Si ce cercle coupe la normale My en U et que N se projette en V sur My, on a $\overline{MN}^2 = MU.MV$, d'où

$$MU = \frac{x^2 + y^2}{y} = y + \frac{x^2}{y}, \quad \lim MU = \lim \frac{x^2}{y}.$$

Or, l'équation de Σ donne

$$A\frac{x^2}{y} + 2Bx + Cy + 2 = 0,$$

d'où en passant à la limite pour $x = 0$, $y = 0$: $\lim \frac{x^2}{y} = -\frac{2}{A}$. (J. N.)

Solution par E. Weber. Le diamètre passant par M coupe la corde PQ en son milieu K. Soit NS le segment déterminé sur la normale en M par les perpendiculaires abaissées de R sur MQ et MP. De R abaissons une perpendiculaire sur MK. Soit I le point où elle coupe NS. D'après une construction connue, SI est la longueur du rayon de courbure. D'autre part, les triangles semblables PQM et SRN, PRM et SRI donnent les relations

$$\frac{NS}{PQ} = \frac{RS}{PM} \quad \text{et} \quad \frac{IS}{PK} = \frac{RS}{PM}.$$

On déduit de ces deux proportions :

$$\frac{NS}{PQ} = \frac{IS}{PK}.$$

En tenant compte de la relation PQ = 2PK, on voit que NS = 2IS = diamètre du cercle osculateur en M.

Autre solution analytique par M. H. Lez.

Solution géométrique. Si O est le centre de la conique, les perpendiculaires menées de R sur les droites MR, MO, MP, MQ forment un faisceau harmonique coupé par la normale en M suivant la ponctuelle harmonique (∞ O'P'Q'); par suite, O' est le milieu de P'Q', mais P'O' est égal au rayon de courbure ρ au point M (Th. de Ribaucour); donc P'Q' = 2ρ. (C. S.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

1175. Un hexagone régulier ABCDEF, de grandeur variable, a un sommet A fixe et son centre O décrit une droite fixe *u*. Démontrer que les autres sommets décrivent des droites passant par un même point.

(*Bacc. lettres-math.*, Besançon, 1903.)

Appelons $AB_1C_1D_1E_1F_1$ l'hexagone lorsque son centre est la projection O_1 de A sur *u*. Le point D décrit évidemment la parallèle *d* menée par D_1 à *u*. Les figures $AB_1C_1D_1E_1F_1$, ABCDEF étant semblables, les triangles AB_1B, AC_1C, AD_1D, AE_1E, AF_1F sont semblables entre eux; donc l'angle $AB_1B = AD_1D = 90°$, d'où il suit que le lieu de B est la droite D_1B_1, etc.

1176. Combien y a-t-il de nombres formés de quatre chiffres différents et qui soient divisibles par 4?

Si le nombre est terminé par 04, 08, 20, 40, 60, 80, le chiffre des mille peut avoir 8 valeurs (il faut exclure 0), celui des centaines également 8 valeurs, ce qui fait 8×8 nombres pour chacune de ces parties terminales. Si le nombre se termine par 12, 16, 24, 28, 32, 36, 48, ..., le chiffre des mille peut avoir 7 valeurs (il faut exclure 0), et celui des centaines également 7 valeurs etc.

1177. Résoudre l'équation

$$\sqrt{x} + \sqrt[4]{1 - x^2} = m.$$

En posant $\sqrt{x} = y$, $\sqrt[4]{1 - x^2} = z$, on est ramené au système connu

$$y + z = m, \quad y^4 + z^4 = 1.$$

1178. Démontrer la formule

$$n^2 + (n-2)^2 + (n-4)^2 + \cdots + 2^2 \text{ (ou } 1^2) = \tfrac{1}{2}[(n+1)n + n(n-1) + \cdots + 2.1] = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Remplacer chaque terme x^3 du premier membre par

$$\frac{x^3+x}{2}+\frac{x^3-x}{2}=\frac{x(x+1)}{2}+\frac{x(x-1)}{2}.$$

(M. STUYVAERT.)

1179. Calculer

$$\sum_{x=1}^{x=n}\frac{x(x-1)^2}{2}.$$

Réponse : $\frac{1}{24}(n-1)\,n(n+1)\,(3n-2)$.

(M. STUYVAERT.)

1180. Décomposer en facteurs

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}-1\right]\left[\frac{n(n+1)}{2}-2\right]-\frac{(n-1)\,n(n+1)\,(3n-2)}{12}.$$

Réponse : $\frac{1}{3}(n-2)\,(n-1)\,(2n+3)$.

(M. STUYVAERT.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

1493. D étant un point quelconque d'une conique Σ circonscrite au triangle ABC, on mène les droites AD, BD, CD qui coupent respectivement BC, CA, AD aux points A_1, B_1, C_1. Démontrer que les côtés du triangle $A_1B_1C_1$ et l'axe d'homologie des triangles ABC, $A_1B_1C_1$ passent par des points fixes, et que les droites joignant A, B, C respectivement aux milieux A_2, B_2, C_2 des droites B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 concourent en un point P, qui parcourt une droite.

Énoncer la proposition corrélative de la première partie et examiner dans la nouvelle figure le lieu du point analogue à P. (STEINER.)

1494. On considère les hyperboles semblables qui passent par deux points fixes A, B et dont une asymptote passe par un point fixe C. Trouver : 1° L'enveloppe de la seconde asymptote ; 2° le lieu du centre. (J. NEUBERG.)

1495. Trouver le lieu du centre d'un cercle touchant les trois côtés d'un triangle conjugué à une conique donnée, l'un des sommets de ce triangle étant fixe. (ABRAMESCU.)

×**1496.** Si a, b, c, d sont des quantités comprises entre le zéro et l'unité,

$$(a+b+c+d)^2-4bcd(a+b+c+d)-8a^2bcd\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

est positif.

*GAUSS, SUR L'EXISTENCE DU PLAN(*).

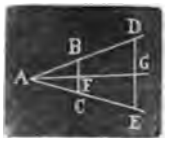
I.

1. « *Plani possibilitatem demonstravi.* [1797], Jul. 28. Gotting. (*Werke*, VIII, p. 162).

2. Il est singulier qu'outre le défaut bien connu de la géométrie d'Euclide [relatif au postulatum], défaut que l'on a vainement essayé jusqu'à présent de faire disparaître — on n'y parviendra jamais — il y en ait un autre, que l'on peut supprimer quoique ce ne soit pas facile, mais qui n'a jamais été signalé que je sache. Il s'agit de la définition du plan, considéré comme une surface telle que toute droite qui en joint deux points, y est située toute entière. Cette définition contient plus qu'il n'est nécessaire pour déterminer la surface et suppose tacitement un théorème qui doit être démontré ». (Lettre à Bessel, Göttingen, le 27 janvier 1829. *Werke*, VIII, p. 200).

3. « Pour exposer avec ordre la géométrie depuis le commencement, on doit établir la possibilité du plan; la définition ordinaire contient trop et implique au fond un théorème caché. On doit s'étonner que tous les auteurs depuis Euclide jusqu'aux plus récents aient été si négligents; mais cette difficulté... n'est pas vraiment malaisée à faire disparaître. » (Lettre à Wolfgang von Bolyai, Göttingen, 9 mars 1832; *Werke*, pp. 224).

4. Il y a beaucoup de choses, même en géométrie élémentaire, qui doivent être prouvées rigoureusement, par exemple, la possibilité du plan dont la définition suppose à proprement parler un théorème : Par exemple, si ABD, AFG, ACE, BFC sont des droites, il faut prouver que la droite DE ne passe pas au dessus ou en dessous de G. — La démonstration à la vérité n'est pas très difficile, mais elle n'est pas facile non plus et en tout cas, elle est indispensable sous une forme ou sous une autre. » (*Werke*, p. 194; date inconnue, entre 1820 et 1830, probablement; v. p. 199).



[5. Remarque. Gauss se trompe en disant que personne depuis

(*) Les passages de Gauss que nous traduisons ici ont été retrouvés dans ses papiers ou extraits de ses lettres. Ils ne représentent peut être pas sa pensée sur la question sous sa forme définitive.

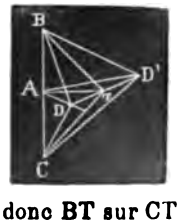
Euclide ne s'est occupé de la question de la possibilité du plan. Duhamel en a esquissé une démonstration dans les *Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques* (Paris, Bachelier, 1823; voir pp. 40 42). En voici un résumé que nous avons publié en 1871, dans la *Revue de l'Instruction publique en Belgique*, p. 325. Duhamel définit le plan *la surface engendrée par une droite perpendiculaire à une autre et tournant autour de cette autre.* Tout point M de cette perpendiculaire dans une quelconque de ses positions, est à égale distance de deux points B, C de la droite fixe, tels que BA = AC, A étant le point où la droite fixe BC est rencontrée par la droite mobile AM. Par suite, deux points M, N du plan sont tels que le triangle BMN est égal au triangle CMN (*). Si X est un point de MN, on aura ensuite le triangle XNB = XNC d'où XB = XC et XA perpendiculaire à BC, c'est-à-dire X dans le plan MNA. — Cette démonstration a été reproduite par Duhamel dans son livre *Des Méthodes dans les Sciences de raisonnement*, 2e partie, pp. 12-16 (Paris, Gauthier-Villars, 1866). On va voir, comment elle doit être complétée, d'après Gauss].

II.

« 1. Nous appelons *plan* la surface dans laquelle se trouve toute droite AD passant par A et faisant un angle droit avec la droite donnée AB; un plan est donc décrit par AD tournant autour de l'axe AB.

2. Si l'on prolonge BA vers C, CA fait aussi un angle droit avec AD dans toutes ses positions.

3. Soient maintenant AD, AD' deux droites situées dans le plan et AD = AD'; soit ensuite AC = AB. Le système des quatre points ACD'D peut se placer sur le système des quatre points ABDD'; donc le triangle CD'D sur le triangle BDD'; mais BD'D peut aussi se placer sur BDD'; donc CD'D peut se placer sur BD'D. Si T est un point quelconque de DD', BDT peut se placer sur CDT, donc BT sur CT. Le triangle BCT est donc isoscèle; par suite, BCT peut se placer sur CBT, donc aussi BAT sur CAT; les angles BAT, CAT sont droits et T est dans le plan.



(*) Ceci est le point faible de la démonstration, sauf si l'on admet que deux triangles sont égaux quand ils ont les trois côtés égaux comme une vérité première en géométrie.

4. *Théorème.* Une droite passant par deux points T et U du plan P y est toute entière.

Démonstration. 1° Si le point A est sur la droite TU, le théorème est évident d'après la définition du plan.

2° Si A n'est pas sur TU, AT et AU font entre eux un certain angle et si AT = AU, le théorème est vrai d'après 3.

3° Si au contraire AT, AU sont inégaux, soient AT > AU. Prolongeons TA jusqu'en K de manière que AK = AT. La circonférence que T décrit en tournant autour de A passera par K et la surface du cercle engendrée par la rotation de AT qui est une partie du plan, sera divisée par KT en deux régions dont l'une contiendra U.

Si maintenant une droite TK se meut ayant une extrémité en T, l'autre sur la circonférence KVW, elle décrit le plan, toujours de plus en plus et l'aura entièrement décrit quand W sera en T. Dans une certaine position de la droite mobile elle aura passé par U, par exemple, quand elle sera en TV. La droite TU sera une partie de la droite TV et, par suite, sera toute entière dans le plan comme TV.

On peut prouver d'ailleurs avec une entière rigueur que la droite mobile parcourra la surface entière du demi-cercle. Supposons, en effet, qu'une certaine partie du demi cercle ne soit pas atteinte et que U en soit un point. Avec un rayon inférieur à TU décrivons [autour de T] une sphère qui partage le demi-cercle en deux régions, M à l'extérieur, M' à l'intérieur de la sphère; évidemment V sera dans M. Soit W le point de la demi circonférence KVT où elle est coupée par la sphère. La droite TW est dans M', U à l'intérieur de la figure KTWK Or, celle-ci est décrite quand la ligne mobile passe de la position TK à la position TW. La supposition que U n'est pas atteint est donc absurde » (Gauss, *Werke*, VIII, pp. 184-185).

[5. Remarque. Tout point R situé dans le segment TWS est à l'intérieur de la sphère de centre T et de rayon TW. En effet, TR < TI + IR, AW < IW + AI; en ajoutant ces deux inégalités, il vient TR + AW < TW + AR < TW + AS = TW + AW; donc TR < TW, c. q. f. d. Il en résulte que U ne peut être dans le segment TWS, ce que Gauss a supposé implicitement.] (P. M.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

25. *Décrire une circonférence qui touche trois circonférences données. Solution d'Adrien Romain, achevée par Newton.* — Adrien Romain démontra dans son *Problema Apolloniacum* (Wirceburgi 1596), que la différence des distances du centre de la circonférence cherchée aux centres des circonférences données étant constante et égale à la somme ou à la différence des rayons des circonférences données, le problème était ramené, d'après la Prop. 51 du Liv. III des *Coniques* d'Apollonius, à une intersection de deux hyperboles ayant un foyer commun, connaissant leurs seconds foyers et leurs axes transverses. Il n'indiqua pas la solution de ce dernier problème, et c'est à Newton qu'il était réservé, un siècle plus tard, de la trouver. Voici la jolie construction qu'il donne au lemme 16 du Livre I des *Principes*.

Soient A le foyer commun, B et C les seconds foyers, M un point d'intersection. On sait construire les directrices OP de l'hyperbole AB et OQ de l'hyperbole AC, correspondant l'une et l'autre au foyer A. Soit O le point de concours de ces deux directrices. OA est *donné* en grandeur et en position.

Soient MP et MQ les distances de M aux deux directrices. On a

$$\frac{MA}{MP} = e, \quad \frac{MA}{MQ} = e';$$

d'où

$$\frac{MQ}{MP} = \frac{e'}{e}$$

et on a un premier lieu du point M, qui est, on le sait, une droite MO passant par O. Il suit de là que l'angle aigu MOQ du triangle rectangle MOQ est aussi *donné*, et il en est de même du rapport des côtés de ce triangle

$$\frac{MO}{MQ} = k;$$

d'où

$$\frac{MO}{MA} = \frac{k}{e'},$$

et comme OA est *donné* en grandeur et en position, on sait que M doit se trouver sur une circonférence. On a donc un second lieu de M. (H. B.)

×26. *Sur la question 1455* (*Mathesis*, (3), IV, p. 32). Nous avons retrouvé l'énoncé 1455, en partie, dans le livre 8e des Collections de Pappus, sous la forme suivante : « *Si trois mobiles, placés aux sommets d'un triangle, partent en même temps et parcourent respectivement les trois côtés, en allant dans le même sens et avec des vitesses proportionnelles aux longueurs de ces côtés, leur centre de gravité restera invariable.* »

(Émile Weber.)

M. Laisant a fait connaître la généralisation suivante (*Congrès du Hâvre*, 1877, NCM, 1880, p. 474) :

Sur les côtés d'un polygone plan $A_1A_2A_3 \dots A_n$ *on construit les triangles* $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$, ..., $A_nA_1B_n$ *directement semblables entre eux. Les deux systèmes de points* $A_1A_2 \dots A_n$, $A_1B_2 \dots B_n$ *ont le même centre de gravité.* (J. N.)

×27. *Nombres dont les carrés se terminent par les mêmes chiffres.* 1° *Deux chiffres.* Le carré de $50k \pm n$, k et n étant entiers et $n \leqq 25$, et le carré de n se terminent par les deux mêmes chiffres. Le nombre n est de la forme $10a + b$, a étant égal à 0, 1 ou 2, et b inférieur à 10. Si $a = 0$, $n^2 = b^2$ ne se termine pas par deux chiffres identiques. Si $a = 1$, $n^2 = (10 + b)^2 = 100 + 20b + b^2$. On vérifie directemeut que les deux derniers chiffres de ce carré ne sont identiques que si $b = 2$. Si $a = 2$, $n^2 = (20 + b)^2 = 400 + 40b + b^2$, nombre dont les derniers chiffres sont toujours différents. Donc enfin, seuls les nombres de la forme $50k \pm 12$ ont leurs carrés qui se terminent par deux chiffres identiques, savoir 44. Ce résultat a été trouvé par MM. Morel et Hoffmann (NAM, 1871).

2° *Trois chiffres.* Le carré de $(500k \pm N)$, k et N étant entiers et $N < 250$, et le carré de N se terminent par les trois mêmes chiffres. Pour ce que ces trois chiffres soient identiques, il faut que les deux derniers le soient; donc $N = 50k \pm 12$. Les nombres de cette forme inférieurs à 250 sont 12, 38, 62, 88, 112, 138, 162, 188, 212, 238. Le calcul montre que 38, dont le carré est 1444, est le seul dont le carré se termine par trois chiffres égaux. Les nombres qui jouissent de cette propriété sont donc de la forme $500k \pm 38$.

3° *Quatre chiffres.* Si ν est inférieur à 2500 et k entier, ν^2 et $(5000 \pm \nu)^2$ sont terminés par les quatre mêmes chiffres. Pour que ces quatre chiffres soient identiques, il faut d'abord que les trois derniers le soient. Donc

$\nu = 500k \pm 38$. Les valeurs possibles de ν sont 38, 462, 538, 962, 1038, 1462, 1538, 1962, 2038, 2462; le carré d'aucun de ces nombres ne se termine par quatre chiffres identiques. *Il n'y a donc aucun carré qui ait plus de trois de ses derniers chiffres égaux*

4° De ce qui précède il résulte que les 4°, 8°, 16°, ..., $(2^n)^{ième}$ puissances d'aucun nombre ne se terminent par deux (ou plus de) chiffres identiques. Car les 2°, 4°, ..., $(2^{n-1})^{ième}$ puissances sont des carrés; ils devraient être de la forme $50k \pm 12$, et, par suite, se terminer par 2 ou 8. Or, aucun carré ne se termine par 2 ou 8 (D'après A. Gutzmer).

BIBLIOGRAPHIE.

Arithmétique théorique et méthodologique, à l'usage de l'enseignement normal primaire, par E. Colart, professeur à l'Athénée royal, directeur de l'École industrielle de Huy, et G Fraichefond, régent à l'École moyenne, ancien professeur à la section normale de Huy. Bruxelles, Alfred Castaigne 1904. (In-8° de VII-288 pages). Prix : fr. 8,50.

Les connaissances scientifiques et pédagogiques dont a fait preuve M. Colart dans son excellent traité d'algèbre élémentaire, couronné par l'Académie royale de Belgique, jointes à la grande expérience acquise par M. Fraichefond dans son enseignement à l'École normale, sont un sûr garant que l'arithmétique théorique et méthodologique qui nous est présentée, répond à toutes les exigences de la science, tout en satisfaisant aux nécessités de l'enseignement.

« Nous pensons, disent les auteurs, qu'il ne suffit pas à l'instituteur de savoir un peu plus que ce qu'il est appelé à enseigner; il ne suffit pas qu'il connaisse les diverses théories de l'arithmétique, il faut qu'il possède et domine la *science* même, dans son essence et dans son esprit. Certes, il ne l'enseignera pas telle à ses élèves, mais elle lui est nécessaire pour qu'il sache discerner, parmi les moyens intuitifs propres à leur apprendre le maniement des chiffres, ceux qui ne fausseront pas leur esprit par des notions inexactes. »

« Si l'enseignement primaire s'adressait uniquement à des enfants destinés à entrer à l'atelier au sortir de l'école, la tâche de l'instituteur serait terminée au moment où l'enfant sait compter, et il pourrait être moins scrupuleux sur les moyens employés pour atteindre ce but. Mais, à l'égard des élèves qui veulent poursuivre leurs études, il y a lieu pour l'instituteur de surveiller son enseignement; car rien n'est plus difficile à redresser que des idées fausses acquises à l'École primaire sous l'autorité d'un premier maître. »

Tel est l'esprit dans lequel l'arithmétique de MM. Colart et Fraichefond a été conçue et dont ils ont cherché à lui donner l'empreinte; l'analyse du livre prouve qu'ils ont brillamment réussi. Le langage est correct et précis, les termes employés bien définis, la succession des idées logique et naturelle, leur association présentée avec clarté et élégance, l'enchaînement des vérités aisé à reconnaître par suite d'une habile division ou graduation des difficultés; la rigueur des théories est unie à une réelle simplicité; enfin quelques aperçus

méthodologiques font heureusement réfléchir le lecteur auquel le livre est destiné.

Division de l'ouvrage. Théorie. Titre I. *Composition et décomposition des nombres.* Première section : nombres entiers (numération, calcul, propriétés des nombres). Deuxième section : fractions (idem). Titre II. *Des nombres considérés en suites* (égalités, proportions, progressions, logarithmes).

Applications. Des grandeurs et de leur mesure ; problèmes; applications usuelles de l'arithmétique.

L'idée fondamentale du mot *nombre*, sans pouvoir être définie, résulte de l'idée de compter; c'est elle qui sert de base à la numération et aux opérations fondamentales. Par les développements relatifs au groupement décimal des unités qui composent un nombre, la numération cesse d'être une simple nomenclature. Les opérations dérivent successivement l'une de l'autre et de la loi de formation des nombres entiers par adjonctions successives de l'unité. Ainsi définies, elles sont seulement applicables aux nombres entiers, mais des extensions successives conduisent à attribuer les mêmes dénominations à des opérations complexes sur les fractions. La nécessité de ces extensions est bien mise en évidence et la généralisation des théorèmes est faite très minutieusement. Les auteurs distinguent les procédés d'une opération, en procédés généraux et procédés particuliers. Les procédés généraux s'appliquent à tous les nombres quels que soient les chiffres dont ils sont formés, et sont relatifs au calcul écrit; les procédés particuliers s'appliquent à certains nombres d'une composition spéciale et facilitent le calcul mental. Ainsi le calcul mental est nettement distingué du calcul écrit, de façon à bien montrer de quels modes de calcul chaque cas est susceptible. L'exposé du calcul est ce qu'on peut faire de plus complet et de plus méthodique. Les caractères particuliers de divisibilité par 2, 5, ... 9, 11, ... ont été déduits des caractères généraux, mais en note on lit : « Dans l'enseignement primaire, on établira ceux-ci individuellement, en spécialisant les raisonnements généraux qui précèdent ». Nous croyons qu'il serait utile de procéder de même dans l'enseignement normal. La théorie des nombres premiers est indépendante de celle du plus grand commun diviseur. Cette méthode a des avantages et a déjà rallié les préférences d'auteurs très estimés. Les règles relatives au calcul des nombres décimaux sont établies comme cas particuliers des règles relatives aux fractions ordinaires. La question des formes d'une fraction et du passage de l'une à l'autre y est traitée de la manière la plus simple et la plus complète. Dans les applications, les auteurs se sont proposé de donner des idées générales sur la résolution des problèmes, de résumer en quelques méthodes simples, facilement assimilables, les procédés qu'on ne découvre parfois que par tâtonnements et un peu au hasard, chaque méthode particulière est éclairée par des exemples gradués et bien choisis.

Nous recommandons avec confiance le livre que nous venons d'analyser sommairement aux maitres de l'enseignement primaire, comme l'un des meilleurs à consulter dans leurs études et dans leur enseignement. Il est appelé à rendre de réels services et réalise un progrès marquant, pour l'idée qu'il poursuit. L'exécution typographique faite par la maison d'éditions d'Alfred Castaigne est extrêmement soignée. (C. S.).

Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften (Band III 2 Heft 2, enthaltend : Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungkurven, von O. STAUDE in Rostock). Leipzig, Teubner, 1904 (In-8, pp. 161-256). Prix : 2 m. 80.

SOMMAIRE : 1. Classification des quadriques. 2. Les quadriques et le plan. 3. Les quadriques et la droite. 4. Génératrices. 5. Polaires. 6. Générations projectives et constructions par neuf points ou une conique et quatre points. 7. Propriétés focales. 8. Faisceaux de quadriques. 9. Transformations et représentations sur le plan. 10. Cubiques gauches. 11. Courbes gauches du 4e ordre et de 1re espèce. 12-14. Systèmes $S + \lambda_1 S_1 + \cdots + \lambda_n S_n = 0$, $S = 0$, $S_1 = 0$, $\cdots S_n = 0$ représentant des quadriques.

×EXERCICES DE GÉOMÉTRIE SOLIDE(*).

1. Etant donnés un plan P et trois points A, B, C (non en ligne droite) extérieurs à ce plan, trouver un point S tel que les droites SA, SB, SC coupent le plan P aux sommets d'un triangle A'B'C' homothétique à un triangle donné ou égal à un triangle donné.

2. Etant donnés deux triangles ABC, A'B'C' et un plan P, trouver dans ce dernier plan un triangle $\alpha\beta\gamma$, tel que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ concourent en un même point et qu'il en soit de même de $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$.

3. Mener une droite rencontrant trois droites données et qui soit divisée par elles dans un rapport donné.

4. Mener entre deux droites données, une sécante de longueur donnée et qui soit parallèle à un plan donné.

5. Mener par un point donné une droite faisant des angles égaux avec trois droites données.

6. Lieu des points d'un plan donné tel que le rapport (ou la somme des carrés) de leurs distances à deux points donnés soit constant.

7. Quelle est la plus courte et quelle est la plus longue droite que l'on puisse mener entre un point et un cercle donnés d'une façon quelconque dans l'espace ?

8. Les plans également inclinés sur deux plans sécants donnés, sont parallèles à l'une ou à l'autre de deux droites fixes.

9. Lieu du troisième sommet d'un triangle dont les côtés restent parallèles à des droites fixes pendant que les deux premiers sommets

---

(*) Ces exercices sont empruntés aux *Leçons de Géométrie élémentaire* par J. HADAMARD. Paris, Colin, 1901.

sont assujetis à rester respectivement sur deux plans fixes ou sur une droite et sur un plan fixes.

10. Lieux des extrémités des segments de droite issus d'un point donné et tels que la somme de leurs projections sur deux droites données ait une valeur donnée.

11. On donne deux droites D, D′ non situées dans un même plan, et on prend, sur ces deux droites respectivement deux points A, A′; soient M, M′ deux points pris également l'un sur D, l'autre sur D′, de manière que AM = A′M′.

1° Lorsque, A et A′ restant fixes, la longueur commune des segments AM, A′M′ varie, le plan perpendiculaire au milieu de MM′ passe par l'une ou l'autre (suivant le sens dans lequel sont portés les segments AM, A′M′) de deux droites fixes G_1, G_2, dont tous les points sont également distants des deux droites données;

2° Lorsque A, A′ variant eux-mêmes de toutes les manières possibles sur D, D′, chacune des droites G_1, G_2 reste parallèle à un plan fixe;

3° Chaque droite G_1 rencontre les droites G_2;

4° Par tout point équidistant de D et D′, il passe une droite G_1 et une droite G_2.

12. Une demi-droite D, menée par un point de l'arête *xy* d'un dièdre et intérieure à ce dièdre, est telle que, si le plan perpendiculaire à D en un point P de cette droite coupe les faces du dièdre suivant OA et OB respectivement, le point P est sur la bissectrice de l'angle AOB (le point P étant supposé non situé sur l'arête *xy*). Montrer que la droite D appartient au plan bissecteur du dièdre.

13. Etant donnés un dièdre et une droite D qui rencontre l'arête, mener par D un plan qui soit coupé par les deux faces du dièdre suivant un angle ayant D pour bissectrice. — Cas d'impossibilité ou d'indétermination.

14. Lieu des droites menées par un point donné et faisant des angles égaux avec deux plans donnés.

15. Lieu des points d'un plan tels que les droites qui les joignent à deux points donnés soient également inclinées sur ce plan.

16. Le lieu des droites issues d'un point fixe et admettant, avec une droite donnée D, une perpendiculaire commune de longueur donnée, se compose de deux plans.

MÉMORIAL MATHÉMATIQUE

Décembre.

1. 1805. Naissance de *Brassinne*, à Albi.
2. 1594. Mort de *G. Mercator*, à Duisbourg.
3. 1647. Mort de *Cavalieri*, à Bologne.
4. 1574. Mort de *Rheticus*, à Kaschau en Hongrie.
5. 1859. Mort de *Poinsot*, à Paris. **1863.** Naissance de *Painlevé*, à Paris.
6. 1856. Naissance de *W. v. Dyck*, à Munich.
7. 1819. Naissance de *Bouquet*, à Morteau (Doubs). **1823.** Naissance de *Kronecker*, à Liegnitz.
8. 1894. Mort de *Tchebychef*, à St-Pétersbourg.
9. 1839. Naissance de *G. Roch*, à Dresde.
10. 1804. Naissance de *Jacobi*, à Potsdam.
11. 1840. Naissance de *J. Thomae*, à Lauchau a. U.
12. 1880. Mort de *Chasles*, à Paris.
13. 1603. Mort de *Viète*, à Paris. **1897.** Mort de *Brioschi*, à Milan.
14. 1546. Naissance de *Ticho Brahé*, à Knudstrup.
15. 1802. Naissance de *J. Bolyai*, à Klausenbourg.
16. 1858. Mort d'*A. Arneth*, à Heidelberg.
17. 1842. Naissance de *S. Lie*, à Nordfiordeide (Norvège).
18. 1799. Mort de *Montucla*, à Versailles. **1855.** Mort de *Sturm*, à Paris.
19. 1854. Naissance de *M. Brillouin*, à Melle (Deux Sèvres).
20. 1843. Naissance de *P. Tannery*, à Nantes.
21. 1803. Naissance de *J. Whitworth*, à Stockport.
22. 1824. Naissance de *Brioschi*, à Milan. **1867.** Mort de *Poncelet*, à Paris.
23. 1890. Mort de *E. Sang*, à Edimbourg.
24. 1740. Naissance de *Lexell*, à Abo.
25. 1822. Naissance d'*Hermite*, à Dieuze (Meurthe).
26. 1812, Naissance de *G. Reuschle*, à Mehrstetten (Wurtemberg).
27. 1571. Naissance de *Kepler*, à Weil die Stadt.
28. 1800. Mort de *J. Cousin*, à Paris.

29. 1856. Naissance de *Th. J. Stieltjes*, à Zwolle. **1894.** Mort de *Kronecker*.

30. 1615. Naissance de *C. Renaldini*, à Ancone.

31. 1894. Mort de *Th. J. Stieltjes*, à Toulouse.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 1477.

(Voir *Mathesis*, (3); IV, p. 175.)

Chercher le lieu des centres des hyperboles équilatères qui touchent une ellipse donnée en l'un de ses points et qui passent par les deux foyers de l'ellipse. (E. N. Barisien.)

Solution par M. H. Lez. I. Une hyperbole équilatère

$$x^2 + 2hxy - y^2 + 2gx + 2fy + d = 0,$$

passera par les deux foyers de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{1}$$

si $c^2 \pm 2gc + d = 0$, d'où $g = 0$, $d = -c^2$.

L'équation de l'hyperbole se transforme en

$$x^2 + 2hxy - y^2 + 2fy - c^2 = 0. \tag{2}$$

Les coordonnées du centre de cette courbe sont données par

$$x + hy = 0, \quad hx - y + f = 0,$$

desquelles on tire

$$h = -\frac{x}{y}, \quad f = \frac{x^2 + y^2}{y},$$

$$1 + h^2 = \frac{x^2 + y^2}{y^2}, \quad f^2 = \frac{(x^2 + y^2)^2}{y^2}. \tag{3}$$

Mais les coniques (1) et (2) seront tangentes si l'équation $\Delta h^3 + \Theta h^2 + \Theta' h + \Delta' = 0$ à deux racines égales, c'est à dire si les invariants du système satisfont à la relation

$$(\Theta\Theta' - 9\Delta\Delta')^2 = 4(\Theta^2 - 3\Delta\Theta')(\Theta'^2 - 3\Delta'\Theta). \tag{4}$$

(*) Nous avons reçu de bonnes solutions des questions 1441, par M. Emmerich, 1465, par M. Delahaye, 1469, par MM. Déprez et Rose, 1474, par M. Weber, 1484, par MM. Abramescu, Claeys, Rose, Sterkens.

Or, pour l'ellipse,

$$\Delta = -\frac{1}{a^2b^2}, \quad \Theta = -\frac{2c^2}{a^2b^2};$$

pour l'hyperbole,

$$\Delta' = c^2(1+h^2) - f^2, \quad \Theta' = \frac{a^2b^2(1+h^2) - f^2b^2 - c^4}{a^2b^2};$$

par suite, la relation (4) devient, après réductions,

$$\begin{aligned} &4b^2[f^2 - a^2(1+h^2)]^2 + [8b^4 + 20a^2b^2 - a^4]f^4 \\ &+ 2a^2(a^2 - b^2)(a^2 - 10b^2)(1+h^2)f^2 \\ &- 4(a^2 - b^2)^5 f^2 - a^4(a^2 - b^2)^2(1+h^2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Remplaçant f^2 et $1+h^2$ par leurs valeurs (3), on trouve que le lieu du centre est représenté par l'équation du huitième degré

$$\begin{aligned} &4b^2(x^2+y^2)(x^2+y^2-a^2)^2 + (8b^4 + 20a^2b^2 - a^4)(x^2+y^2)^2y^2 \\ &+ 2a^2(a^2 - b^2)(a^2 - 10b^2)(x^2+y^2)y^2 - 4(a^2 - b^2)^5y^4 - a^4(a^2 - b^2)^2y^2 = 0. \end{aligned}$$

L'origine fait partie du lieu et la courbe coupe l'axe des x aux points $x = \pm a$ et l'axe des y aux points $y = \pm \frac{a}{2b}$.

II. On arrive au même résultat en considérant l'équation générale des coniques tangentes à l'ellipse au point $(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ sous la forme

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 - (bx\cos\varphi + ay\sin\varphi - ab)(lx + my + n) = 0. \quad (5)$$

Pour que ces coniques passent par les foyers $x = \pm c$, il faut que

$$c^2(b - l\cos\varphi) \pm c(al - n\cos\varphi) + a(n - ab) = 0;$$

de ces relations, on tire

$$al - n\cos\varphi = 0, \quad an - lc^2\cos\varphi - b^2 = 0,$$

d'où

$$n = \frac{ab^2}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}, \quad l = \frac{b^2\cos\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}.$$

Pour qu'elles soient des hyperboles équilatères, il faut encore que

$$b(b - l\cos\varphi) = -a(a - m\sin\varphi),$$

d'où

$$m = \frac{a^2 + b^2 - bl\cos\varphi}{a\sin\varphi} = \frac{b^2 + a^2\sin^2\varphi}{\sin\varphi(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}.$$

Alors, remplaçant l, m, n par leurs valeurs, l'équation (5) se transforme en

$$ab\sin^2\varphi\,(x^2-y^2)-\cos\varphi\,[b^2+(a^2+b^2)\sin^2\varphi]\,xy$$
$$+a\,(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)\,y-ab\,(a^2-b^2)\sin^2\varphi=0.$$

Les coordonnées du centre étant données par les équations dérivées

$$2xab\sin^2\varphi-y\,[b^2+(a^2+b^2)\sin^2\varphi]\cos\varphi=0,$$
$$-x[b^2+(a^2+b^2)\sin^2\varphi]\cos\varphi-2yab\sin^2\varphi+a(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)=0,$$

il reste à éliminer la variable φ.

La seconde solution nous a été également adressée par M. Rose.

Question 1486.

(Voir *Mathesis*, (3) IV, p. 216.)

On donne une ellipse P *et un cercle* D. *Soient* F *un des foyers et* M *un point variable de l'ellipse* P. *On considère le cercle* Σ *de centre* M *et de rayon* MF. *Le lieu des centres de similitude des cercles* D, Σ *se compose de deux coniques. Conditions pour que ces coniques soient des paraboles.*

(E. N. Barisien).

Solution par M. H. Lez. Soient

$$(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2=r^2\quad(x-\lambda')^2+(y-\mu')^2=r'^2$$

les équations du cercle D et d'un autre cercle Σ.

Les centres de similitude extérieur et intérieur de ces deux cercles ont pour coordonnées :

$$x=\frac{\lambda' r-\lambda r'}{r-r'},\quad y=\frac{\mu' r-\mu r'}{r-r'},\tag{1}$$

$$x=\frac{\lambda' r+\lambda r'}{r+r'},\quad y=\frac{\mu' r+\mu r'}{r+r'}.\tag{2}$$

Si le cercle Σ a son centre sur l'elllpse

$$\mathrm{P}\equiv b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0,$$

on peut écrire

$$\lambda'=x',\ \mu'=y'\quad\text{et}\quad r'=\mathrm{FM}=a-ex'.$$

Alors, considérant seulement les centres de similitude extérieurs, puisqu'il suffit de faire remplacer r par $-r$ pour avoir les coordonnées des centres de similitude intérieurs, les formules (1) donneront

$$x = \frac{x'r - \lambda(a - ex')}{r - (a - ex')}, \quad y = \frac{y'r - \mu(a - ex')}{r - (a - ex')},$$

d'où

$$x' = \frac{a\lambda - ax + rx}{r + (\lambda - x)e},$$

$$y' = \frac{ry - ay + a\mu + (y - \mu)ex'}{r} = \frac{(r - a + \lambda e)y - \mu ex + a\mu}{r + (\lambda - x)e}.$$

Ces valeurs devant satisfaire l'équation de l'ellipse P, on a

$$b^2(a\lambda - ax + rx)^2 + a^2[(r - a + \lambda e)y - \mu ex + a\mu]^2 = a^2b^2[r + (\lambda - x)e]^2.$$

Réduisant, on trouve, pour l'équation du lieu du centre de similitude extérieur, la conique

$$\begin{aligned} &a^2(r - a + \lambda e)^2y^2 - 2a^2\mu e(r - a + \lambda e)xy \\ &+ [\mu^2a^2e^2 + b^2(r - a)^2 - a^2b^2e^2]x^2 \\ &+ 2a^2\mu(r - a + \lambda e)y + 2a[ae(b^2r - a\mu^2) + b^2\lambda(r - a + ae^2)]x \\ &+ a^2(a^2\mu^2 + b^2\lambda^2) - a^2b^2(r + \lambda e)^2 = 0. \end{aligned}$$

Cette conique est du genre parabole si

$$4a^4\mu^2e^2(r - a + \lambda e)^2 - 4a^2(r - a + \lambda e)^2[\mu^2a^2e^2 + b^2(r - a)^2 - a^2b^2e^2] = 0$$

pour cela, il faut qu'on ait

$$r - a + \lambda e = 0, \quad \text{ou} \quad (r - a)^2 - a^2e^2 = 0.$$

La première valeur $r = a - \lambda e$, réduit l'équation (3) à

$$(\mu^2a^2 + b^2\lambda^2 - a^2b^2)(ex - a)^2 = 0$$

ce qui représente la droite

$$x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c};$$

la seconde, $r = a(1 \pm e)$, donne seule des paraboles :

$$\begin{aligned} &e^2[(\lambda \pm a)y - \mu x]^2 + 2\mu e(\lambda \pm a)y \\ &+ 2e[b^2a(1 \pm e) - a\mu^2 + b^2\lambda(e \pm 1)]x \\ &+ (a^2\mu^2 + b^2\lambda^2) - b^2(\lambda e + a \pm ae)^2 = 0. \end{aligned}$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

1181. Il n'existe pas de progression géométrique dans laquelle la somme des n premiers termes soit égale à $3n^2 + p$, quel que soit n, sauf si $p = 0$. *(Bull. des sc. math. et phys. él.)*

1182. L'octogone formé par les huit droites qui joignent les milieux des côtés d'un parallélogramme aux extrémités des côtés opposés à une aire égale au sixième de celle du parallélogramme. *(Ib.)*

1183. On a

$$\sqrt{(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)} - \sqrt{(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)}$$
$$= \sqrt{(1+\sin\alpha)(1-\cos\alpha)} + \sqrt{(1-\sin\alpha)(1-\cos\alpha)}.$$

(E. N. Barisien).

1184. Si α et β désignent les angles que la tangente en un point M d'une conique Σ fait avec les asymptotes, α' et β' ceux de la même droite avec les diamètres conjugués de la tangente et de la normale en M, on a :

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha' \cdot \operatorname{tg}\beta'.$$

(Cl. Servais).

1185. Décomposer en facteurs

$$4x^8 + 17x^4y^4 + 4y^8.$$

On trouve

$$(4x^4 + y^4)(x^4 + 4y^4)$$
$$= [(2x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2][(x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2]$$
$$= [(x-y)^2 + y^2][(x+y)^2 + y^2][y-x)^2 + x^2][(y+x)^2 + x^2].$$

1186. Une hyperbole variable passe par deux points fixes M, N, et ses deux asymptotes passent respectivement par deux points fixes P, Q. Trouver le lieu du centre.

Les asymptotes doivent rencontrer la droite M, N en deux points M', N' symétriques par rapport au milieu de la corde fixe MN ; donc elles se correspondent dans deux faisceaux projectifs.

1187. Une hyperbole variable est circonscrite à un triangle donné ABC, et l'une des asymptotes passe par un point donné P ; démontrer que la seconde asymptote enveloppe une conique.

La première asymptote détermine sur AB, AC deux ponctuelles projectives ; la seconde asymptote rencontre AB, AC aux points isotomiques de ceux où ces côtés sont coupés par la première asymptote...

1188. Les bissectrices intérieures des angles d'un triangle ABC rencontrent la circonférence circonscrite en A′, B′, C′. Démontrer les relations

$$A' + \frac{A}{2} = 90°, \quad \frac{A'}{R} = \sqrt{1 + \frac{a}{2R}} \pm \sqrt{1 - \frac{a}{2R}}.$$

1189. Déterminer tous les nombres entiers positifs n tels que le nombre entier $103n^2 + 121n + 70$ soit divisible par le nombre entier $n - 1$.

Le reste de la division algébrique étant $103 + 121 + 70 = 294$, on égalera $n - 1$ à un diviseur quelconque de $294 = 2.3.7^2$.

1190. Si la somme des carrés de deux nombres entiers est divisible par 7, elle est aussi divisible par 49. (*J. de Vuibert.*)

QUESTIONS PROPOSÉES.

1497. On considère les ellipses semblables qui ont un sommet commun A et passent par un même point M. Trouver les lieux des autres sommets A′, B, B′, ainsi que l'enveloppe de l'axe BB′.

(J. Neuberg.)

1498. Trouver le lieu des centres des quadriques dont trois diamètres conjugués sont parallèles à trois directions données et qui touchent quatre plans donnés. (J. Neuberg.)

×**1499.** Trouver les racines de l'équation

$$d^2(x + b + c - a)(x + a + c - b)(x + a + b - c)(x - a - b - c) + (ax + bc)(bx + ac)(cx + ab) = 0.$$

(E. N. Barisien.)

1500. L'équation

$$a\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\right) + b\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{1.2\ldots n}\right) + c = 0$$

ne peut avoir plus de trois racines réelles. (St. Mirea.)

TABLE DES MATIÈRES(*).

ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Pages.

Sur une pyramide hexagonale de cubes, par M. E. Barbette 192
Nombres dont les carrés se terminent par les mêmes chiffres, d'après A. Gutzmer 269

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

×Somme des produits k à k des termes d'une progression arithmétique, par M. Stuyvaert 135
×Trois théorèmes de Maximum, par M. A. Aubry 179
×Question 1449; solutions par MM. Lez, Déprez, etc. 150
×Question 1457; solution par MM. Emmerich et Déprez 199
×Question 1470; solution par MM. Barisien et Abramescu 213
Question 1450; solution par MM. Abramescu, Ots, etc, ... 229

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE; MÉTAGÉOMÉTRIE.

Sur une formule de E. Lemoine, par MM. Droz-Farny, Weber . . . 10, 86
Sur le quadrilatère inscriptible ou circonscriptible, par MM. Fr. Fricke, J. Neuberg, L. Gerard, Quint 13, 40, 67
Sur le triangle dont deux symédianes sont perpendiculaires (J. N.). . . 87
Sur le pentagone plan simple, par M. J. Neuberg 57
Solutions d'un problème de géom. élémentaire, par MM. Fitz-Patrick et J. Déprez 107, 226
Construction d'un cercle tangent à trois cercles, par M. G. Fontené; par Newton. 110, 268
Exercices de géométrie élémentaire, par M. J. Neuberg . . . 131, 158, 198
Aire du trapèze 135
Une démonstration de Gauss (P. M.) 158
Sur une propriété des trièdres, par M. E. B. Escott 161
Gauss, sur l'existence du plan 265
Sur la question 1455, par MM. E. Weber et Neuberg 269
Exercices de géométrie solide, d'après J. Hadamard 272

(*) Pour les rectifications, voir p. 128. — Les articles marqués d'une croix n'exigent pour être compris que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Pages.

Question 1419; solutions par MM. **Emmerich, Verheugen, etc.** 21
Question 1434, solution par M. Emmerich. 49
Question 1412; solutions par MM. **Emmerich, Verheugen** 68
Question 1442, solution par MM. **Rose et Bastin** 77
Question 1477, solutions par MM. **Rose, Emmerich, etc.** 94
Question 1433; solution par M. **Emmerich** 98
Question 1436 solutions par MM. **Emmerich, Rose, etc.** 101
Question 1421, solution par M. **Droz-Farny** 119
Question 1430; solution par M. **Emmerich** 124
Question 1313; note par M. Emmerich. 165
Question 1456; solution par M. Weber 166
Question 1463; solution par M. Weber 206
Question 1465; solution par M. Emmerich 209
Question 1431; solution par M. Emmerich. 220
Question 1474; solution par M. Lez, Plakhovo, etc. 256
Question 1475; solution par M. Abramescu 257
Question 1479; solution par M. Abramescu 258

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Tangente et normale aux coniques (J. N.). 12
Transformation par points antiréciproques 14
Sur le tétragone complet; par M. J. Neuberg 33
Lieux géométriques relatifs à des coniques semblables (J. N.) 37
Enveloppes d'une série de coniques homofocales, par M. Barisien . . . 39
Concours général de 1903 (Belgique). Solutions de la question de géométrie analytique, par MM. P. Bastin et J. Déprez 61, 186
Sur un groupe de trois paraboles (J. N.) 67
Sur les pentagones orthocentriques, par M. Majcen 81
Construction d'une conique 83
Généralisation de la question 1033 111
Deux théorèmes de Grégoire de Saint-Vincent, par M. A. Aubry. . . . 129
Explication d'un paradoxe (J. N.) 161
Exercice sur l'hyperbole $xy = 1$, par M. J. Neuberg 187
Question 1100; solutions par MM. Rose, Emmerich, etc. 17
Question 1287; solutions par MM. Couvert, Verheugen. 41
Question 1440; solution par MM. Mirea, Speckmann, etc. 51
Question 1498; solution par M. Emmerich. 73
Question 1432, solution par MM. Emmerich et Droz-Farny 75
Question 80; solution par M. Stuyvaert 90
Question 1420; solution par M. Haussner 120
Question 1438, solution par MM. Janne, Retali, etc 125
Question 1453, solutions par MM. Barisien et Déprez 167
Question 1469, solutions par MM. Droz-Farny, Lez 197
Question 1488, solution par MM. Rose et Abramescu 333
Question 1484, solutions par MM. Barisien, Weber. 262
Question 1480, solution par M. Lez. 277

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR; COURBES ET SURFACES TRANSCENDANTES; COMPLEXES, etc.

Pages.

Sur les plans conjugués dans les cubiques gauches, par M. Servais. . . 105
Sur un complexe quadratique, par MM. Corin et Neuberg. . . . 177, 241
Notes géométriques sur le trifolium droit, par M. A. Droz-Farny . . . 185
Sur les cubiques gauches, par M. Stuyvaert 218
Notes sur la conchoïde de Nicomède, par M. Couvert 244
Question 882, solution par M. E. Cesáro 14
Question 1393; solutions par MM. P. Bastin, Cl. Servais 42
Question 1414; solution par M. Couvert et Lez 47
Question 1439; solution, par M. Couvert 50
Question 1422; solution par M. Bastin. 72
Question 1435; solutions par MM. Bastin et Servais 75
Question 1417; solution par M. Rose 96
Question 1427; solution par M. Abramescu 97
Question 1409; solution par M. Verheugen. 116
Question 1416; solution par M. Abramescu 141
Question 1441; solution par M. Barisien 145
Question 1446; solution par M. Droz Farny 149
Question 1460; solutions par MM. Emmerich, Lez, etc. 168
Question 1459; solution par M. Emmerich. 200
Question 1462; solution par M. Retali 204
Question 1464; solution par M. Dupont. 207
Question 1469; solution par MM. Emmerich, Abramescu, etc. 211
Question 1454; solution par M. Emmerich. 232
Question 1477; solution par M. Lez. 275

CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTEGRAL; SÉRIES.

Sur le volume engendré par une figure invariable; par M. C. Wasteels. . 5, 86
Sur la loi des grands nombres de Poisson, par P. Mansion (Supplém. I, pp. 1-4)
Sur une intégrale considérée en calcul des probabilités, par M. P. Mansion (Supplément III, pp. 1-16).
Sur la courbure des courbes planes et sphériques, par MM. C. Wasteels et E. Cesáro 154, 225
Sur une sommation d'intégrales considérées en calcul des probabilités, par M. P. Mansion (Supplément IV, pp. 109-120).
Question 1408; solution par M. P. Bastin. 19
Questions 1426, 1440, 1444; solution par M. E. Cesáro 27, 30
Question 1401; solution par MM. Claeys, Verheugen, etc. 93
Question 1419; solution par MM. Barisien, Lez, etc. 143
Question 1461; solution par M. Emmerich. 170
Question 1472; solutions par MM. Verheugen, Rose, etc. 235
Question 1473; solution par MM. Janne et Rose 254

BIBLIOGRAPHIE; BIOGRAPHIE; PHILOSOPHIE.

Pages.
L'amiral de Jonquières, par M. Fouqué 224
Sur la portée objective du calcul des probabilités, par M. P. Mansion (Supplément II, pp. 1-64).
G. Castelnuovo. Lezioni di Geometria analitica e projettiva (Cl. S.) . . 15
A. Bucherer. Elemente der Vector-Analysis. — H. Bruns. Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. — Annuaire du bureau des longitude pour l'an 1904 17
H. G. Zeuthen. Geschichte der Mathematik 65
E. Wölffing. Mathematischer Bücherschatz 65
M. Curtze. Urkunden zur Geschichte der Mathematik. — A. Capelli. Aritmetica et Algebra. — F. Amodeo. Algebra. — J. König. Theorie der algebraischen Grössen. — L. Kronecker. Vorlesungen über Mathematik: Vorlesungen über Determinantentheorie. 66
A. Krazer. Lehrbuch der Thêtafunctionen. — H Weber. Elem. Algebra und Analysis. 88
Stoffaes. Mathématiques supérieures. 89
G. Papelier. Précis d'algèbre et de trigonométrie (J. N.); — Id. Formulaire de mathématiques spéciales. — A. R. Forsyth. Treatise on Differential Equations 113
E. T. Whittacker. A Course of Modern Analysis 114
G. Holzmüller. Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik (J. N.) 115
F. Chomé. Plans cotés (E. Cuvelier) 137
N. L. W. A. Gravelaar. Leerboek der rekenkunde. — Id. Opgaven der toepassing van de theorie der rekenkunde (H. Bosmans S. J.) 139
A. Föppl. Vorlesungen über graphische Statik (J. M.) 140
Burali-Forti. Lezioni di Geometria metrico-projettiva (J. N.) 140
G. Lemaire. Methodes de résolution et de discussion des problèmes de Géométrie (J. N.) 162
W. Fiedler. Darstellende Geometrie (J. N.). — O. Reichel. Höhere Analysis und analytische Geometrie (J. N.) 163
A. Hochheim. Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene (J. N.) 164
O. Fort u. O. Schlömilch. Analytische Geometrie der Ebene (J. N.) . . 164
E. Study. Geometrie der Dynamen (J. N.) 193
H. Valentiner. Œuvres scientifiques de L. Lorenz — Ed. A Fouet. Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques (P. M.) . 195
G. Boccardini. L'Euclide emendato del P. Gerolamo Saccheri (P. M.) . . 196
J. J. Sylvester. The Collected Mathematical Papers 227
H. Siersma. Oplossing der Vraagstukken over de an. meetkunde. — Ib. Vraagstukken over de Analytische Meetkunde (H. Bosmans, S. J.) . . 227
F. Enriques. Projektive Geometrie. 251
P. Stephan Mechanik starrer Körper 252
J. Sornein. Essai sur l'origine et les fondements de la Géometrie (P. M.) . 252
O. Lambot. Traité de Perspective lineaire (B. L.) 253
E. Colart et G. Fraichefond. Arithmétique théorique et méthodologique. 270
Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. 271
Memorial mathématique 217, 260, 274

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 1123-27, 1128-35, 1136-44, 1145-48, 1149-52, 1153-54, 1155-65, 1166, 1167-74, 1175-1180, 1181-90 :
page 31, 53, 78, 102, 126, 151, 172, 214, 237, 263, 279
École Polytechnique de Paris. Concours d'admission de 1904 174
Question de géométrie analytique. Concours général de 1903 (Belgique).
Solutions par M. P. Bastin et Déprez 61, 136
Concours de l'enseignement moyen en Belgique (1904). 239

SUPPLÉMENTS.

1. Sur la loi des grands nombres de Poisson par M. P. Mansion (4 pages).
2. Sur la portée objective du calcul des probabilités, par M. P. Mansion (64 pp.)
3. Sur une intégrale considérée en calcul des probabilités, par M. P. Mansion (16 pages).
4. Sur une sommation d'intégrales considérées en calcul des probabilités, par M. P. Mansion (12 pages).

QUESTIONS.

Solutions de questions posées dans les deux premières séries.

95 . . .	(1) I, 206. . . 90	1033 . . .	(2) V, 215. . . 111
882 . .	(2) III, 240 . . 14	1287 . . .	(2) IX, 216 . . 41

Questions résolues et non résolues des tomes I, II, III et IV de la troisième série.

R = Résolue; NR = Non résolue.

Tome I

	POSÉE	RÉSOLUE T. IV.		POSÉE	RÉSOLUE T. IV.
1311	88	NR	1335	215	R
1313	88	165	1338	240	NR

Tome II

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
1357	56	R	1378	184	NR
1365	104	NR	1393	264	42
1371	128	NR	1400	280	17
1374	152	NR			

Tome III

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
1401	40	92	1419	128	143
1405	40	86	1420	128	NR
1407	56	94	1422	128	172
1408	56	19	×1424	152	119
1409	56	116	1425	152	120
×1410	56	21	1426	152	27
×1412	80	68	1427	184	97
1414	80	47	1428	184	73
1415 = 1393. .	104	42	1429	184	NR
1415bis. . . .	128	R	1430	184	124
1416	104	141	1431	216	223
1417	104	96	1432	216	75

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
×1433	216	98	1443	264	NR
×1434	216	49	1444	264	29
1435	216	76	1445	264	51
×1436	216	101	1446	264	149
1439	240	50	×1447	280	NR
1440	240	29	1448	280	NR
1441	240	145	×1449	280	150
×1442	240	77	1450	280	229

Tome IV

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
1151	32	NR	1476	152	NR
1452	32	197	1477	175	275
1453	32	R	×1478	176	R
1454	32	232	1479	176	258
×1455	32	166, 269	1480	176	NR
1456	32	167	1481	215	NR
×1457	56	199	1482	215	R
1458	56	125	1483	215	R
1459	56	200	1484	216	261
1460	56	168	1485	216	R
1461	80	170	1486	216	277
1462	80	204	1487	216	R
×1463	80	206	×1488	216	NR
1464	80	207	1489	240	R
×1465	103	209	×1490	240	R
×1466	103	R	1491	240	R
1467	104	NR	1492	240	NR
1468	104	233	1493	264	R
1469	128	211	1494	264	R
1470	128	213	1495	264	R
×1471	128	R	×1496	264	R
1472	128	235	1497	280	NR
1473	152	254	1498	280	NR
×1474	152	256	×1499	280	NR
1475	152	257	1500	280	NR

Questions des deux premières séries résolues mais non publiées.

(I-X) 853, 597. (XI-XX) 892bis, 953, 1046, 1057, 1079, 1087, 1101, 1107, 1177, 1275.

Questions non résolues des deux premières séries.

(I-X) 513, 598. (XI-XX) 778, 825, 878, 905, 1133, 1147, 1220, 1225, 1228, 1238, 1240, 1246, 1247, 1271, 1297.

TABLE DES NOMS.

(*Cette table ne renferme pas tous les noms cités dans les comptes-rendus d'ouvrages*).

Abramescu, 8, 29, 30, 31, 49, 50, 51, 53, 77, 79, 92, 95, 97, 117, 122, 125, 128, 141, 145, 149, 150, 152, 169, 172, 176, 200, 206, 207, 211, 218, 229, 233, 235, 240, 250, 257, 258, 264.
Alba (De), 166.
Alexandroff, 162.
Amodeo, 66.
Andrieu, 76, 92, 94, 95, 116.
Apollonius, 141.
Arbicone, 114.
Aubry, 129, 179.

Audibert, 21, 92, 97, 118, 229.
Baker, 227.
Barbette, 193.
Barisien, 12, 17, 21, 32, 37, 40, 47, 49, 50, 56, 68, 80, 92, 102, 103, 117, 118, 125, 132, 133, 143, 145, 149, 150, 152, 159, 160, 166, 167, 168, 172, 173, 175, 197, 204, 210, 211, 213, 216, 240, 256, 261, 275, 277, 279, 280.
Bastin, 18, 19, 25, 42, 49, 50, 51, 52, 61, 70, 72, 75, 76, 77, 92, 101, 120, 122, 149, 166, 168, 169, 198, 207.
Beltrami, 196.
Bernoulli, 56, 92, 168.
Bertrand (de Genève), 253.
Bessel, 265.
Boccardini, 196.
Bolyai, 196.
Bosmans (S. J.), 140, 228.
Boulanger, 123.
Bouquet de la Grye, 17.
Boutin, 72,149, 172, 229, 238.
Brianchon, 16.
Brocard (G.), 226.
Brocard (H.), 99, 145, 165, 185, 268.
Bruns, 17.
Bucherer, 17.
Burali-Forti, 141.
Burgess, 14.
Cambier, 38, 77, 80, 112, 176, 206.
Cantor, 65.
Capelli, 66.
Castelnuovo, 15.
Catalan, 161, 260.
Cauchy, 180.
Cayley, 223.
Cesaro (E.), 14, 27, 29, 80, 104, 225.
Chasles, 15, 79, 224.
Chassiotis, 80.
Chomé, 137.
Claeys, 28, 92, 124, 125, 143.
Clebsch, 225.
Clevers, 148.
Colart, 270.
Corin, 177, 241.
Couvert, 18, 28, 41, 47, 50, 53, 94, 117, 118, 122, 168, 198, 214.
Cremona, 225.
Cristesco, 158.
Curtze, 66.
Cuvelier, 139.
Dalle, 122.
Dandelin, 129.
Darboux, 5.
Davis, 196.
Delahaye, 23, 70, 150, 166, 238.
Demoulin, 27, 29, 30.
Desprets, 77, 95, 102, 125, 166, 172, 199, 207, 236.
Déprez, 42, 118, 123, 125, 128, 137, 150, 152, 166, 167, 168, 198, 199, 213, 226, 228, 233, 257.
Desargues, 16.
Drechsel, 50, 207.
Droz Farny, 16, 23, 42, 50, 52, 67, 70, 76, 78, 86, 94, 101, 119, 123, 125, 149, 150, 166, 169, 185, 198, 199.
Duhamel, 266.
Dupont (Fr.), 125, 150, 166, 199, 206, 207.
Duran Loriga, 238.
Eneström, 65.
Engel, 196.
Enriques, 251.
Emmerich, 18, 21, 22, 42, 49, 51, 53, 70, 74, 76, 77, 78, 94, 95, 98, 101, 118, 120, 122, 124, 126, 128, 149, 150, 166, 168, 170, 198, 199, 200, 206, 207, 210, 211, 214, 229, 232.
Erelav Seam, 125, 166, 207.
Escott (Edw.), 161.
Euclide, 130, 153, 196.
Faure, 234.
Fiedler, 168.
Fitz-Patrik, 107, 165.
Fontené, 67, 79, 110, 125
Föppl, 140.
Forsyth, 113.
Fort, 164.
Fouet, 195.
Fouqué, 225.
Fraichefond, 270.
François, 207.
Fregier, 58.
Fricke (Fr.), 13.
Frobenius, 114.
Gauss, 153, 196, 265.
Gerard (G.), 42.
Gerard (L), 67, 125.
Girard (Albert), 79.
Gob, 19, 110, 141, 165.
Gravelaer, 139, 140.
Guntsche, 56, 199.
Gutzmer, 270.
Hadamard, 272.
Halphen, 127.
Halsted, 196.
Hatt, 17.
Haussner, 120.
Hensel, 67,
Hochheim, 164.
Hoffmann, 269.
Holzmuller, 115.
Hopital (marquis de l'), 129.
Huygens, 130.
Janne, 50, 101, 102, 125, 214, 254
Jeřabék, 52, 149, 211.
Jonquières (de). 225.

Jurisch, 185.
Klein (F.), 252.
Kohn, 82.
König (J.) 66.
Königs, 86.
Krazer, 88.
Kronecker, 66.
L (B.), 251.
Laisant, 269.
Lambert, 196.
Lambot, 253.
Lebeau (V.), 213.
Lemaire, 162.
Lemoine (Émile), 10, 15, 86, 151, 190
Léonard de Pise, 66
Lez, 42, 47, 50, 53, 94, 117, 122, 125, 143, 143, 149, 150, 166, 169, 197, 206, 207, 256, 276.
Lobatschefsky, 196 252.
Longchamps (G. de), 125, 151, 185.
Lorent, 41.
Lorenz (L.), 195.
Mac Alister, 18.
Maclaurin, 149.
Majeen, 57, 81, 132.
Malfatti, 67.
Mannheim, 12, 123, 125 148.
Mansion, 6., 93, 19., 194, 253, 267; suppl., I, II, III, IV.
Maser, 114.
Massau, 140.
Maxwell, 195.
Mirea, 30, 53, 93, 97, 149, 280.
Möbius, 216
Monge, 33, 234.
Morel, 269
Muller (Félix), 217, 250, 274
Nanson, 216.
Neuberg, 12, 13, 22, 27, 32, 33, 37, 38, 39, 40, 46, 56, 57, 64, 67, 68, 73, 75, 78 80, 88 98, 101, 104, 110 112, 115, 116 119, 125, 128, 141, 149, 158, 162, 163, 164, 165, 166, 176, 177, 187, 195, 204, 207 210, 211 213, 216 222, 243, 244, 248 252, 264, 269, 280.
Newton, 248
Nicomède 244.
Nicolesco, 148 211, 253
Novak, 187
Ocagne [illegible]
Pa[illegible], 1[illegible]
Pascal, [illegible]
Pat[illegible] 94, 218 [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
P[illegible]
Plucker, 16, 122.
Poncelet, 37, 82, 110.
Popovici, 101.
Prange, 94, 150, 166.
Puech, 118.
Quetelet, 129.
Quint, 67.
Reichel, 163.
Retali, 42, 125, 169, 172, 204.
Ripert, 165.
Rius y Cazas, 125, 166, 206.
Rocquigny (de), 149.
Romain (Adrien), 268.
Rose, 18, 26, 29, 30, 42, 49, 50, 51, 77, 94, 96, 122, 125, 169, 172, 200, 203, 206, 209, 223, 235, 254, 277.
Runge, 114.
Saccheri, 196.
Savorda, 66.
Schlömilch, 164.
Schoentjens (L.), 141.
Schoute, 191.
Serret (A.), 114.
Serret (Paul), 33.
Servais (Cl.), 17, 46, 77, 92, 105, 216, 218, 261. 271, 279.
Siersma, 225.
Simson (R.), 189.
Sluze, 213
Soons, 42, 160.
Sornein, 251.
Speckman, 52, 78, 189.
Stäckel, 196.
Staude, 272.
Staudt (von), 15.
Steiner, 5, 16, 110, 132, 189, 226, 239, 240, 258, 264.
Stephan, 252.
Sterckens, 93.
Stoffaes, 89.
Study, 193.
Sturm (Ch.), 227.
Stuyvaert, 32, 90, 103, 104, 125, 127, 128, 135 151, 218, 223, 264.
Sylvester, 227.
T[illegible], 94.
Tilly (De), 252.
Valentiner, 18[illegible]
Van Geer, 237.
Verh[illegible], [illegible] 41, 68, 92, 95, 116, 214.
Veronese, 196, 252
V[illegible], 132
Wasteels (C. E.), [illegible], 134, 225.
Weber (Em.), 23, 26, 73, 87, 166, 207, 21[illegible]
W[illegible]
W[illegible]
W[illegible]
W[illegible], 83
Z[illegible]

Extrait des Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, 1904,
t. XXVIII, 1re partie, pp. 72-77.

SUR LA LOI DES GRANDS NOMBRES DE POISSON

par

Paul MANSION
Professeur à l'Université de Gand

1. *Bertrand, Bienaymé, Meyer* et *Czuber sur la* Loi des grands nombres *de Poisson.* La *loi des grands nombres* exposée par Poisson dans ses *Recherches sur la probabilité des jugements en matière civile et criminelle* (Paris, Bachelier, 1837) (*) a été vivement critiquée par Bertrand et Bienaymé.

« Lorsque la probabilité d'un événement est variable d'une épreuve à l'autre, dit Bertrand (*Calcul des probabilités,* Paris, Gauthier-Villars et fils, 1889, p. 94), le théorème de Bernoulli n'est plus applicable. La généralisation proposée par Poisson sous le nom de *loi des grands nombres* manque non seulement de rigueur, mais de précision. Les conditions supposées dans l'énoncé échappent par le vague à toute appréciation mathématique. » Poisson, dit-il ailleurs (p. XXXII), « a, à peu près seul, je crois, attaché une grande importance » à sa découverte « qui se distingue bien peu des lois connues du hasard ».

Bienaymé a lu à l'Académie des Sciences morales et politiques le 10 février 1855, et publié en 1870 (Paris, Anger) une note pédantesque de 12 pages in-8°, intitulée : *Sur un principe que M. Poisson avait cru découvrir et qu'il avait appelé* Loi des grands nombres. Poisson, suivant Bienaymé, « a simplement démontré le théorème de Jacques Bernoulli dans l'hypothèse où la probabilité constante est la valeur moyenne d'un ensemble de probabilités variables qui peuvent s'offrir toutes à toutes les épreuves : hypothèse si évidente qu'il n'est pas nécessaire de la démontrer » (p. 9).

(*) Voir surtout le *Préambule* de l'ouvrage, pp. 7 à 29, 29, ch. II, nos 52 à 62, pp. 138-161 et le ch. IV tout entier, pp. 246-317. L'ouvrage de Poisson a été traduit en allemand par C. H. Schnuse sous le titre : *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren wichtigsten Anwendungen*, Braunschweig, Meyer, 1841. Le traducteur a ajouté à l'original la traduction d'un mémoire de Poisson sur la probabilité des résultats des observations, puis d'autres suppléments sur l'espérance morale, le calcul des rentes viagères et des assurances sur la vie.

« L'identité d'une probabilité constante et de la probabilité moyenne d'un certain nombre de probabilités qui peuvent régir une épreuve quelconque, avait paru jusqu'à ces derniers temps d'une évidence complète. C'est même ainsi que Jacques Bernoulli a entendu sa probabilité unique. On peut s'en assurer en lisant ce qu'il en a dit dans le préambule de son théorème » (p. 6-7).

Les deux géomètres qui, dans le dernier demi-siècle, ont étudié le plus minutieusement, dans toute son étendue, le calcul des probabilités, A. Meyer et Czuber, ne jugent pas aussi durement les recherches de Poisson.

A. Meyer (*Cours de calcul des probabilités publié par Folie*, Bruxelles, Hayez, 1874; ou 2e série, t. IV des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*, voir pp. 95-115) reproduit sans la critiquer la démonstration de Poisson.

Czuber analyse les recherches de Poisson dans son savant ouvrage : *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen* (Leipzig, Teubner, 1899, dans le 7e *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung;* voir §§ 34-36, pp. 78-87) et en reproduit la partie essentielle dans son traité didactique récent (*Wahrscheinligkeitsrechnung*, Leipzig, Teubner, 1903; voir §§ 82-88, pp. 120-138). Tout en reconnaissant avec Bienaymé et Bertrand que souvent la *loi des grands nombres* se confond avec le théorème de Bernoulli, il fait observer qu'elle ne conduit pas à la même valeur pour les écarts maxima qui peuvent se produire dans le cas d'un grand nombre d'épreuves (voir § 87, pp. 133-136).

2. *Objet de la présente note.* Dans les applications du calcul des probabilités aux sciences d'observation, on ne peut presque jamais appliquer directement le théorème de Bernoulli, même en y regardant la probabilité constante de l'événement simple considéré, comme une probabilité moyenne déduite d'épreuves antérieures. On sait, en effet, que cette probabilité moyenne est elle-même variable dans des limites plus ou moins étendues suivant le genre d'événements considéré et c'est à cause de cette circonstance que les limites des écarts sont parfois très différentes pour un même nombre d'épreuves et pour une même probabilité moyenne absolue de l'événement simple étudié.

Nous avons essayé de tenir compte de la variabilité de la probabilité moyenne et d'établir rigoureusement *la loi des grands nombres,* dans une note publiée dans les Bulletins de l'Académie royale de Belgique (janvier 1893, 3e série, t. XXV, pp. 11-13); malheureusement, dans nos formules finales, entre un nombre k qui ne peut être déterminé avec précision et nous nous appuyons

sur une formule relative au théorème de Bernoulli qui est insuffisamment démontrée.

Dans la présente note, nous évitons la considération de ce nombre k et nous nous appuyons sur une démonstration complète du théorème de Bernoulli que nous avons publiée dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES (1902, t. XXVI, 2e partie, pp. 191-205).

3. LEMME. Posons

$$p + q = 1, \qquad p_1 + q_1 = 1, \qquad p_2 + q_2 = 1,$$

$$0 < p_1 \gtreqless p \leqq p_2 < 1$$

$$T = l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}} = l_1\sqrt{\frac{\mu}{2p_1q_1}} = l_2\sqrt{\frac{\mu}{2p_2q_2}}$$

μ et T étant constants, l, l_1, l_2 des fractions inférieures respectivement à p et q, p_1 et q_1, p_2 et q_2.

L'expression $p - l$ croît ou décroît en même temps que p, comme on le voit, en écrivant

$$p - l = p - \frac{T\sqrt{2pq}}{\sqrt{\mu}} = \sqrt{p}\left(\sqrt{p} - \frac{T\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}}\sqrt{1-p}\right).$$

L'expression $p + l$ croît aussi avec p. Car

$$p + l = 1 - (q - l).$$

Or, si p croît, $q = 1 - p$ et, par suite, $q - l$ décroît; donc $p + l$ croît.

Il résulte de là que l'on a

$$p_1 - l_1 \gtreqless p - l \leqq p_2 - l_2; \qquad p_1 + l_1 \gtreqless p + l \leqq p_2 + l_2$$

et aussi

$$\mu(p_1 - l_1) \gtreqless \mu(p - l) \leqq \mu(p_2 - l_2),$$
$$\mu(p_1 + l_1) \gtreqless \mu(p + l) \leqq \mu(p_2 + l_2).$$

Par suite, *lorsque p varie de p_1 à p_2, l'intervalle*

$$[\mu(p - l),\ \mu(p + l)]$$

est toujours compris dans l'intervalle I *plus grand*

$$[\mu(p_1 - l_1),\ \mu(p_2 + l_2)].$$

4. *Rappel du théorème de Bernoulli.* Nous avons démontré le théorème de Bernoulli sous la forme suivante : La probabilité que le nombre m de répétitions d'un événement A de probabilité constante p, sur μ épreuves, est compris dans l'intervalle $[\mu(p-l), \mu(p+l)]$ surpasse la quantité

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt - \frac{3}{\sqrt{2\mu pq}},$$

moyennant ces conditions : 1° $p \gtrless q$; 2° $l \gtrless \frac{1}{2}q$; 3° μ est au moins égal à 10 et à $\frac{1}{q^2}$; 4° $T\sqrt{2pq} = l\sqrt{\mu}$.

La probabilité dont il est question surpassera *à fortiori*.

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}dt - \frac{3}{\sqrt{2\mu p_3 q_3}},$$

si p_3q_3 est le plus petit des produits p_1q_1, p_2q_2 définis au n° 3, si l est inférieur à la plus petite des quantités $\frac{1}{2}p_1$, $\frac{1}{2}q_1$, $\frac{1}{2}p_2$, $\frac{1}{2}q_2$; enfin, si μ est au moins égal à 10 et à la plus grande des quantités $(1 : p_1^2)$, $(1 : q_1^2)$, $(1 : p_2^2)$, $(1 : q_2^2)$.

La probabilité que le nombre des répétitions m de l'événement A, sur μ épreuves, sera compris dans l'intervalle I, plus grand que $[\mu(p_1 - l_1), \mu(p_2 + l_2)]$ surpassera évidemment P, ou sera de la forme $P + \alpha$, α étant une quantité positive.

5. *Loi des grands nombres.* Supposons qu'un certain événement A soit soumis ainsi que son contraire, à μ épreuves répétées, k fois dans des circonstances qui font prendre successivement à sa probabilité p, k valeurs différentes, dont chacune est au moins égale à p_1, au plus égale à p_2.

D'après ce qui précède, dans chacune de ces séries de μ épreuves, *la probabilité que le nombre m de répétitions de l'événement sera compris dans l'intervalle I* est de la forme $P + \alpha$, α étant positif, et, par suite, *surpasse P.*

C'est, au fond, dans ce théorème que consiste la *loi des grands nombres.*

Il diffère du théorème de Bernoulli en ce que l'intervalle I est plus grand et l'expression P est plus petite que si p était constant, mais il est démontré avec la même rigueur et a la même valeur objective.

BRUXELLES. — IMPRIMERIE POLLEUNIS ET CEUTERICK.

SUR

LA PORTÉE OBJECTIVE DU CALCUL DES PROBABILITÉS

PAR

P. MANSION

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND
DIRECTEUR DE LA CLASSE DES SCIENCES ET PRÉSIDENT DE L'ACADÉMIE EN 1903

Discours prononcé dans la séance publique de la Classe des sciences le 16 décembre 1903

BRUXELLES
HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
Rue de Louvain, 112
—
1903

Sur la portée objective du calcul des probabilités.

I.

DOUTES SUR LA PORTÉE OBJECTIVE DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

Il est peu de pays, croyons-nous, où le calcul des probabilités tienne une place aussi considérable dans l'enseignement supérieur qu'en Belgique. Depuis 1835, il fait partie intégrante du programme du doctorat en sciences physiques et mathématiques; depuis 1838, de celui de nos hautes écoles techniques.

En France, au contraire, il n'est enseigné qu'accidentellement, comme accessoire du cours de physique mathématique à la Sorbonne; à l'École Polytechnique, on ne lui consacre que quelques leçons des cours d'analyse et d'astronomie. En Allemagne, l'une des plus célèbres applications du calcul des probabilités, la théorie de la compensation des erreurs d'observation, fait souvent l'objet d'une *Vorlesung* spéciale, mais rarement le calcul des probabilités y est exposé dans toute son étendue. Aussi, de 1837, date du grand ouvrage de Poisson sur la *Probabilité des jugements en matière civile et criminelle*, à 1889, année où Bertrand publia son *Calcul des probabilités* (*), il n'a paru sur la matière qu'un seul vrai traité

(*) Paris, Gauthier-Villars et fils.

écrit dans l'une des grandes langues européennes. C'est le cours fait par A. Meyer, à l'Université de Liége, de 1849 à 1857, publié par M. Folie en 1874, et traduit en allemand par M. E. Czuber en 1879 (*).

D'où vient cette haute fortune du calcul des probabilités dans notre pays? Selon toute apparence, de la grande influence dont a joui dans les conseils du gouvernement et dans le monde scientifique belge, l'homme éminent qui, pendant un demi-siècle, a été la personnification de notre Académie, je veux dire Adolphe Quetelet, son secrétaire perpétuel de 1835 à 1874.

L'œuvre capitale de Quetelet, la *Physique sociale* (1836), où il a jeté les bases de la statistique morale ou, comme on dit maintenant en langage barbare, de la sociologie positive, est fondée sur le calcul des probabilités, sur la loi des grands nombres.

Quetelet y prouve par des chiffres que l'homme, quand il obéit à sa raison, agit comme d'après une loi; qu'il en est de même quand il se laisse aller à ses instincts; ou, plus exactement, il en est ainsi quand il se trouve dans le voisinage de l'un ou l'autre de ces deux cas limites : alors, la force d'en haut ou la force d'en bas, le libre arbitre ou la passion laisse sa trace dans les moyennes comme une force perturbatrice qui les altère quelque peu; mais dans l'ordre des faits moraux, comme

---

(*) Pour ne pas encombrer cette lecture de renseignements bibliographiques, nous renvoyons le lecteur curieux de connaître l'histoire détaillée du calcul des probabilités aux ouvrages suivants : GOURAUD, *Histoire du Calcul des probabilités*, Paris, Durand, 1848; TODHUNTER, *A History of the Mathematical Theory of probability*, Cambridge, Macmillan and C°, 1865. CZUBER, *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie*, Leipzig, Teubner, 1899.

dans celui des faits physiques, apparaît toujours la loi des grands nombres, qui les résume approximativement au point de vue quantitatif.

Quetelet, comme Meyer, comme Poisson, comme Laplace, croit à la valeur objective du calcul des probabilités. Comme eux, en théorie, il fait çà et là des réserves sur la portée de tel ou tel principe; mais, en général, il applique hardiment ces principes jusque dans les cas les plus extrêmes.

Cependant, même du vivant de Quetelet, on avait déjà battu en brèche la confiance accordée à ces principes. Gauss, au début de son exposition de la méthode des moindres carrés, a signalé ce qu'il y a de purement subjectif dans la définition des erreurs accidentelles (*). On sait maintenant que dans ses cours sur la compensation des erreurs, il prenait nettement le même point de départ que Legendre, c'est-à-dire qu'il ne la faisait nullement reposer sur le calcul des probabilités (**).

Bienaymé a défendu la théorie des erreurs de Laplace, mais en déclarant qu'il y a lieu d'y introduire de sérieuses corrections. En outre, trente ans après la mort de Poisson, il a publié une note excellente, quoique pédantesque d'allure et de style, sous le titre peu respectueux : *Sur un principe que M. Poisson avait cru découvrir et qu'il avait appelé Loi des grands nombres* (***).

Cournot, non sans pédantisme aussi, a justement critiqué des applications de la règle de probabilité des causes

---

(*) Gauss, *Werke*, IV, p. 7.
(**) Gauss, *Werke*, VIII, pp. 147-148.
(***) Paris, Anger, 1870.

où elle n'a qu'une portée subjective, et cela dans son *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* (*), où, après Condorcet, Laplace et Poisson, il a tenté, lui aussi, de soumettre au calcul des probabilités les jugements en matière civile et criminelle.

A une époque plus rapprochée de nous, le livre de Bertrand et celui de M. Poincaré (**) accusent des tendances encore plus sceptiques. Bertrand signale, comme ses devanciers, les points faibles de la théorie de la probabilité des causes (pp. 157 et sqq.) et par suite de celle de la compensation des erreurs accidentelles; la loi des grands nombres, de Poisson, lui semble identique au théorème de Jacques Bernoulli (pp. XXXI-XXXII); il accable de ses sarcasmes spirituels les recherches de Quetelet sur l'homme moyen (pp. XLI-XLIII) et surtout les travaux des géomètres français sur la probabilité des jugements (pp. XLIII-XLIX, 319-327). La conclusion du *Calcul des probabilités* de Poincaré est aussi très peu rassurante : « On ne peut dépouiller complètement de ces hypothèses arbitraires, dit-il, les questions de probabilités; aussi le mot de calcul semble-t-il ambitieux, et il ne sert qu'à dissimuler l'ignorance absolue... On ne doit pas s'attendre à rencontrer quelque résultat pleinement satisfaisant. Le calcul des probabilités offre une contradiction dans les termes mêmes qui servent à le désigner, et si je ne craignais de rappeler ici un mot trop souvent répété, je dirais qu'il nous enseigne surtout une chose : c'est de savoir que nous ne savons rien (pp. 273-274). »

(*) Paris, Hachette, 1843.

(**) *Calcul des probabilités*. Paris, Naud, 1896.

Que penser de ces opinions, en apparence au moins si profondément divergentes? Laplace est-il trop crédule ou M. Poincaré trop sceptique? Faut-il renoncer au calcul des probabilités? La chose semble impossible. Dans son récent ouvrage sur *La science et l'hypothèse* (*), où il consacre un chapitre au calcul des probabilités, M. Poincaré lui-même, un peu moins pessimiste que dans son cours de la Sorbonne, dit expressément : « Toutes les fois que le physicien raisonne par induction, il fait plus ou moins consciemment du calcul des probabilités (p. 214). »

D'autre part, dans les fines analyses psychologiques de sa *Grammar of Assent*, Newman remarque que nous donnons continuellement un assentiment complet à des propositions invérifiables pour nous, et cet assentiment n'est basé que sur des probabilités accumulées. M. Ernest Naville fait des remarques analogues dans un mémoire sur *L'importance logique du témoignage* (**).

Il semble donc que l'homme, aussi bien dans ses théories scientifiques que dans cet ensemble d'opinions, de croyances ou de convictions qui le guident dans sa vie affective, morale ou religieuse, s'appuie sans cesse, qu'il le sache ou non, sur les principes du calcul des probabilités, et pourtant ceux-ci semblent peu sûrs à d'excellents esprits.

Cette antinomie apparente m'a frappé depuis longtemps; j'ai indiqué partiellement dans mes cours et dans diverses notes publiées çà et là, comment, selon moi, on pouvait la résoudre. Mais je n'ai jamais eu l'occasion

---

(*) Paris, Flammarion, s. d.

(**) *Compte rendu de l'Académie des sciences morales et politiques*, 1887, 2e semestre, t. CXXVIII, pp. 269-284.

d'exposer l'ensemble de mes vues sur ce sujet. Cette occasion m'est offerte aujourd'hui et je vais tâcher de préciser devant vous les conditions suffisantes sinon nécessaires pour que le calcul des probabilités ait une portée objective.

Pour diminuer l'aridité inévitable d'un pareil sujet, — car, vous le savez, *si les nombres régissent le monde, ils le régissent sans l'amuser*, comme l'a fait remarquer M. De Tilly, — pour diminuer l'aridité inévitable d'un pareil sujet, au lieu de suivre l'ordre logique, je suivrai l'ordre historique. Cela me donnera l'occasion de faire parler à ma place Pascal, Laplace, Quetelet, Newman, Naville, Bertrand, Poincaré, Boutroux, et ce sera tout gain pour mes auditeurs comme pour moi.

II.

PASCAL ET FERMAT. LA THÉORIE DES JEUX.

Vers 1649, Blaise Pascal, dont la santé était ébranlée depuis longtemps déjà, dut renoncer à tout travail scientifique sur l'ordre des médecins. « Ils lui prescrivirent de quitter toute application d'esprit et de chercher les occasions de se divertir... Blaise chercha une occupation dans le commerce du monde et ne tarda pas à goûter cette vie nouvelle. Il se mit à jouer et à se divertir pour passer le temps. Il se livra, sans dérèglement toutefois, aux amusements de la société... A Paris, il se lia avec plusieurs personnes imbues de l'esprit du monde », et entre autres avec « le chevalier de Méré, Poitevin, honnête homme avec entêtement, puriste et précieux, affectant la simplicité, le naturel et le bon sens, voyant dans

les choses de l'esprit et du sentiment un monde spécial, qu'il mettait très au-dessus du monde naturel (*) ». Méré, dont Leibniz a dit qu'il avait un esprit pénétrant, même pour les mathématiques, et qui était joueur et philosophe (**), eut une grande influence sur le jeune Pascal; il lui fit connaître, sans le lui donner, cet *esprit de finesse* dont l'auteur des *Pensées* devait plus tard marquer si fortement la différence avec l'*esprit de géométrie*.

En 1654, Méré souleva deux questions relatives au jeu de dés, qui ramenèrent brusquement Pascal à ces recherches scientifiques qu'il semblait avoir abandonnées pour toujours. Nous ne dirons rien de la première, que Roberval et Méré lui-même parvinrent à résoudre, mais la seconde a donné naissance au calcul des probabilités et vaut la peine d'être exposée. « Le problème était le suivant. Deux joueurs considérés comme également habiles rompent le jeu avant la fin. En ce cas, le règlement de tout ce qui doit leur appartenir doit être tellement proportionné à ce qu'ils avaient droit d'espérer de la fortune, que chacun d'eux trouve entièrement égal de prendre ce qu'on lui assigne, ou de continuer l'aventure du jeu : et cette juste distribution s'appelle le parti (***). » A Paris, Pascal seul parvint à résoudre la question, Roberval n'y réussit pas.

La méthode de Pascal est admirable de simplicité et, suivant un mot célèbre, elle peut être exposée à un passant dans la rue. « Voici, dit-il, à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux

---

(*) Boutroux, *Pascal*. Paris, Hachette, 1900, p. 49.
(**) Todhunter, p. 12.
(***) Boutroux, *Pascal*, p. 66.

joueurs jouent, par exemple, en trois parties et que chacun a mis 32 pistoles au jeu. Posons que le premier en ait deux et l'autre une : ils jouent maintenant une partie dont le sort est tel, que si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et, par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles. Considérez donc que, si le premier gagne, il lui appartient 64; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils ne veulent pas hasarder cette partie et se séparer sans jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles; car la perte » même me les donne; mais pour les 32 autres, peut-être » je les aurai, peut-être vous les aurez; le hasard est égal; » partageons donc ces 32 pistoles par la moitié, et donnez- » moi outre cela mes 32 qui me sont sûres. » Il aura donc 48 pistoles, et l'autre 16 (*). » Pascal indique comment sa méthode s'étend à des questions plus compliquées entre deux joueurs; il l'a appliquée plus tard au cas de trois joueurs (II, p. 403), et il est évident qu'elle est générale, quoi qu'en ait dit Laplace à la première page de sa *Notice historique sur le calcul des probabilités* (**). Au fond, Pascal résout de proche en proche une équation linéaire aux différences partielles et invente ainsi l'une des deux méthodes analytiques du calcul des probabilités.

Fermat, conseiller au parlement de Toulouse, le plus grand géomètre de la première moitié du XVII^e^ siècle, le plus modeste aussi, pour ne pas dire le seul modeste, a

---

(*) *OEuvres de Pascal*. Paris, Hachette, 1858, t. II. p. 393.

(**) LAPLACE, *Théorie analytique des probabilités*, 3^e^ édition. Paris, V^e^ Courcier, 1820, pp CXXXIV-CXXXV.

créé la seconde de ces méthodes, celle qui repose sur la théorie des combinaisons. Pascal lui communique ses résultats; Fermat les approuve et lui fait connaître sa propre méthode sous une première forme. Pascal en méconnaît d'abord la portée. Fermat la met sous une seconde forme et dissipe tous les nuages comme en se jouant. Non seulement il se sert de l'idée simple de probabilité comme Pascal, mais il introduit dans ses calculs le principe des probabilités composées et celui de la probabilité totale. Fermat envoya en même temps à Pascal quelques-uns de ses énigmatiques théorèmes sur les nombres, entre autres celui qui est relatif à la décomposition de tout nombre en nombres polygonaux. Pascal en fut épouvanté. « Cherchez ailleurs, dit-il, qui vous suive en vos inventions numériques (*). » Pascal eut raison, car ce n'est que cent cinquante ans plus tard que Cauchy est parvenu à démontrer le théorème sur les nombres polygonaux communiqué par Fermat à Pascal. Aujourd'hui encore, comme on le sait, un dernier théorème de Fermat reste indémontré, malgré les efforts des plus grands géomètres du XVIII^e^ et du XIX^e^ siècle pour retrouver la mystérieuse démonstration de l'illustre géomètre toulousain.

Dès 1654, Pascal et Fermat ont donc posé les principes et inventé les deux méthodes analytiques du calcul des probabilités. Leur correspondance, qui ne fut imprimée que beaucoup plus tard, circula dans le monde scientifique d'alors et provoqua de nouvelles recherches. Pendant

---

(*) Voir la correspondance échangée entre Pascal et Fermat (*Œuvres de Pascal*, II, pp. 392-407) pour les diverses assertions contenues dans le texte.

plus d'un demi-siècle, divers géomètres, dont quelques-uns des plus illustres, Huygens, Leibniz, Montmort, Jacques, Jean et Nicolas Bernoulli, Moivre, Jean De Wit, le célèbre pensionnaire de Hollande, développent et appliquent les principes de Pascal et de Fermat, mais sans y rien ajouter d'essentiel. Ce n'est qu'à la fin de sa vie que Jacques Bernoulli découvrit le célèbre théorème qui porte son nom et que Poisson a généralisé un siècle plus tard en l'appelant *Loi des grands nombres*.

Mais afin de mieux faire saisir la portée de cette belle découverte, nous devons d'abord parler d'un cas de probabilité simple, où les plus ignorants comme les plus savants en analyse mathématique peuvent faire presque infailliblement des prédictions justes.

III.

UN CAS OÙ LA PROBABILITÉ DEVIENT PRESQUE UNE CERTITUDE.

Prédire presque infailliblement ! la chose paraît étrange au premier abord. Quand on agite un dé dans un cornet et qu'on le jette au hasard sur une table, peut-on prédire qu'il va nous donner un six ou un cinq? Quand on tire une carte d'un jeu de whist, peut-on prévoir que l'on tournera la dame de trèfle ou le sept de cœur?

Évidemment non. Mais *on peut prédire, presque à coup sûr, le contraire d'un événement très improbable.* Jetez six dés homogènes en l'air. Quelle est la probabilité d'amener une double rafle de cinq, d'amener six fois le chiffre cinq. Elle est très petite. Les six dés peuvent sortir de plus de 45 000 manières, exactement 46 656; il n'y en a qu'une favorable à l'arrivée des six cinq.

On peut donc hardiment parier 45 000 francs et plus contre un que le jeu amènera une autre combinaison que la double rafle des cinq.

Pour avoir une idée plus nette de la probabilité dont il s'agit ici, transformons-la, suivant un procédé familier à Quetelet (*), en une autre équivalente. D'après les tables de survie pour la Belgique, publiées, il y a dix ans, par M. J. Leclerc, sur 46 656 jeunes hommes de 20 ans, 324 n'arrivent pas à l'âge de 21 ans, de sorte qu'il en mourra en moyenne 27 par mois, c'est-à-dire à peu près un par jour. La probabilité de l'arrivée d'une double rafle de cinq est donc à peu près la même que celle qu'un jeune homme de 20 ans, pris au hasard parmi plus de 45 000 hommes de même âge, mourra dans les vingt-quatre heures. La probabilité contraire, celle de la non-arrivée de la double rafle des cinq, est donc celle que le jeune homme dont nous parlions tantôt vivra encore au moins un jour.

N'est-il pas vrai que dans les deux cas équivalents que nous venons de citer, tout le monde est pratiquement certain, ou prédit à coup sûr, que la double rafle des cinq n'arrivera pas, que le jeune homme choisi au hasard vivra encore un jour?

Si quelqu'un en doute, il est facile d'imaginer d'autres cas plus concluants. Le mot *absolument* contient dix lettres toutes différentes. On peut les permuter de plus de 3 $^1/_2$ millions de manières, exactement 3 628 800. La probabilité de former le mot *absolument* en tirant successivement d'une urne dix jetons sur lesquels sont inscrites les dix lettres est soixante-dix-sept fois moindre que celle

(*) *Théorie des probabilités*. Bruxelles, Jamar, 1853, pp. 16-17.

de tantôt. L'arrivée d'une autre combinaison des dix lettres que celle qui donne le mot *absolument* est donc pratiquement certaine. C'est un événement aussi sûr que celui-ci : le jeune homme de tantôt, pris au hasard parmi les 46 656 de son âge, vivra encore au moins dix-sept minutes.

Bertrand a très bien expliqué pourquoi certains événements doivent se produire presque fatalement : « Tous les arrangements sont également possibles ; que les plus nombreux se présentent, il n'y a pas de sujets d'étonnement. Si toutes les combinaisons dont le nombre est immense étaient présentes matériellement », l'une d'elles, désignée d'avance, « deviendrait introuvable. Le hasard reste libre, mais la carte est forcée » (p. XXIII).

Si chacune des combinaisons des six dés était préparée dans une boîte de 1 décimètre carré de base et de 2 centimètres de hauteur, sans que, dans aucune boîte, les mêmes dés présentassent les mêmes faces, les 46 656 boîtes formeraient un monceau de plus de 9 mètres cubes, où il serait bien difficile de retrouver la double rafle des cinq. Si l'on met dans des boîtes semblables les jetons sur lesquels se trouvent les lettres du mot *absolument*, elles rempliront une salle de 15 mètres de long, de 8 de large et de 6 de haut. Qui pourrait espérer de retrouver le mot dans un dictionnaire de cette dimension et dont toutes les pages seraient brouillées au hasard.

Une dernière comparaison : le texte grec du Nouveau Testament contient de 8 à 900 000 lettres. La probabilité dont il vient d'être question est cinq fois plus petite que celle de rencontrer le ὁ du mot Κέδρον — qui n'y est qu'une fois, d'après Leusden — en ouvrant le livre et piquant une lettre au hasard avec une épingle.

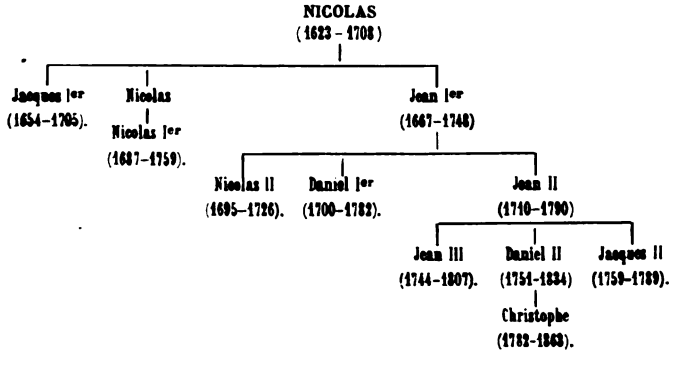
IV.

LE THÉORÈME DE BERNOULLI ET LA LOI DES GRANDS NOMBRES.

Nous pouvons maintenant donner une idée du théorème de Bernoulli et de la loi des grands nombres de Poisson. Ces géomètres ont trouvé, dans beaucoup de questions de probabilités, des cas où l'on peut prédire aussi sûrement que dans les exemples simples indiqués plus haut.

Jacques Bernoulli est l'aîné d'une famille, j'ai failli dire d'une dynastie de mathématiciens, originaire de Bâle, et si l'on remonte plus haut, d'Anvers. On y distingue Jacques I^er^, — c'est l'auteur du théorème, — Jacques II, Jean I^er^, Jean II, Jean III, Nicolas I^er^, Nicolas II, Daniel I^er^, Daniel II. Un fils de ce dernier, Christophe Bernoulli, qui a écrit sur la *Populationistik* en 1840, est mort à Bâle en 1863 (*).

(*) Voici un aperçu généalogique de cette intéressante famille :



(D'après M. CANTOR, dans l'*Allgemeine deutsche Biographie*, II, pp. 470-483.)

Nicolas Ier, neveu de Jacques Ier et de Jean Ier, publia, en 1713, l'*Ars conjectandi* de son oncle Jacques Ier, mort huit ans auparavant, et fit connaître ainsi la proposition célèbre qui a donné une portée inattendue au calcul des probabilités.

Je ne puis évidemment vous exposer ce théorème au moyen des hiéroglyphes de l'algèbre; quinze pages suffisent à peine pour en donner une démonstration complète. Mais on peut aisément le faire connaître sur des exemples.

Considérons une urne où il y a 300 boules identiques à la couleur près, 100 blanches, 200 noires. Par convention, la *probabilité a priori* de tirer une boule blanche de cette urne est $1/3$, celle de tirer une boule noire $2/3$.

On extrait une boule de l'urne au hasard, on en note la couleur, on la remet dans l'urne et l'on répète cette opération quatre-vingt-dix mille fois, en ayant soin, après chaque tirage, de bien mélanger les boules.

Calculons, au moyen des principes élémentaires trouvés par Fermat et des formules peu élémentaires de Stirling, de Moivre et de Laplace, la probabilité que le nombre des boules blanches sorties de l'urne sur les 90 000 tirages, est 30 000 à 600 près; nous trouverons qu'elle est la même que celle de la non-arrivée d'une double rafle de cinq quand on jette six dés. Autrement dit, nous sommes pratiquement certains qu'il est sorti entre 29 400 et 30 600 boules blanches. Nous prédisons à $1/50$ près.

Si nous avions fait cent fois plus de tirages, donc 9 000 000, nous pourrions parier avec la même certitude qu'il y a eu sortie de 3 000 000 de boules blanches à 6 000 près. Le nombre des tirages est cent fois plus

grand, 9 000 000 au lieu de 90 000; l'écart absolu n'est que dix fois plus grand, 6 000 au lieu de 600. Cette fois, nous prédisons à $^1/_{500}$ près.

Si nous nous étions assigné un écart absolu de 800 sur 90 000 tirages ou de 8 000 sur 9 000 000 de tirages, la probabilité que le nombre de boules blanches aurait été 30 000 à 800 près, ou 3 000 000 à 8 000 près, eût été la même que celle de la non-arrivée du mot *absolument* dans l'exemple cité antérieurement. Autrement dit, on peut prédire avec une quasi-certitude qu'il sortira 30,000 boules blanches à 800 près (ou 3 000 000 à 8 000 près) sur 90 000 (ou 9 000 000 de) tirages (*).

(*) Nous nous servons des formules classiques :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2} dt, \qquad T = l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}}$$

où $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$; μ est le nombre de tirages, l l'écart relatif, μl l'écart absolu. Quand T = 3, on trouve P = à peu près $1 - \frac{1}{46656}$, puis

$$\text{si } = \mu\ 90\,000, \qquad l = \frac{1}{150}, \qquad \mu l = 600;$$

$$\text{si } \mu = 9\,000\,000, \qquad l = \frac{1}{1500}, \qquad \mu l = 6\,000.$$

Quand T = 4, P = à peu près $1 - \frac{1}{3628800}$, puis

$$\text{si } \mu = 90\,000, \qquad l = \frac{1}{225}, \qquad \mu l = 800;$$

$$\text{si } \mu = 9000\,000, \qquad l = \frac{1}{1125}, \qquad \mu l = 8\,000.$$

En langage mathématique, on énoncera le théorème de Bernoulli, dans le cas actuel, comme il suit : L'écart relatif, c'est-à-dire la différence entre la probabilité *a priori*, $1/3$, de l'arrivée d'une blanche, et le rapport du nombre de boules blanches au nombre total des tirages, diffère de moins en moins de zéro à mesure que l'on fait plus d'épreuves ; et l'on est pratiquement certain qu'il en est ainsi.

Si, sur les 90 000 ou sur les 9 000 000 de tirages, on avait oublié parfois de remettre une boule tirée dans l'urne, de manière que la composition de celle-ci eût varié tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, le théorème de Bernoulli se transforme légèrement et devient la loi des grands nombres de Poisson ; les écarts possibles deviennent un peu plus grands, mais on peut assigner ceux qui ne seront pas dépassés avec une quasi-certitude comme dans le cas précédent.

Le théorème de Bernoulli et la loi des grands nombres permettent donc de prédire les écarts dans le sens indiqué plus haut, quand on connaît la *probabilité a priori* de l'événement dont on provoque la répétition un grand nombre de fois.

Mais inversement, si l'on a observé dans une série nombreuse d'épreuves relatives à un événement et à son contraire, le nombre de fois que cet événement est arrivé, le rapport de ce nombre au nombre total d'épreuves, la *probabilité a posteriori*, comme on l'appelle, sera très peu différente de la *probabilité a priori* de l'événement observé et, par suite, peut servir à la trouver.

Ainsi, dans les exemples cités plus haut, le rapport du nombre des boules blanches au nombre des tirages

tendra fatalement vers un tiers et peut servir à faire connaître la composition relative de l'urne.

On peut traduire cette conséquence de la loi des grands nombres sous cette forme familière : On connaît d'autant mieux ce qu'il y a dans un sac que l'on y met plus souvent la main, et si on le fait assez souvent, on le connaîtra presque infailliblement. Plus solennellement, plus académiquement si l'on veut, la loi des grands nombres nous permet dans certains cas d'interroger la nature et de la forcer à répondre à nos questions.

V.

LA RUINE DU JOUEUR. LA GUERRE.

Moivre, Lagrange, Laplace et Ampère ont appliqué le théorème de Bernoulli au problème dit de la ruine du joueur, du joueur qui joue indéfiniment à un jeu équitable ou non.

Un jeu est dit équitable quand la mise du joueur est proportionnelle à sa probabilité de gagner.

Il résulte immédiatement du théorème de Bernoulli que chaque joueur gagnera à un jeu équitable à peu près un nombre de parties proportionnel à sa probabilité de gagner; plus il jouera, plus la proportionnalité sera exacte et, par suite, il gagnera ou perdra une fraction toujours décroissante de sa mise totale. Rien de plus consolant en apparence pour les joueurs obstinés.

Malheureusement, la mise totale croît sans cesse, et l'on prouve aisément qu'il est pratiquement sûr que la perte totale de l'un des deux joueurs dépassera sa fortune,

qu'il se ruinera si le temps ne lui manque pas. « La ruine tôt ou tard est certaine, dit Bertrand. La proposition semble contradictoire. En ruinant l'un des joueurs, le jeu enrichit l'autre; en s'exposant à perdre une fortune, on a l'espoir de la doubler. Cela n'est pas douteux; mais quand la fortune est doublée, le théorème s'y applique avec la même certitude (p. 105). » Par suite, « si deux joueurs jouent sans cesse, jusqu'à la ruine de l'un d'eux, le moins riche sera probablement vaincu ». En particulier, il en sera ainsi de « l'homme qui joue sans limite et sans cesse accepte tous les adversaires, dont l'ensemble, sans changer son sort, peut recevoir un nom collectif, *le public;* le public, qui n'est jamais ruiné, ruine les imprudents qui l'attaquent » (p. xvi).

« Tout change quand les conditions du jeu sont inégales », autrement dit quand le jeu n'est pas équitable. A fortune égale, c'est le joueur favorisé qui l'emportera presque infailliblement, si les enjeux ne sont pas trop élevés, de manière qu'il puisse jouer, en tout cas, un grand nombre de parties. Dans ces jeux, dit Buffon, le joueur favorisé, « le banquier n'est qu'un fripon avoué et le ponte », son adversaire, « une dupe dont on est convenu de ne pas se moquer » (*).

Mais il y a un cas où même le joueur favorisé se ruinera presque infailliblement, c'est celui où son avantage est petit et où il est forcé de jouer indéfiniment contre un adversaire très riche, et de jouer gros jeu; dans ce cas, il n'est plus protégé par le théorème de Bernoulli.

(*) QUETELET, p. 34.

Ainsi, dans le cas où le *total* des enjeux n'est pas limité, un milliardaire peut ruiner à coup sûr le banquier du jeu de trente et quarante, si ce banquier n'est que millionnaire. L'avantage de ce *fripon avoué*, dans ce cas, n'est que de 6 ‰, et il est insuffisant pour le défendre contre la stratégie d'un milliardaire, qui peut doubler un grand nombre de fois sa mise par personnes interposées.

Me permettrez-vous, à l'imitation de Quetelet, une application, peut-être un peu naïve, de ce qui précède à la guerre. Annibal, dans sa lutte contre Rome, avait pour lui son génie militaire, l'indomptable valeur de ses auxiliaires gaulois, les richesses de Carthage, et pourtant il a perdu la partie : Rome avait une réserve indéfinie de patriotisme, elle pouvait être vaincue sur dix champs de bataille sans que rien fût compromis. Annibal était condamné à la victoire perpétuelle : il luttait pour la vie. En 1812, 1813 et 1814, une partie sanglante analogue s'est jouée en Espagne, en Russie, en Allemagne, entre Napoléon et les nations, et malgré son génie aussi, c'est Napoléon qui a été vaincu. Dans la guerre des Boers contre l'Angleterre, le même phénomène s'est reproduit : la petite nation africaine avait pour elle le droit, le patriotisme, la connaissance du théâtre de la lutte, l'endurance au climat; elle a été vaincue par une armée de mercenaires indéfiniment renouvelable et disposant de vivres et de munitions en quantité illimitée. Tristes parties, disait Quetelet, il y a un demi-siècle, « que celles qui exigent pour enjeu la prospérité des nations et le sang des hommes; où le gagnant est celui qui réussit à détériorer le mieux la part qu'il convoite, sans qu'il puisse prévoir l'étendue des sacrifices qu'il devra s'imposer pour l'obtenir » (p. 39).

VI.

APPLICATION AU TRANSFORMISME.

C'est sans doute aller à l'extrême des spéculations permises et peut-être même au delà, que d'appliquer les formules des géomètres sur la ruine du joueur aux hasards de la guerre. Mais assurément, comme l'a cru Delbœuf, on peut s'en servir pour porter quelque lumière dans une question de biologie, toujours actuelle, depuis qu'elle a été posée par Darwin, en 1859, dans l'*Origin of species*. Peut-on expliquer la formation de nouvelles espèces, ou au moins de nouvelles variétés, de nouvelles races — les géomètres ne peuvent les distinguer — par la survivance d'*un petit nombre* d'individus, devenus, dans la lutte pour la vie, *légèrement* plus aptes que la masse de leurs congénères; ou, comme disait Delbœuf, un principe interne de variation, si *faible* soit-il, doit-il à la fin introduire des changements toujours plus prononcés chez presque tous les individus appartenant à une même espèce? J'appuie sur les mots *petit nombre*, *légèrement plus apte*, *variation faible*, parce que la réponse à la question en dépend.

L'individu faiblement avantagé par la nature a un peu plus de chance de vivre et de perpétuer son avantage chez ses descendants qu'un autre quelconque des individus de la même espèce; c'est ce que tout le monde voit et dit. Mais ce que l'on oublie souvent, c'est qu'il en a infiniment moins que l'ensemble de ces individus, surtout s'il joue gros jeu, s'il joue souvent son existence. Il est dans le cas du banquier millionnaire qui est aux

prises avec un milliardaire au jeu de la roulette, et qui risque chaque fois une forte partie de sa fortune. Le milliardaire — ici l'ensemble des individus qui ne sont pas avantagés — perdra peut-être d'abord neuf ou dix millions, mais à la fin, il ruinera, presque infailliblement, le banquier qui n'est que millionnaire. Pour que celui-ci l'emportât, il faudrait que l'avantage qu'il a au jeu fût assez considérable et qu'ainsi il pût continuer indéfiniment la lutte. La loi des grands nombres est donc défavorable à l'évolutionnisme par transformation faible et lente, tandis qu'elle est favorable à l'évolutionnisme par transformation brusque et forte.

Darwin, à l'endroit où il combat le transformisme par saut brusque de Mivart et défend le transformisme par variations insensibles (*Origin of species*, 6e édition stéréotype, tirage de 1882, p. 202), a bien vu que celui-ci présuppose que les petites variations favorables portent sur un grand nombre d'individus et que les variations défavorables en atteignent et en détruisent un grand nombre d'autres. Malheureusement, cela revient à dire qu'*il y a évolution quand il y a évolution*, et si Darwin n'avait pas d'autre argument, il n'aurait rien expliqué du tout.

Mais que penser de la démonstration si séduisante de Delbœuf (*) en faveur du transformisme par variation très faible d'un petit nombre d'individus? D'abord qu'elle est très fine et très ingénieuse, parce que l'auteur, comme

---

(*) *Revue scientifique* du 13 janvier 1877, pp. 669-679. C'est à la p. 673, col. 2, qu'il parle de la réduction à faire et qu'il suppose tous les individus égaux au point de vue des chances de vie.

Pascal dans le problème des partis, ne manie que des nombres entiers, il évite toute formule empruntée au calcul des probabilités, et c'est sagesse, car les biologistes et les philosophes se défient toujours des géomètres qui semblent mesurer la certitude, le doute, la probabilité, la possibilité. On ne songe pas à se défier de Delbœuf, qui ne fait que d'innocentes additions, soustractions et multiplications. Mais hélas, la démonstration ne prouve rien, à cause d'une singulière inadvertance de l'auteur : il a oublié de réduire au nombre primitif de représentants d'une espèce, le nombre total de ceux qui les remplacent après chaque génération, bien qu'il ait averti qu'il faut le faire. Il a oublié de faire une division ou de tenir compte du *struggle for life*. Or, quand on veut effectuer cette division, cette réduction nécessaire, on doit fatalement faire l'une de ces deux hypothèses : ou bien admettre, avec Delbœuf, que *tous les individus, transformés ou non, sont égaux au point de vue des chances de vie*, ou que les individus transformés sont les uns notablement plus aptes, les autres notablement moins aptes à l'emporter dans la lutte pour la vie. Dans le premier cas, le groupe non transformé, favorisé par sa supériorité numérique, l'emportera sur le groupe transformé, qui disparaîtra, contrairement à ce qu'a pensé Delbœuf (*). Dans l'autre cas, sa démonstration redevient valable tout en gardant sa belle simplicité, et ainsi complétée et corrigée, constitue un argument en faveur de l'évolutionnisme par saut brusque de Mivart.

---

* Il avait cependant remarqué, p 673, col. 1, que *la rareté d'une espèce est un désavantage pour elle.*

VII.

LA VRAIE NATURE DU CALCUL DES PROBABILITÉS ET DU HASARD.

La ruine du joueur, le jeu sanglant des armes comme on disait autrefois, le transformisme nous ont écarté de notre route. Revenons aux principes du calcul des probabilités et aux conséquences philosophiques de la loi des grands nombres.

Nous avons parlé de *probabilités a priori* et de probabilités *a posteriori* à propos de cette loi. Mais quand on y regarde de près, on s'aperçoit qu'en pratique, toutes les probabilités sont *a posteriori*. Nous disons que la probabilité d'amener un chiffre déterminé avec un dé, 5 par exemple, est $^1/_6$, parce que nous supposons le dé bien homogène et que nous jugeons qu'il est également facile d'amener chacune des six faces. Mais si le dé était pipé, s'il ne pouvait amener que les faces 4 et 5, d'ailleurs avec la même facilité, la probabilité d'amener 5 serait $^1/_2$.

En réalité, il n'y a qu'un moyen de savoir si le dé est pipé ou non, de connaître la probabilité objective de l'arrivée de chacune des faces, c'est de soumettre le dé à des épreuves répétées. On trouvera, par exemple, qu'en 600 épreuves, le 5 se présente 97 fois, en 6 000, 1 003 fois, en 12 000, 2 002 fois et ainsi de suite. On en conclura que la probabilité *a posteriori*, la probabilité objective de l'arrivée de 5 est environ $^1/_6$ ou, plus exactement, qu'elle est comprise entre $^{97}/_{600}$ et $^{1003}/_{6000}$. On se servira de la première valeur dans les calculs relatifs au théorème de Bernoulli, des autres, dans les

formules plus exactes relatives à la loi des grands nombres de Poisson.

Cela prouve que, bien loin qu'on puisse se passer de celle-ci en la remplaçant toujours par le théorème de Bernoulli, comme le veulent Bienaymé et Bertrand, l'emploi de cette loi est au contraire indispensable, puisque l'on ne peut jamais, en pratique, connaître une probabilité objective avec une exactitude absolue.

Il y a plus : quelque étrange que cela paraisse, le calcul des probabilités n'existerait plus, n'aurait plus aucune raison d'être, si la probabilité objective d'un événement était une fraction bien déterminée.

Quel sens, en effet, pourrait-on donner à cette phrase : La probabilité de l'arrivée d'un 5 quand on jette un certain dé sur une table est constamment égale à $^1/_6$? Pas d'autre que celui-ci : En 6 coups, 5 se présente une fois; en 12, deux fois, en 600, cent fois et ainsi de suite. Ce n'est pas tout, il faut évidemment que le 5 se présente toujours au même rang dans chaque série de six coups depuis le début du jeu; sans cela, en subdivisant les 600 coups en groupes convenables, il y aurait des *sixaines* sans 5. Mais si 5 se présente avec cette régularité absolue, il n'y a plus rien de probable ou d'improbable dans son arrivée; on est certain qu'il se présentera ou non quand on jouera tel ou tel coup dans la série des 600; ce sera une loi de la nature.

Ce que nous disons à propos de ce dé peut se répéter à propos de toutes les questions de probabilités. *Le calcul des probabilités ne s'applique pas à des phénomènes dont on connaît les lois d'une manière absolue*; car dans l'ordre de ces phénomènes, on prédit à coup sûr si l'on en connaît les lois. « Une intelligence qui, pour un instant donné,

dit Laplace, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si, d'ailleurs, elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : *rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux* (pp. II-III). »

Avant Laplace, Schiller avait dit par la bouche de Wallenstein (*) :

Es giebt keinen Zufall,
Und was uns blindes Ohngefähr nur dünkt,
Gerade das steigt aus dem tiefsten Quellen.

Oui, à part le domaine des actions libres dont Laplace ne s'occupe pas, tout est soumis à des lois dans la nature ; il n'y a pas de hasard dans le sens strict du mot, et ce que nous appelons cas fortuit a son origine dans quelque relation nécessaire, mystérieuse et cachée.

Malheureusement ces lois, auxquelles nous croyons avec une foi si profonde et d'ailleurs si bien justifiée, comme nous le dirons plus loin, nous ne les connaissons pas toutes ; nous n'en connaissons même que très peu ; en outre, nous sommes loin d'avoir cette intelligence sublime qui permettrait d'embrasser dans une même formule tous les mouvements de l'univers physique.

Mais nous ne sommes pas complètement ignorants non plus. Il arrive que nous parvenions à trouver des rapports à peu près constants dans l'apparition de certains phénomènes. C'est alors que le calcul des probabi-

(*) *Mort de Wallenstein*, acte II, scène 3, vers la fin.

ités intervient au moyen de la loi des grands nombres et permet de prédire presque à coup sûr, comme nous l'avons dit, les écarts maxima entre lesquels varieront ultérieurement ces rapports sous une ou plusieurs influences perturbatrices.

Le calcul des probabilités a donc pour objet les événements que nous sommes fondés à considérer comme soumis à une loi partiellement inconnue, loi complexe d'ailleurs, résultante d'une loi principale, d'après laquelle des rapports numériques sont constants, et de lois perturbatrices secondaires donnant naissance à de faibles variations de ces rapports, variations dites *fortuites* par définition (*).

Quand donc, en calcul des probabilités, on parle des *lois du hasard,* comme on l'a fait plus d'une fois, il faut bien l'avouer, pour éblouir les profanes (**), c'est par une hardie figure de langage, une catachrèse, je crois. La loi se rencontre dans la loi principale qui affirme la constance absolue de certains rapports, le hasard dans la perturbation qui les fait un peu varier, soit par l'intervention de causes volontaires, — c'est, ce semble, le hasard, dans le sens propre du mot (***), — soit par l'intervention d'autres lois naturelles. Dans ce dernier cas, comme l'a dit Laplace, le hasard n'est que l'ignorance où nous nous trouvons de la nature de ces lois.

(*) Bien entendu, ces lois perturbatrices secondaires n'entrent pas en action dans les mêmes circonstances que la loi principale, sans quoi la loi complexe, résultante de la loi principale et des lois perturbatrices, serait une loi absolue pour le phénomène considéré.

(**) BERTRAND, *Les lois du hasard,* introduction à son cours, pp. VI-L. M. CANTOR, *Das Gesetz im Zufall.* Berlin, Habel, 1877.

(***) « La liberté du choix produit, à parler rigoureusement, les seuls cas fortuits. » (BERTRAND, p. XLIX.)

VIII.

APPLICATION AUX JEUX.

Les remarques précédentes nous permettent d'indiquer un certain nombre de cas où le calcul des probabilités a une portée objective.

Il y a d'abord les jeux de hasard non équitables, loteries d'État, jeux de trente et quarante, etc., au moyen desquels les *fripons avoués* dont parle Buffon détroussent à coup sûr les contribuables ou les dupes qu'attire l'espérance fallacieuse de gains fabuleux. Le produit annuel de l'ancienne loterie de France pouvait être porté au budget comme un revenu de l'État à peu près certain.

Dans les jeux de hasard équitables, on est étonné du petit nombre de coups nécessaires pour qu'apparaissent les rapports presque constants qui caractérisent la loi des grands nombres. Ainsi, par exemple, dans les jeux où l'on emploie les dés, on remarque bien vite qu'il est facile de s'en procurer d'homogènes, c'est-à-dire tels que chaque face se présente approximativement une fois sur six.

Il en est de même pour les cartes. Gauss jouait tous les soirs au whist avec trois amis. Il a noté, pendant plusieurs années, pour chacun des quatre joueurs, le nombre de fois où ils ont eu dans leur jeu, 1, 2, 3, 4 ou aucun as : il a trouvé que ces nombres étaient à peu près ceux que donnerait le calcul des probabilités.

Ce résultat est d'autant plus curieux qu'il n'y a pas à espérer que les hommes réalisent jamais toutes les combinaisons possibles que peuvent présenter les cinquante-deux cartes d'un jeu de whist : deux cent millions

de joueurs devraient pour cela jouer jour et nuit, à deux minutes par jeu, pendant plus de dix mille milliards de siècles, en supposant bien entendu qu'aucune combinaison déjà obtenue ne se reproduise jamais. Dans les observations de Gauss, la constance approximative des rapports exigée par la loi des grands nombres a apparu après un nombre d'épreuves relativement faible (*).

Cette même constance apparaît plus curieuse encore dans un autre jeu, purement mathématique d'ailleurs, où le nombre des cas possibles ne se compte pas par milliards, mais où il est triplement infini, comme le nombre des points d'un volume. Je veux parler du jeu ou problème de l'aiguille. On jette une aiguille, parfaitement cylindrique et homogène, sur un parquet où sont tracées des parallèles équidistantes : leur distance est précisément la longueur de l'aiguille. La probabilité *a priori* que l'aiguille rencontre les parallèles est $(2 : \pi)$, π étant le rapport de la circonférence au diamètre. M. J. Richard, en mille épreuves seulement, a trouvé pour la probabilité *a posteriori* (20 : 31), valeur qui diffère bien peu de la probabilité calculée *a priori* (**). Des expériences antérieures avaient donné des résultats analogues.

Dans son *Calcul des probabilités* (pp. 4-5), Bertrand s'est amusé à traiter une question où il y a ainsi un nombre infini de cas possibles, mais de propos délibéré sans doute, il l'a fait de manière à dérouter le lecteur. Il s'agit du problème suivant : *Quelle est la probabilité qu'une corde tracée au hasard dans un cercle est plus petite que le côté*

(*) Voir CANTOR, pp. 24-25.

(**) *Sur la philosophie des mathématiques*. Paris, Gauthier-Villars, 1903, p. 161.

du triangle équilatéral. Bertrand donne trois solutions et trois réponses absolument divergentes : $1/2$, $1/3$, $1/4$. Un des plus fins géomètres contemporains, notre associé, M. Ernest Cesàro, a montré depuis longtemps qu'il n'y avait rien d'extraordinaire dans les résultats de Bertrand. Au fond, celui-ci a traité trois problèmes distincts, et si l'on voulait faire des essais expérimentaux y relatifs, il faudrait, pour réaliser les conditions admises implicitement dans les trois solutions, trois dispositifs mécaniques différents (*).

IX.

APPLICATION A LA STATISTIQUE.

La plus belle et la plus utile application de la loi des grands nombres est incontestablement celle qu'on en a faite à la statistique entendue dans le sens le plus large de ce mot. L'importance de la statistique grandit tous les jours à notre époque, parce qu'elle permet de saisir les phénomènes actuels de l'évolution sociale par une sorte d'enregistrement presque continu.

Dans les pays civilisés, le dénombrement exact des naissances, des décès, des mariages, des délits, des crimes et d'une foule d'autres faits sociaux a permis de démêler certaines lois et d'en tirer des conséquences théoriques et pratiques.

(*) Le travail de M. Cesàro, malheureusement enfoui dans un recueil élémentaire trop peu connu, le *Periodico di matematica* (1891, janvier et février), contient d'ailleurs les vrais principes relatifs aux probabilités continues et beaucoup d'autres idées justes sur l'objet même de la présente lecture.

Les données relatives aux naissances et aux décès ont permis de calculer des tables dites de mortalité ou mieux de survie. La décroissance régulière des nombres qui y sont inscrits a permis de résumer ces tables dans des formules mathématiques dues à Gompertz et à Makeham. Les tables de survie ou les formules équivalentes sont la base des calculs des innombrables sociétés d'assurances sur la vie qui ont surgi partout et dont les plus anciennes datent de trois siècles. Les nombres inscrits dans ces tables ne sont qu'à peu près constants, ils varient sous mille influences diverses, et les calculateurs de ces sociétés, les actuaires, ont soin de *réajuster* sans cesse leurs tables pour les remettre d'accord avec la réalité. Mais ce sont là précisément les conditions d'application à coup sûr du calcul des probabilités : une loi principale, d'après laquelle certains rapports sont constants, des lois secondaires qui les font varier légèrement, souvent sans qu'on puisse s'en apercevoir qu'après des calculs laborieux. Quelles données historiques hautement intéressantes ne sont pas contenues implicitement dans ces tables de survie, en apparence si arides et si stériles! Donnons-en un exemple : En 1829, la vie moyenne en Belgique était de 31 ans et 5 mois; en 1856, de 38 ans et 1 mois; en 1890, de 45 ans et 1 mois. Mais le changement n'a pas été brusque; personne ne s'est douté que, d'année en année, chaque Belge, en moyenne, vivait quatre-vingts jours de plus; personne, sauf toutefois les actuaires, dont plusieurs, dit-on, se servent, dans leurs contrats avec les assurés, des tables de 1856, quand elles sont plus avantageuses pour les assureurs que celles de 1890.

Quetelet a remarqué que les nombres relatifs à l'âge où

l'on se marie procèdent avec plus de régularité que ceux qui se rapportent à l'âge où l'on meurt. On en a été étonné, presque scandalisé. Le mariage n'est-il pas un acte plus libre que la mort? On meurt malgré soi ; on se marie, en général, parce qu'on le veut bien. Cela est vrai. Mais pourquoi les actes libres n'obéiraient-ils à aucune loi? En réalité, la raison agit chez l'homme comme une règle. Nous sommes réunis aujourd'hui dans cette salle du Palais des Académies pour la séance annuelle de la Classe des sciences. Nous sommes venus les uns de Bruxelles, les autres de Gand, Liége, Louvain, Anvers, Malines, Gembloux, etc. On sait que les membres de l'Académie et leurs auditeurs sont gens raisonnables. On prédira donc hardiment qu'aucun des assistants à cette réunion, étranger à Bruxelles, ne retournera chez lui à pied ; et qu'aucun des Bruxellois, avant de rentrer à son *home*, n'ira faire une promenade à Waterloo. Et pourtant ne sommes-nous pas libres d'agir autrement, ne pourrions-nous pas retourner à pied ou aller relire l'*Expiation* de Victor Hugo dans la *morne plaine* où sombra la fortune de Napoléon? Mais ce serait trop absurde.

Quand les hommes agissent raisonnablement, ils se conduisent à peu près tous de même dans les mêmes circonstances. C'est pour cela que la loi des grands nombres est applicable à une foule de phénomènes sociaux où la liberté humaine intervient comme facteur principal.

Mais la constance, ou la quasi-constance du nombre des vols à main armée et des crimes, nous dira-t-on, comment allez-vous l'expliquer? Car cette constance est aussi un fait : *il est un budget*, dit Quetelet, *qu'on paie avec une régularité effrayante, c'est celui des prisons, des*

bagnes et des échafauds (p. 96). Est-ce qu'on tue, est-ce qu'on vole fatalement? Les passions sont-elles irrésistibles?

Non évidemment; mais dans de telles ou telles circonstances, tel ou tel criminel vole ou tue presque fatalement, comme l'observation le prouve; dans certains cas, il est presque impossible de résister à la tentation pour ceux qui ont l'habitude du vol et du meurtre, car, suivant le vieux dicton : *l'habitude est une seconde nature.* Les voleurs et les assassins, qui ont depuis longtemps étouffé presque complètement la voix de leur conscience, voleront et tueront probablement en 1904, comme ils ont volé et tué en 1903. Quelques-uns, il est vrai, s'amenderont à cause de leur âge ou de leur vigueur disparue, quelques-uns mourront ou seront emprisonnés et mis dans l'impossibilité de nuire. Mais d'autres sortiront de prison pour recommencer une vie criminelle; il y en a aussi qui entreront dans la carrière du vol et du meurtre après s'être fait la main en commettant avec une facilité toujours plus grande des délits de plus en plus graves.

Ainsi se recrute l'armée de ces malheureux livrés à leurs plus mauvais instincts. Ce sont ces mauvais instincts, fortifiés par des habitudes invétérées, qui agissent comme une loi, et c'est pour cela que, hélas, on peut prédire quel sera à peu près le terrible *budget du crime* dont a parlé Quetelet. Nous ajoutons avec lui que *c'est celui-là surtout qu'il faut s'attacher à réduire,* parce qu'on le doit et que l'expérience a prouvé qu'on le peut.

En résumé, l'homme qui s'abandonne à ses instincts pervers agit comme d'après une loi; l'homme qui suit les lumières de sa raison et suivant la belle pensée antique s'efforce d'être le plus homme possible, agit aussi comme

d'après une loi. Des rapports numériques à peu près constants s'observent dans certains phénomènes sociaux qui dépendent de ces deux forces adverses, l'une agissant comme force principale, l'autre comme force perturbatrice. La statistique morale, cette création originale de Quetelet, permet de constater, dans les deux cas, jusqu'à quel point l'homme a écouté la voix de sa conscience : *In der Moralstatistik*, dit M. Cantor, *ist dem Gewissen der Menschheit Gelegenheit gegeben sich zu äusseren* (p. 43).

X.

FAUSSES APPLICATIONS MATHÉMATIQUES DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

J'aborde maintenant l'examen critique de quelques applications illégitimes du calcul des probabilités et d'abord d'applications mathématiques.

Bienaymé a énoncé et a cru démontrer en 1875 (*) le théorème suivant : « Dans une série de nombres pris au hasard, il y en a à peu près un tiers plus grands que celui qui précède et que celui qui suit, un tiers plus petits, un tiers qui sont compris entre le précédent et le suivant » ; autrement dit, à peu près un tiers de maxima, un tiers de minima, un tiers de séquences. Bertrand a essayé de donner une démonstration élémentaire de ce théorème. On l'a en outre vérifié au moyen des tables de logarithmes, en ne considérant que les derniers chiffres des logarithmes des nombres ou des fonctions circulaires.

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. LXXXI, pp. 417-423.

La démonstration du théorème est inutile, parce qu'il est évident d'après le sens même attaché naturellement aux mots : *nombres choisis au hasard*. Si le théorème énoncé ne se vérifiait pas pour une série de nombres suffisamment étendue, on ne dirait pas de ces nombres qu'ils sont pris au hasard. On ne le dirait pas, par exemple, si les maxima, minima et séquences se succédaient *avec une régularité absolue* comme dans la suite

1, 3, 2; 4, 6, 5; 7, 9, 8; etc.,

parce que la notion du hasard, en calcul des probabilités, implique qu'il y a une loi, mais une loi *légèrement* troublée par des perturbations. Or, dans la suite indiquée, il y a une loi, mais il n'y a pas de perturbations.

Si, dans une suite de nombres, il y avait continuellement deux séquences après un maximum et un minimum, comme dans celle-ci,

1, 2, 3, 2; 4, 5, 6, 5; 7, 8, 9, 8; etc.,

on aurait une autre loi que celle de Bienaymé et l'on ne pourrait pas dire non plus que les nombres se suivent au hasard.

La vérification que l'on a faite au moyen des tables de logarithmes ne confirme en rien l'exactitude de la proposition de Bienaymé; on a simplement constaté que les derniers chiffres des tables se succèdent au hasard dans le sens de son théorème, disons mieux, dans le sens de sa définition du hasard.

Dans son livre : *La science et l'hypothèse* (pp. 224-226), M. Poincaré a montré, à propos d'un autre exemple mathématique, comment, en apparence, on semble appli-

quer le calcul des probabilités, tandis qu'au fond on démontre, d'abord par à-peu-près, puis rigoureusement, un théorème d'analyse. Parmi les dix mille logarithmes d'une table, dit-il en substance, j'en prends un au hasard. Quelle est la probabilité que sa troisième décimale est un nombre pair. Je n'hésite pas à répondre $^1/_2$, et, en effet, en relevant dans une table les troisièmes décimales de ces dix mille nombres, je trouve à peu près autant de chiffres pairs que de chiffres impairs; la probabilité objective est donc d'accord avec la probabilité subjective. Mais, en réalité, comme le remarque immédiatement le savant géomètre, la vérification était inutile, parce qu'on peut démontrer rigoureusement qu'il y a à peu près autant de troisièmes décimales paires que d'impaires dans les tables des valeurs de toutes les fonctions continues à dérivées premières et secondes limitées. En répondant $^1/_2$ à la question posée, il faisait, dit-il, dans son for intérieur, d'une façon plus ou moins inconsciente et imparfaite, le raisonnement qui l'a conduit à la démonstration complète du théorème, « comme un calculateur exercé qui avant d'avoir achevé une multiplication se rend compte que *cela va faire à peu près tant* ». Le théorème d'ailleurs est un théorème d'analyse, une loi absolue sans aucune perturbation à laquelle on puisse appliquer le mot de hasard.

Cournot, qui pourtant se piquait d'être philosophe, n'a pas eu autant de perspicacité que M. Poincaré, en traitant une question analogue à la précédente. Il a cru pouvoir appliquer la loi des grands nombres entendue d'une manière très particulière, à la récurrence des dix chiffres 0, 1, 2, ..., 9, dans la valeur de π exprimée au

moyen du nombre 3, suivi d'une suite illimitée de décimales (*).

Pour Cournot, les événements fortuits ou les résultats du hasard sont ceux qui sont amenés par l'action simultanée d'autres événements appartenant à des séries indépendantes. C'est une bonne définition du hasard, mais trop large pour les applications du calcul des probabilités, parce que, dans celui-ci, on est toujours forcé de supposer l'une des séries fortement *prédominante et ordonnée*, les autres ne jouant que le rôle de séries *légèrement* perturbatrices.

Cournot, en partant de cette notion du hasard, affirme *a priori* que la suite indéfinie des chiffres du nombre π doit présenter *tous les caractères d'une succession fortuite*, bien que chaque chiffre ait une valeur rigoureusement déterminée; autrement dit, il doit y avoir, dans la valeur de π, à peu près autant de 0, que de 1, 2, 3, ..., 9. Cette assertion repose sur ce qu'il n'y a nulle solidarité, nulle dépendance entre π et la base 10 de la numération décimale.

Observons tout d'abord que l'on ignore s'il n'y a aucune solidarité entre π et 10. Il y en a bien une entre π, 5 et 239, comme le prouve la célèbre formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 + \cdots\right]$$

$$- \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{239}\right)^7 + \cdots\right].$$

(*) Voir LECHALAS, *Le hasard.* (REVUE NÉOSCOLASTIQUE, 1903, pp. 148-164.)

Ensuite, n'y eût-il aucune solidarité entre π et 10, comment pourrait-on déduire de là que, dans l'expression de π, le nombre des 3 et celui des 4 est à peu près le même? Sur un nombre donné de décimales, un million par exemple, il y a un nombre déterminé de 3, un nombre déterminé de 4; personne n'a prouvé que le rapport de ces deux nombres tende vers l'unité ou vers une autre limite quelconque quand le nombre des décimales croît. Mais eût-on prouvé complètement l'assertion de Cournot, on ne pourrait nullement dire qu'elle est une conséquence de la loi des grands nombres ou d'aucun théorème du calcul des probabilités. C'est une proposition d'analyse, vraie ou fausse, comme la remarque de M. Poincaré sur la troisième décimale des logarithmes. Au fond, Cournot attribue au hasard un rôle régulateur, tandis qu'*en calcul des probabilités, le hasard est, par définition, un perturbateur des lois et des règles.*

XI.

L'ARGUMENT ÉPICURIEN CONTRE LES CAUSES FINALES.

L'erreur la plus ancienne relative au calcul des probabilités est sans doute celle qui est contenue dans l'argument épicurien contre les causes finales. On trouve cet argument dans le *De natura rerum*, ce poème étrange où Lucrèce, le poète pessimiste de la fin de la république, a exposé avec une si naïve ignorance la science arriérée d'Épicure, sans se douter et sans se soucier des immortelles découvertes faites dans l'intervalle par Aristarque de Samos, Archimède, Ératosthènes, Hipparque.

Nam certe neque consilio primordia rerum
Ordine se suo quaeque sagaci menti locarunt

Nec quos quaeque darent motus pepigere profecto,
Sed quia multa modis multis mutata per omne
Ex infinito vexantur percita plagis,
Omne genus motus et coetus experiundo,
Tandem deveniunt in talis disposituras,
Qualibus haec rerum constitit summa creata.

« Assurément ce n'est pas à dessein ni par une pensée intelligente que les éléments des choses se sont arrangés chacun à leur place; ils n'ont pas concerté d'avance les mouvements de chacun d'eux. Mais nombreux, changeant de mille manières, partout et toujours, frappés et détournés par des chocs, essayant toute sorte de mouvements et d'assemblages, ils arrivent enfin à cet arrangement des choses qui constitue notre univers (*). »

C'est dans les mots *omne genus motus et coetus experiundo*, « en essayant toute sorte de mouvements et d'assemblages », que se trouve le postulat de Lucrèce, postulat qu'ont admis d'ailleurs, consciemment ou non, beaucoup de ceux qui ont écrit contre l'argument épicurien; tous, sans s'en douter, ont en réalité confondu probabilité subjective et probabilité objective. Comme c'est une erreur très commune, expliquons de nouveau la différence entre les deux espèces de probabilités en l'appliquant à la question de l'argument épicurien.

La probabilité objective d'amener un 4 ou un 5 avec un dé est $^1/_6$, si sur 600, 6 000 coups, 4 ou 5 arrive à peu près 100 fois, 1 000 fois, etc.; elle est $^1/_2$, au contraire, si le dé est pipé et n'amène que 4 ou 5, d'ailleurs avec une égale facilité. Mais dans les deux cas, pour qui a

(*) Texte de la petite édition de Bernays (Leipzig, Teubner, 1874), I, v. 1021-1028; ancienne traduction un peu retouchée.

vu simplement le dé, s'il le croit homogène, ou pour qui ne l'a jeté qu'une seule fois, la probabilité subjective est $^1/_6$.

Si les lettres du premier vers de l'Iliade ou, si vous le voulez, de l'Iliade entière peuvent former n arrangements différents, — mettons un trillion, mais c'est beaucoup trop peu, — l'un d'eux sera, par hypothèse, le poème attribué à Homère. On pourra dire que la probabilité de l'arrivée du poème, quand on arrange toutes les lettres à la suite les unes des autres sans les voir, est un trillionième dans deux sens encore. Dans le sens subjectif, cela signifie simplement que l'Iliade est l'un des arrangements que l'on peut imaginer fait avec ces lettres. Dans le sens objectif, cela veut dire que *les arrangements de ces lettres se font d'après des lois* telles que sur p fois n arrangements (mettons sur un dodécillion) l'Iliade se présente environ p fois (soit un octillion de fois); p est supposé un nombre très grand par rapport à n, comme ici un octillion par rapport à un trillion.

Regardons maintenant le monde actuel depuis que l'on a cru y voir des marques de dessein comme une Iliade immense dont les derniers éléments peuvent former N arrangements. La probabilité subjective de l'arrivée du monde actuel sera $\frac{1}{N}$, car cet arrangement existant est un des N possibles. Mais il serait absurde d'admettre que la probabilité objective est aussi $\frac{1}{N}$, car ce serait supposer les derniers éléments des corps soumis à des lois telles que, sur PN arrangements, elles forcent ces éléments à passer à peu près P fois par chacun des N arrangements imaginables, P étant très grand par rapport à N. Dans

cette hypothèse et dans cette hypothèse seulement, on pourrait admettre le postulat puéril de Lucrèce et d'Épicure : *en essayant toute sorte de mouvements et d'assemblages, les éléments arrivent enfin à cet arrangement des choses qui constitue notre univers.*

Mais qui pourrait établir l'existence des lois dont il vient d'être question? La loi de la dissémination de l'énergie tend au contraire à prouver que l'univers, loin de repasser périodiquement par les mêmes états, marche vers un état final définitif.

L'argument épicurien est donc sans aucune valeur.

XII.

DE LA PROBABILITÉ DES CAUSES ET DES ÉVÉNEMENTS FUTURS TIRÉE DES ÉVÉNEMENTS OBSERVÉS.

« Bayes, dans les *Transactions philosophiques* de 1763, dit Laplace, a cherché directement la probabilité que les possibilités indiquées par des expériences déjà faites sont comprises entre des limites données; il y est parvenu d'une manière très fine et très ingénieuse, quoiqu'un peu embarrassée. Cet objet se rattache à la théorie de la probabilité des causes et des événements futurs, conclue des événements observés; théorie dont j'exposai quelques années après les principes, avec la remarque de l'influence des inégalités qui peuvent exister entre les chances que l'on suppose égales (p. CXXXVII). »

Laplace, contre son habitude, est ici trop modeste; car les mémoires posthumes de Bayes, publiés en 1764

et 1765, ne contiennent les principes relatifs à la matière que sous forme très imparfaite. C'est Laplace lui-même qui a établi, au moyen des principes antérieurement connus, les deux théorèmes fondamentaux sur la probabilité des causes et des événements futurs, tirée des événements observés.

Au premier abord, ces deux théorèmes semblent pleins de promesses; ne contiennent-ils pas toute la méthode de la philosophie naturelle : trouver les causes probables des événements observés, prédire les événements futurs, que veut-on de plus? Il faut bien en rabattre, hélas, parce que les théorèmes de Laplace présupposent la connaissance *a priori* de toutes les causes qui ont pu donner naissance aux événements observés, et de la probabilité, *a priori* aussi, de l'arrivée de ces événements dans l'hypothèse de l'action de chacune de ces causes. Peut-on trouver un seul cas pratique où ces hypothèses soient vérifiées? Nous en doutons fort.

Aussi toutes les applications connues des principes de Bayes et Laplace à l'étude de la nature n'ont-elles qu'une valeur subjective, comme Bertrand et M. Poincaré l'ont fait remarquer avec beaucoup de force dans leurs ouvrages sur le *Calcul des probabilités*. Ceux qui ont calculé la probabilité de certaines causes en oubliant les conditions d'existence des théorèmes fondamentaux sont arrivés à des résultats démentis par les faits. Laplace, par exemple, à une époque où l'on avait constaté quarante-trois mouvements directs dans les révolutions et les rotations des corps du système solaire, disait que l'on peut parier plus de quatre milliards contre un, qu'une cause générale a déterminé le sens de tous ces mouvements (pp. LX-LXI).

On pouvait donc prédire à coup sûr qu'il n'y a pas de mouvements rétrogrades dans le système solaire, et cependant il y en a.

Veut-on une application plus familière qui montre le caractère subjectif de cette théorie? Je l'emprunte à M. Poincaré (*). A l'écarté, votre adversaire donne et tourne le roi; quelle est la probabilité que ce soit un grec? Dans l'ignorance où l'on est de l'honnêteté de son adversaire, on suppose que cette probabilité *a priori* est $^1/_2$. Alors la probabilité *a posteriori*, déduite de l'arrivée du roi, serait $^8/_9$. Elle serait donc énorme. Si l'on suppose que la probabilité *a priori* est $^1/_9$, la probabilité *a posteriori* est $^1/_2$. Avant l'arrivée du roi, on pouvait donc parier 8 contre 1 que l'adversaire n'était pas un tricheur; après, seulement 1 contre 1. Évidemment, des conclusions aussi étranges sont purement subjectives.

La conséquence la plus grave en apparence de ce qui précède est la suivante. On expose d'ordinaire la méthode des moindres carrés, en la fondant sur la loi des erreurs accidentelles de Gauss et sur la règle de Bayes ou sur la considération équivalente des probabilités relatives. Il semble donc au premier abord que la méthode des moindres carrés elle-même n'ait plus de portée objective.

Heureusement, il n'en est rien. On n'est pas forcé de baser la méthode des moindres carrés, ni la théorie des moyennes, qui en est un cas particulier, sur la théorie de

---

*) *Calcul des Probabilités*, p. 134.

la probabilité des causes. Comme l'a montré Quetelet, le groupement, suivant la loi exponentielle ou binomiale de Laplace et de Gauss, des valeurs dont on cherche la moyenne est, dans un grand nombre de recherches de physique sociale, un fait contre lequel les critiques subjectives ne peuvent rien. La méthode des moindres carrés peut s'exposer d'une manière purement algébrique, en utilisant les beaux travaux analytiques de MM. Glaisher et Van Geer. On est ainsi d'ailleurs dans la tradition de Legendre, et même de Gauss dans ses leçons, c'est-à-dire des inventeurs de la méthode.

De même, si la règle de Bayes ne peut rien apprendre de sérieux, d'objectif sur l'existence d'une cause du mouvement des planètes dans le sens direct, ou sur d'autres lois naturelles, cela ne prouve pas la non-existence de cette cause ou de ces lois; cela ne prouve pas qu'un autre principe du calcul des probabilités ne puisse nous donner des lumières sur des questions de ce genre, comme nous le dirons tantôt.

XIII.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS AUX DÉCISIONS JUDICIAIRES.

« L'application du calcul des probabilités aux décisions judiciaires est, dit Stuart Mill, le scandale des mathématiques. L'accusation est injuste. On peut peser du cuivre et le donner pour or, la balance est sans reproche. Dans leurs travaux sur la théorie des jugements,

Condorcet, Laplace, Poisson » et Cournot « n'ont pesé que du cuivre (*). »

Ces paroles de Bertrand excusent les mathématiques, mais elles n'excusent pas les mathématiciens — dont deux illustres et même l'un, Laplace, très illustre — d'avoir tenté de soumettre au calcul des probabilités des événements qu'il est évidemment impossible de ranger sous une loi, si peu strictement approximative qu'on la suppose. Au moins avons-nous cette consolation que c'est un mathématicien aussi, Bertrand lui-même, qui a définitivement banni des traités ce chapitre humiliant sur la probabilité des jugements.

L'erreur fondamentale de Condorcet, de Laplace, de Poisson et de Cournot, c'est d'assimiler un jugement au tirage de boules d'une urne qui en contient des blanches et des noires; l'un suppose que la composition de l'urne est constante pour tous les procès et qu'elle est la même pour tous les juges ; un autre fait varier la composition de l'urne d'un procès à l'autre; un troisième donne une urne plus riche en boules blanches au juge plus intègre ou plus perspicace.

Mais à tous leurs systèmes, on peut faire une objection sans réplique possible. « L'indépendance des tirages est supposée; les urnes, dans les calculs, échappent à toute influence commune. Les juges, au contraire, s'éclairent les uns les autres, les mêmes faits les instruisent, les mêmes témoignages les troublent, la même éloquence les égare, c'est sur les mêmes considérants qu'ils font reposer

---

(*) BERTRAND, p. XLIII.

la vérité ou l'erreur. L'assimilation est impossible (*). »

Frappons-nous donc la poitrine, nous autres mathématiciens, et pour ne plus retomber dans de pareilles aberrations, relisons la page où Pascal a indiqué si bien, quoique avec quelque exagération, selon son habitude, « la différence entre l'esprit de géométrie et l'esprit de finesse ». On peut d'autant plus le croire qu'il a été, lui aussi, une victime de l'esprit mathématique appliqué à la psychologie et à l'apologétique.

« En l'un, dit Pascal, les principes sont palpables, mais éloignés de l'usage commun ; de sorte qu'on a peine à tourner la tête de ce côté-là, manque d'habitude. »

« Mais dans l'esprit de finesse, les principes sont dans l'usage commun et devant les yeux de tout le monde. On n'a que faire de tourner la tête ni de se faire violence. Il n'est question que d'avoir bonne vue, mais il faut l'avoir bonne; car les principes sont si déliés et en si grand nombre, qu'il est presque impossible qu'il n'en échappe. Or l'omission d'un seul principe mène à l'erreur. »

« Ce qui fait donc que de certains esprits fins ne sont pas géomètres, c'est qu'ils ne peuvent du tout se tourner vers les principes de géométrie; mais ce qui fait que des géomètres ne sont pas fins, c'est qu'ils ne voient pas ce qui est devant eux et qu'étant accoutumés aux principes nets et grossiers de géométrie, et à ne raisonner qu'après avoir bien vu et manié leurs principes, ils se perdent dans les choses de finesse, où les principes ne se laissent pas ainsi manier. On les voit à peine, on les sent plutôt

---

(*) BERTRAND, p. XLV.

qu'on ne les voit ; on a des peines infinies à les faire sentir à ceux qui ne les sentent pas d'eux-mêmes ; ce sont choses tellement délicates et si nombreuses, qu'il faut un sens bien délicat et bien net pour les sentir, et juger droit et juste selon ce sentiment, sans pouvoir le plus souvent les démontrer, parce qu'on n'en possède pas ainsi les principes, et que ce serait une chose infinie de l'entreprendre. Il faut tout d'un coup voir la chose d'un seul regard, et non par progrès de raisonnement, au moins jusqu'à un certain degré. Et ainsi il est rare que les géomètres soient fins, et que les fins soient géomètres, à cause que les géomètres veulent traiter géométriquement ces choses fines, et se rendent ridicules, voulant commencer par les définitions, et ensuite par les principes, ce qui n'est pas la manière d'agir en cette sorte de raisonnement. Ce n'est pas que l'esprit ne le fasse ; mais il le fait tacitement, naturellement et sans art, car l'expression en passe tous les hommes et le sentiment n'en appartient qu'à peu d'hommes (*). »

XIV.

LE PRINCIPE DE L'ACCUMULATION DES PROBABILITÉS INDÉPENDANTES DE NEWMAN.

Les principes fondamentaux du calcul des probabilités sont peu nombreux : celui des probabilités totales et des probabilités composées, dus à Fermat (1654) ; le théo-

(*) *Pensées*, édition Didiot (Lille, Desclée, 1896), pp. 59-60. Cette édition, selon nous, est la seule bonne au point de vue philosophique et théologique.

rème de Bernoulli (1713) et la loi des grands nombres de Poisson (1837); les règles de Bayes et de Laplace (1764, 1774) sur les probabilités des causes et des événements futurs. Un dernier *principe* est celui *de l'accumulation des probabilités indépendantes*, entrevu maintes fois dans le passé, mais qui n'a été mis en pleine lumière qu'en 1858, dans la *Grammar of Assent* (*) par J.-H. Newman, plus tard le cardinal Newman, l'un des plus subtils et des plus profonds penseurs de l'Angleterre au XIX^e^ siècle.

Pour exposer ce principe, je prends comme guide Newman lui-même, en m'aidant çà et là des spéculations semblables aux siennes, dues à M. Ernest Naville, le savant auteur de la *Logique de l'hypothèse*.

La déduction logique explicite, dit Newman (pp. 288-301, *passim*), n'est pas ce qui nous donne la certitude *dans le domaine des faits concrets*. Nous y arrivons, au contraire, par une accumulation de probabilités, indépendantes entre elles (**), surgissant de la nature et des circonstances du fait examiné; probabilités trop faibles pour agir chacune isolément sur notre esprit, trop fines, trop détournées pour être mises explicitement en syllogismes; trop nombreuses et trop variées d'ailleurs pour être ainsi transformées. Ces probabilités ne s'additionnent

---

(*) Nous nous servons de la cinquième édition : London, Longmans, Green and Co, 1883; mais nous ne la citons pas textuellement, la perfection de la prose de Newman la rendant souvent intraduisible.

(**) Elles sont *objectivement indépendantes*, hétérogènes, si j'ose ainsi dire (voir l'exemple du juge au paragraphe suivant); subjectivement, on pourrait, au contraire, les dire *interdépendantes*, puisqu'elles réagissent les unes sur les autres dans notre esprit.

pas brutalement, elles agissent et réagissent les unes sur les autres, se corrigent ou se confirment de manière à conduire l'esprit à l'assentiment complet, sans qu'il soit pleinement conscient du chemin suivi. Cet assentiment est personnel, même lorsqu'il existe pour un même fait concret chez un grand nombre de personnes, parce que les probabilités accumulées ne sont pas vues par tous distinctement chacune à part, et qu'elles varient en nombre et en poids suivant les divers intellects : *Omne quod recipitur in aliquo, recipitur ad modum recipientis.* Ce qui est une preuve pour un esprit ne l'est pas pour un autre, qui ne parvient pas à l'examiner sous le même angle. Comme l'a dit Pascal, « dans les choses de finesse, on a des peines infinies à les faire sentir (les principes) à ceux qui ne les sentent pas par eux-mêmes ».

Prenons maintenant, avec Newman, des exemples de preuve implicite basée sur une accumulation de probabilités indépendantes.

« Nous sommes tous certains, dit-il, sans aucune possibilité de doute, que l'Angleterre est une île. C'est là une proposition à laquelle nous donnons un assentiment complet ! Il n'existe rien qui soit plus sûr et nous ferions volontiers dépendre nos plus chers intérêts de la vérité de ce fait que nous vivons dans une île. Nous ne craignons pas qu'aucune découverte vienne jamais ébranler notre croyance, et il nous serait impossible de regarder comme sérieuse l'assertion de celui qui nous dirait que l'Angleterre est rattachée au continent du côté de la Norvège ou de la France. Et cependant les arguments que nous pou-

vons faire valoir pour expliquer notre conviction sur ce point sont-ils en rapport avec l'extrême certitude que nous en avons? On nous a dit dans notre enfance que l'Angleterre est une île; elle est entourée par la mer sur toutes les cartes; jamais la chose n'a été mise en question devant nous; au contraire, nous avons toujours entendu dire, tous les livres que nous avons lus admettent que l'Angleterre est une île; toute notre histoire nationale, toute notre vie commerciale, sociale et politique le suppose. Mais nous n'en avons pas de preuve directe comme celui qui aurait fait le tour de l'Angleterre; et nous n'avons peut-être même jamais rencontré quelqu'un qui l'ait fait. Est-ce à dire que notre conviction n'est pas raisonnable? Nullement. Mais il est certain que nous ne pouvons que difficilement analyser d'une manière complète les raisons de notre assentiment. »

Ce que Newman dit ici à propos de l'Angleterre s'étend à la science géographique tout entière : « Que peut-on connaître par soi-même, dit M. Naville? Les chemins que l'on a parcourus et les horizons que l'on a embrassés du regard : cela est toujours bien peu. Ce que les plus grands voyageurs ont pu percevoir directement ne formerait qu'une ligne peu visible sur un globe de très grande dimension (*). » Et cependant tout le monde

---

(*) *L'importance logique du témoignage,* p. 5 du tirage à part. Voici une autre remarque très juste du même (pp. 4-5) : « Les choses que nous percevons nous-mêmes n'ont leur sens et leur portée que par l'adjonction d'idées empruntées au témoignage. Un jour, à Paris, j'ai vu sur le quai qui longe les Tuileries l'empereur Napoléon III

croit à la géographie, non seulement les savants chez qui existe le sens critique, mais les jeunes gens de nos collèges chez qui il n'est pas éveillé encore. Tous, consciemment ou non, admettent et appliquent le principe de l'accumulation des probabilités indépendantes, agissant et réagissant les unes sur les autres, de manière à produire la plus complète certitude.

Ce que nous venons de dire pour le présent, pour la géographie, nous pouvons le dire pour le passé, pour l'histoire. Toute l'histoire repose sur les témoignages de nos devanciers. A la rigueur, je puis aller voir si l'Angleterre est vraiment une île, mais il m'est impossible d'assister à la bataille de Salamine; je ne puis pas entendre, comme Eschyle, *la clameur immense*, — *modulée comme un chant sacré*, — *qui s'élève dans les rangs des Grecs*, — ni *l'écho des rochers de l'île* près de laquelle se livrait en ce moment une des batailles

---

passer dans un cabriolet qu'il conduisait lui-même. Voilà un fait que j'ai constaté par moi-même; nous réduisons ce fait aux éléments des perceptions personnelles séparées des idées qui proviennent d'une autre source. J'ai vu un grand bâtiment; comment savais-je que ce bâtiment se nommait les Tuileries et qu'il était la résidence du souverain de la France? Par le témoignage des autres. J'ai vu un homme passer; comment savais-je que cet homme s'appelait Napoléon III et qu'il était l'empereur des Français? Par le témoignage. Si je réduis le fait aux données de mes perceptions personnelles, voici ce qui reste : J'ai vu, près d'un grand bâtiment, un homme qui conduisait un cabriolet, rien de plus. *Les faits qui se passent sous nos yeux n'ont leur sens et leur valeur que par l'intervention d'idées que nous devons aux affirmations de nos semblables.* »

décisives de la civilisation contre la barbarie. Ce que je dis de Salamine, je le dis aussi de la victoire de Scipion à Zama, de celle de Charles Martel à Poitiers, de la défaite de Napoléon à Waterloo. Nous ne doutons de la réalité d'aucun de ces grands faits de l'histoire; leur retentissement dans la vie de l'humanité a été si profond qu'en supprimer un seul ce serait rendre incompréhensible l'ensemble de ses annales et le présent lui-même. Mais quel tissu subtil de probabilités ne faudrait-il pas exposer à quelque habitant d'une autre planète tombé soudain parmi nous pour lui transmettre nos convictions! S'il avait lu Laplace quelque part là-haut, dans la planète Mars ou dans Jupiter, ne nous opposerait-il pas ce célèbre passage : « L'action du temps affaiblit sans cesse la probabilité des faits historiques, comme elle altère les monuments les plus durables. On peut, à la vérité, la ralentir en multipliant et conservant les témoignages et les monuments qui les étayent. Malgré les avantages infinis que procure l'imprimerie, les révolutions physiques et morales dont la surface de ce globe sera toujours agitée finiront, en se joignant à l'effet inévitable du temps, par rendre douteux, après des milliers d'années, les faits historiques les plus certains (p. LXXXII). » Que pourrions-nous répondre à ce Martien ou Jovien qui applique ici de travers, avec Laplace, le principe des probabilités composées? Nous ne pourrions lui donner évidemment notre connaissance actuelle de la solidarité, des connexions nécessaires de toutes les périodes de l'histoire. Nous serions réduits à lui dire avec Pascal que « les géomètres qui ne sont que géomètres ont l'esprit droit, mais pourvu qu'on leur explique bien toutes choses par

définitions et par principes »; qu' « autrement ils sont faux et insupportables, car ils ne sont droits que sur les principes éclaircis » (*Pensées*, éd. Didiot, p. 60); puis nous devrions attendre patiemment qu'il apprenne à connaître le principe de l'accumulation des probabilités indépendantes, ou plutôt qu'il apprenne à s'en servir.

Mais d'où vient la force probante de ce principe? comment peut-il engendrer la certitude, même si chacune des probabilités considérées est très petite, pourvu qu'elles soient nombreuses? Au fond, comme Newman le dit plusieurs fois, et comme nous l'insinuons déjà plus haut, c'est la *méthode de réduction à l'absurde*, si puissante en métaphysique et dans les hautes mathématiques, qui, appliquée ici à l'ordre concret, constitue la partie principale, l'essence de ces raisonnements implicites, de ces rapides intuitions de l'esprit. Supposez que l'Angleterre ne soit pas une île, que Napoléon ait été vainqueur à Waterloo, et vous ne comprenez plus rien à l'histoire ni à la géographie contemporaines : vous êtes acculés à l'absurde ou au moins à l'inexplicable (*). En réalité, l'axiome rationnel qui est à la base de la démonstration de la loi des grands nombres est donc aussi le fondement du principe de l'accumulation des probabilités indépendantes : *le contraire d'un événement très improbable, est extrêmement probable* ou *pratiquement certain*.

(*) Notez que c'est le grand nombre de probabilités militant en faveur de la proposition à établir et non l'*autorité* des témoignages, qui permet d'employer la méthode de réduction à l'absurde. C'est d'ailleurs aussi au moyen de l'accumulation des probabilités que l'on parvient à établir l'autorité des témoignages et des témoins.

Analytiquement, le principe de Newman peut se traduire à peu près par la formule

$$P = 1 - \varphi(n)(1 - p_1)(1 - p_2)\ldots(1 - p_n),$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont les probabilités accumulées; $\varphi(n)$ une fonction de n, décroissante de 1 à 0, quand n croît de 1 à ∞, et exprimant l'interdépendance subjective des probabilités $p_1, \ldots, p_n$; pour n croissant, la probabilité cherchée P tend vers l'unité (*).

XV.

APPLICATIONS DIVERSES DU PRINCIPE DE NEWMAN.

Les applications du principe de Newman sont infinies dans le domaine de la vie pratique comme dans celui des sciences historiques et naturelles.

Un juge instruit un procès criminel où il y a eu vol avec effraction et meurtre; il se forme peu à peu une conviction de plus en plus nette de la culpabilité du

---

(*) Philosophiquement parlant, il faut évidemment distinguer la certitude pratique de la certitude logique que nous avons de certaines propositions : *la suite des nombres premiers est illimitée. aucun polyèdre n'a sept arêtes,* etc. Mais en fait, nous donnons souvent un assentiment aussi complet à des propositions de l'ordre concret pratiquement certaines (*l'Angleterre est une île, Napoléon a été vaincu à Waterloo*) qu'aux propositions mathématiques que nous venons de citer. *Correlation between certitude and implicit proof seems to me a law of our minds,* dit Newman (p. 301). Comparez De Smedt, S. J., *Principes de la critique historique*, Paris, 1883, chap. IV surtout pp. 63, 68-69, 71, où l'auteur expose et défend très bien le principe de l'accumulation des probabilités indépendantes appliqué à l'histoire.

prévenu par accumulation de probabilités déduites d'indices souvent bien faibles, quand on les considère isolément : traces de pas, blessures récentes constatées chez le prévenu, trouble à sa première rencontre avec la justice, explications embarrassées, contradictions, impossibilité pour lui de prouver son alibi, ou alibi trop visiblement préparé d'avance, dépositions variées de témoins à charge et à décharge, antécédents de l'accusé, dépenses inusitées après le crime, etc., etc.

Un clinicien expérimenté procède de même avant de donner son diagnostic dans un cas difficile.

Il en est ainsi encore dans les sciences de la nature en général. Nous avons parlé plus haut de l'application illégitime que Laplace a faite de la théorie de la probabilité des causes à la question du mouvement direct des corps du système solaire. Mais si son raisonnement est sans force probante, cela n'entraîne pas la fausseté de sa conclusion ; il y a très probablement une cause unique du sens direct de presque tous ces mouvements. Quand on lit la suite de son texte, on voit que la conviction de Laplace ne provient pas de la règle dite de Bayes, mais de la connexion de la question agitée par lui avec sa célèbre hypothèse de la nébuleuse primitive. Or, cette hypothèse, il l'appuie, comme on le sait, sur presque tous les faits de la mécanique et de la physique du ciel ; chacun d'eux ne donne qu'une probabilité très faible à l'hypothèse ; mais leur ensemble a un grand poids, et il n'a fait qu'augmenter depuis la découverte de plus de cinq cents petites planètes et depuis que l'analyse spectrale nous a révélé la composition chimique des soleils et des nébuleuses.

Tous les savants, astronomes, physiciens, chimistes,

géologues, biologistes, botanistes, zoologistes, font nécessairement usage du principe de l'accumulation des probabilités indépendantes, chaque fois qu'ils s'appuient sur le témoignage ou la science d'autrui. Or, qui n'est forcé de le faire, même les mathématiciens ? « Toute la suite des hommes, dit Pascal, doit être considérée comme un même homme, qui subsiste toujours et qui apprend continuellement (*). »

Un biologiste emploie le microscope et recourt à des réactifs divers pour étudier les mystères de l'organisation et du développement des cellules; il croit forcément à la théorie des lentilles et, par suite, à l'optique et à la physique tout entière; il admet la pureté de ses réactifs, ce qui implique de proche en proche toute la chimie. Il en est de même de l'astronome qui observe le spectre du soleil. Au fond, l'un et l'autre croient à la physique et à la chimie comme nous autres profanes, nous croyons que l'Angleterre est une île. Cette croyance, légitime d'ailleurs, bien que difficile à justifier en détail, repose sur des témoignages, c'est-à-dire sur des probabilités accumulées. Mais il y a plus, il en est de même de chaque savant dans sa propre science; le physicien, par exemple, ne peut faire une recherche originale sans accepter préalablement les résultats établis par ses prédécesseurs, car il ne peut refaire à lui seul des expériences qui ont coûté des siècles. En mathématiques, les analystes purs admettent sur le témoignage des géomètres, dans le sens strict du mot, les propriétés des surfaces du troisième ordre ou les résultats de la théorie générale des surfaces; inversement, les géomètres s'en rapportent aux analystes

(*) Pascal, éd. Didiot, p. 291.

touchant la vérité de théories difficiles comme celle des nombres algébriques, des substitutions ou des fonctions abéliennes : ils pourraient aller voir dans les terribles in-quarto de Kronecker, de Jordan et de Weierstrass si les démonstrations des analystes sont bonnes, comme nous pourrions, en cas de nécessité absolue, aller voir si l'Angleterre est une île; mais chacun a autre chose à faire dans son propre domaine et préfère se fier au témoignage des gens dont il a reconnu la compétence.

L'histoire de la science, l'histoire de la naissance, du progrès et de la décadence des systèmes scientifiques s'explique et s'éclaire souvent à la lumière du principe de l'accumulation des probabilités indépendantes. Il y a vingt-trois siècles, le génie peut-être le plus systématique et le plus réaliste qui fut jamais, Aristote, fait une synthèse de toutes les connaissances de son temps, sur Dieu, l'homme, la nature vivante, le ciel et la terre, en ne laissant de côté que les mathématiques pures. Il relie des milliers de faits au moyen de quelques idées fondamentales, matière, forme, forme substantielle, puissance, acte, finalité, accident, substance; il les enchaîne, ou les explique, comme on dit, au moyen de quelques principes, point d'arrivée ou point de départ : Dieu est acte pur; ce qui passe de la puissance à l'acte, le fait sous l'influence de ce qui est en acte; le mouvement centripète ou centrifuge caractérise les quatre éléments de la physique terrestre, le mouvement circulaire, le cinquième élément et la physique céleste, etc. Le tissu des faits réels et des hypothèses qui les relie est si serré, le système total repose sur un nombre si grand de probabilités accumulées que, pendant plus de deux mille ans, il est considéré comme la vérité même, à l'égal des *Éléments*

d'Euclide, pour l'arithmétique et la géométrie. Aussi, quand Galilée renverse la barrière qui sépare la physique céleste (*) de la physique terrestre et transforme celle-ci en y introduisant le principe de l'inertie, avec quelle peine ne triomphe-t-il pas de l'amas des probabilités anciennes qui plaidaient en faveur de celle d'Aristote ! Il ne réussit que peu à peu, en accumulant à son tour des faits et des probabilités en faveur des vues nouvelles. Il en est de même quand Lavoisier fait la révolution chimique, quand Ampère, Faraday, Fresnel, Carnot, Mayer, Clausius, Helmholtz, Plateau, lord Kelvin, Maxwell, Hertz, tous les voyants de la physique au XIX^e^ siècle, remplacent les vérités incomplètes de leurs devanciers par des lumières plus vives. Les nouveaux systèmes ne parviennent pas tout de suite à s'annexer et à s'approprier toutes les probabilités accumulées qui semblent militer exclusivement en faveur des anciens systèmes. Il en est ainsi pour toutes les sciences de la nature.

Dans l'histoire de la pensée humaine, il y a des livres immortels qui ont une influence finalement prépondérante, la *Métaphysique* d'Aristote, les *Éléments* d'Euclide, la *Somme* de S. Thomas d'Aquin, les *Principes* de Newton. Mais d'autres écrits d'une forme dialectique

(*) Nous faisons allusion à ses découvertes des taches du Soleil, des montagnes de la Lune, qui prouvaient que les astres, comme la terre, étaient soumis au changement; non à sa querelle philosophico-théologique avec les congrégations romaines où ni lui, ni ses adversaires n'avaient de preuves en faveur de leurs vues subjectives contraires. Le système astronomique d'Aristote avait d'ailleurs été abandonné dès l'antiquité.

moins dominatrice, mais pleins de faits accumulés d'observation interne ou externe, sans rigueur de déduction apparente, ont eu de tout temps une influence plus immédiate, plus étendue, sinon plus profonde. J'en citerai trois, bien différents sous tous les rapports : l'*Imitation de Jésus-Christ*, cette fleur suprême du moyen âge ; les *Pensées* de Pascal, ce singulier mélange d'apologétique vraiment chrétienne, de jansénisme impitoyable et de psychologie outrancière ; enfin l'*Origin of species* de Darwin, où sous mille formes se retrouvent des vues contraires au principe aristotélicien sur le passage de la puissance à l'acte. Ouvrez-les au hasard, vous y rencontrerez à toutes les pages des pensées, des remarques, des inductions, des faits qui vous paraîtront plus ou moins vraisemblables suivant votre degré de culture et de réceptivité, mais dont l'ensemble exercera sur vous, si vous les fréquentez beaucoup, une action singulièrement pénétrante. C'est qu'au fond, Thomas a Kempis, Pascal et Darwin y répètent sans cesse chacun une seule et même pensée, sans se lasser jamais, parce qu'ils sont convaincus : *le joug du Seigneur est doux et léger — le christianisme est transcendant, mais* (c'est ici la note janséniste) *il est dur — le monde organique est dans un perpétuel devenir ;* ils conquièrent ou essaient de conquérir l'esprit, le cœur, l'âme entière du lecteur par une accumulation de probabilités convergeant toutes vers un même but (*).

(*) N'est-ce pas d'une manière analogue, n'est-ce pas à cause de leur profond réalisme, dans le sens plein du mot, que, dans le domaine de la fiction, ces livres immortels aussi, l'*Iliade*, la *Divine Comédie*, les drames de Shakespeare, le *Faust* de Goethe ont une influence si durable et si profonde sur l'humanité cultivée?

XVI.

Conclusion.

Mais il est temps de conclure cette étude, où nous nous sommes peut-être laissé trop entraîner dans des chemins de traverse, et de résumer en quelques lignes nos conclusions sur la portée objective du calcul des probabilités.

Le principe fondamental est celui-ci : Entre deux propositions contraires, l'une peu probable, l'autre très probable, l'esprit humain choisit la seconde, *librement, mais presque invinciblement,* et la déclare pratiquement certaine.

On déduit de là la légitimité logique de la loi des grands nombres et du principe de l'accumulation des probabilités indépendantes.

La loi des grands nombres s'applique d'abord à la question de la ruine du joueur et à ses conséquences, ensuite à la statistique chaque fois qu'elle rencontre des rapports à peu près constants dans les nombres qu'elle rassemble.

Le principe de l'accumulation des probabilités indépendantes est *pratiquement, sinon métaphysiquement,* la source de nos certitudes dans les sciences naturelles et historiques qui reposent en dernière analyse sur le témoignage, chaque fois que nous ne sommes pas personnellement inventeur ou témoin.

La loi des grands nombres et le principe de l'accumulation des probabilités indépendantes impriment fortement dans nos esprits la croyance à l'existence des lois naturelles, et ne laissent à ce que l'on appelle le

hasard que le rôle d'une cause inconnue légèrement perturbatrice.

Notre conclusion suprême, où nous laissons presque complètement la parole à Quetelet (p. 102), est donc celle-ci :

« Le hasard, ce mot mystérieux dont on a tant abusé, ne doit être regardé que comme servant à couvrir notre ignorance; c'est un fantôme qui exerce l'empire le plus absolu sur le vulgaire habitué à ne considérer les faits qu'isolément, mais qui s'évanouit devant le philosophe dont l'œil embrasse une longue suite d'événements et dont la pénétration ne saurait être mise en défaut par des écarts qui disparaissent à ses yeux quand il sait se placer assez haut pour saisir les lois de la nature; il n'est pas en notre pouvoir de les changer; mais il est de notre dignité de chercher à les saisir au milieu des anomalies sans nombre qu'elles semblent présenter », car « ces lois sont éternelles (*) comme l'intelligence dont elles découlent », Dieu. Pour lui, *rien n'est incertain et l'avenir comme le passé est présent à ses yeux*, suivant la belle parole de Laplace.

(*) Un métaphysicien aurait dit, je crois, *en restant dans l'intelligence dont elles découlent*.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
I. Doutes sur la portée objective du calcul des probabilités .	3
II. Pascal et Fermat. La théorie des jeux.	8
III. Un cas où la probabilité devient presque une certitude . .	12
IV. Le théorème de Bernoulli et la loi des grands nombres.	15
V. La ruine du joueur. La guerre.	19
VI. Application au transformisme	22
VII. La vraie nature du calcul des probabilités et du hasard	25
VIII. Application aux jeux	29
IX. Application à la statistique.	31
X. Fausses applications mathématiques du calcul des probabilités	35
XI. L'argument épicurien contre les causes finales	39
XII. De la probabilité des causes et des événements futurs tirée des événements observés	42
XIII. Application du calcul des probabilités aux décisions judiciaires.	45
XIV. Le principe de l'accumulation des probabilités indépendantes de Newman	48
XV. Applications diverses du principe de Newman	55
XVI. Conclusion.	61

Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* Classe des sciences\,
n° 12 [décembre] 1903, pp. 1285-1294.

Sur une intégrale considérée en calcul des probabilités.

1. *Objet de la présente note.* Nous nous proposons de calculer d'une manière approximative les rapports [(A + Q) : E], [(A — P) : E], [(B + P) : E], [(B — Q) : E] considérés autrefois par Poisson (*), A, B, P, Q, E, ayant les valeurs suivantes :

$$A = \int_0^p z^m (1-z)^n dz, \qquad B = \int_p^1 z^m (1-z)^n dz,$$

$$P = \int_{p-l}^{p} z^m (1-z)^n dz, \qquad Q = \int_p^{p+l} z^m (1-z)^n dz,$$

$$E = \int_0^1 z^m (1-z)^n dz.$$

On suppose m et n entiers; $m + n = \mu$; $m = \mu p$, $n = \mu q$; l est tout au plus égal à la moitié de la plus

(*) Poisson, *Probabilité des jugements*, § 88, pp. 224-228; traduction allemande de Schnuse, pp. 189-193.

petite des fractions p, q. Pour fixer les idées, nous supposerons p égal ou supérieur à q, ou m égal ou supérieur à n. D'après les hypothèses, $p + q = 1$.

2. *Valeurs approximatives préliminaires.* Nous avons démontré (*) que

$$\sqrt{1-e^{-\frac{4}{3}T^2}} > \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}\,dt > \sqrt{1-e^{-T^2}},$$

$$T = l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}}.$$

Mais pour $\alpha < 1$,

$$1 - \tfrac{1}{2}\alpha > \sqrt{1-\alpha} > 1-\alpha.$$

Donc

$$1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}T^2} > \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}\,dt > 1 - e^{-T^2},$$

ou encore

$$e^{-T^2} > 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}\,dt > \frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}T^2}.$$

Pour abréger les écritures, nous poserons, dans la suite,

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}\,dt \quad \text{ou} \quad \int_0^T e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,J.$$

(*) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1888, t. XII, 1re partie, pp. 63-65. Pour la facilité du lecteur, nous reproduisons la partie essentielle de la démonstration au n° 10.

3. *Limites de* E. On a, comme l'on sait,

$$E = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)} = \frac{m!\,n!}{\mu!}\cdot\frac{1}{\mu+1}.$$

D'après la formule de Stirling,

$$\sqrt{2\pi m}\, m^m e^{-m} < m! < \sqrt{2\pi m}\, m^m e^{-m+\frac{1}{12m}},$$

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{1}{12n}},$$

$$\sqrt{2\pi\mu}\, \mu^\mu e^{-\mu} < \mu! < \sqrt{2\pi\mu}\, \mu^\mu e^{-\mu+\frac{1}{12\mu}}.$$

On tire aisément de là

$$\frac{\sqrt{2\pi mn}}{\sqrt{\mu}(\mu+1)}\left(\frac{m}{\mu}\right)^m\left(\frac{n}{\mu}\right)^n e^{-\frac{1}{12\mu}} < E,$$

$$E < \frac{\sqrt{2\pi mn}}{\sqrt{\mu}(\mu+1)}\left(\frac{m}{\mu}\right)^m\left(\frac{n}{\mu}\right)^n e^{\frac{1}{12m}+\frac{1}{12n}},$$

ou encore, en introduisant μp, μq au lieu de m, n,

$$\sqrt{2\pi\mu pq}\, p^{\mu p} q^{\mu q}\, \frac{1}{(\mu+1)\, e^{\frac{1}{12\mu}}} < E,$$

$$E < \sqrt{2\pi\mu pq}\, p^{\mu p} q^{\mu q}\, \frac{1}{(\mu+1) e^{-\frac{1}{12\mu pq}}}.$$

Or, on a d'abord

$$(\mu + 1)e^{\frac{1}{12\mu}} < \mu + 2, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{12\mu} < \log\left(1 + \frac{1}{\mu + 1}\right).$$

En effet,

$$\log\left(1 + \frac{1}{\mu + 1}\right) > \frac{1}{\mu + 1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\mu + 1)^2} > \frac{1}{\mu + 1}\left(1 - \frac{1}{2\mu}\right)$$

et, évidemment,

$$\frac{1}{\mu + 1}\left(1 - \frac{1}{2\mu}\right) > \frac{1}{12\mu}$$

ou

$$6(2\mu - 1) > \mu + 1,$$

c'est-à-dire $11\mu > 7$. — Ensuite

$$(\mu + 1)e^{-\frac{1}{12\mu pq}} > \mu\left(1 - \frac{1}{12\mu pq}\right).$$

Donc enfin

$$\frac{1}{\mu + 2}\sqrt{2\pi\mu pq}\, p^m q^n < E < \frac{1}{\mu - \frac{1}{12pq}}\sqrt{2\pi\mu pq}\, p^m q^n.$$

4. *Limites de* A *et* B. 1° $A > \frac{1}{2}E$, $B < \frac{1}{2}E$. En effet, on a d'abord $A + B = E$, ensuite, comme nous allons le prouver, $A \geqslant B$.

On trouve, en faisant

$$z = p - x, \quad 1 - z = q + x,$$

$$A = \int_0^p z^m (1-z)^n dz \lesseqgtr \int_{p-q}^p z^m (1-z)^n dz = \int_0^q (p-x)^m (q+x)^n dx.$$

De même, en faisant

$$z = p + x, \quad 1 - z = q - x,$$

$$B = \int_p^1 z^m (1-z)^n dz = \int_0^q (p+x)^m (q-x)^n dx.$$

Or, on a

$$(p-x)^m (q+x)^n \lesseqgtr (p+x)^m (q-x)^n;$$

car cela revient à

$$\left(\frac{q+x}{q-x}\right)^n \lesseqgtr \left(\frac{p+x}{p-x}\right)^m,$$

ou à

$$n \log \frac{q+x}{q-x} \lesseqgtr m \log \frac{p+x}{p-x},$$

ou, en dérivant, à

$$n \left(\frac{1}{q+x} + \frac{1}{q-x}\right) \lesseqgtr m \left(\frac{1}{p+x} + \frac{1}{p-x}\right),$$

c'est-à-dire, successivement,

$$\frac{2pq^2}{q^2-x^2} \lesseqgtr \frac{2\mu p^2}{p^2-x^2}, \quad q^2(p^2-x^2) \lesseqgtr p^2(q^2-x^2), \quad p^2 \lesseqgtr q^2.$$

De proche en proche, de la dernière relation, on remonte à $A > B$, sauf dans le cas où $p = q$, $m = n$; alors évidemment, $A = B = \frac{1}{2} E$.

2° *Limite inférieure de* B. On peut écrire

$$B = p^m q^m \int_0^q \left(1 + \frac{x}{p}\right)^m \left(1 - \frac{x}{q}\right)^n dx > p^m q^n B_1,$$

si l'on pose

$$B_1 = \int_0^{q-\alpha} \left(1 + \frac{x}{p}\right)^m \left(1 - \frac{x}{q}\right)^n dx,$$

α étant indéterminé. Faisons

$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^m \left(1 - \frac{x}{q}\right)^n = e^u,$$

ou

$$u = m \log\left(1 + \frac{x}{p}\right) + n \log\left(1 - \frac{x}{q}\right).$$

On aura

$$u' = \mu \left[\frac{1}{1 + \frac{x}{p}} - \frac{1}{1 - \frac{x}{q}}\right]$$

$$= \mu \left[1 - \frac{x}{p} + \frac{x^2}{p(p + x)} - 1 - \frac{x}{q} - \frac{x^2}{q(q - x)}\right]$$

$$= -\frac{\mu x}{pq} - \mu x^2 \left[\frac{1}{q(q - x)} - \frac{1}{p(p + x)}\right] > -\frac{\mu x}{pq} - \frac{\mu x^2}{q\alpha}.$$

Donc

$$u > -\frac{\mu x^2}{2pq} - \frac{\mu x^3}{3q\alpha},\quad e^u > e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} \cdot e^{-\frac{\mu x^3}{3q\alpha}} > e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}\left(1 - \frac{\mu x^3}{3q\alpha}\right).$$

On déduit de là

$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^m \left(1 - \frac{x}{q}\right)^n = e^u > e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}\left(1 - \frac{\mu x^3}{3q\alpha}\right),$$

$$B_1 = \int_0^{q-\alpha} e^u dx > \int_0^{q-\alpha} e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} dx - \frac{\mu}{3q\alpha} \int_0^{q-\alpha} e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} x^3 dx,$$

et, *a fortiori*,

$$B_1 > \int_0^{q-\alpha} e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} dx - \frac{\mu}{3q\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} x^3 dx.$$

Posons, dans la première intégrale du second membre

$$\frac{\mu x^2}{2pq} = t^2, \qquad T_1 = (q - \alpha)\sqrt{\frac{\mu}{2pq}};$$

il viendra

$$\int_0^{q-\alpha} e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} dx = \sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \int_0^{T_1} e^{-t^2} dt.$$

La substitution

$$\frac{\mu x^2}{2pq} = s \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{2pq}{\mu} s, \qquad x^3 dx = \frac{2p^2q^2}{\mu^2} s ds$$

donne ensuite

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}} x^2 dx = \frac{2p^2q^2}{\mu^2} \int_0^\infty e^{-s} s ds = \frac{2p^2q^2}{\mu^2} \Gamma(2) = \frac{2p^2q^2}{\mu^2}.$$

On a donc

$$B_1 > \sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \int_0^{T_1} e^{-t^2} dt - \frac{2p^2q}{3\alpha\mu}.$$

Comme on dispose de α, on peut choisir, dans chaque cas, cette fraction de manière que la limite inférieure de B_1 soit la plus grande possible. Pour simplifier, nous ferons

$$3\alpha = 2p^2q \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{2}{3} p^2 q.$$

Dans cette hypothèse, on aura

$$B_1 > \sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \int_0^{T_1} e^{-t^2} dt - \frac{1}{\mu},$$

$$T_1 = q\left(1 - \frac{2}{3} p^2\right) \sqrt{\frac{\mu}{2pq}}.$$

On aura donc enfin

$$B > p^n q^n \left\{ \sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \int_0^{T_1} e^{-t^2} dt - \frac{1}{\mu} \right\}$$

et, en observant, d'après le n° 2, que

$$\int_0^{\tau_i} e^{-t^2} dt > \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 - e^{-\tau_i^2}\right),$$

$$B > p^m q^n \left\{ \frac{\sqrt{2\pi\mu pq}}{\mu}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\tau_i^2}\right) - \frac{1}{\mu}\right\}.$$

3° *Limite supérieure de* B, *limites de* A. On a, comme on l'a vu,

$$B < \tfrac{1}{2}\,E < \tfrac{1}{2}\cdot \text{ (limite supérieure de E)},$$
$$A > \tfrac{1}{2}\,E > \tfrac{1}{2}\cdot \text{ (limite inférieure de E)},$$
$$A = E - B < \text{lim. sup. de E} - \text{lim. inf. de B}.$$

5. *Limites de* (B : E), (A : E). On a d'abord, sauf si $p = q$,

$$B : E < \tfrac{1}{2}, \qquad A : E > \tfrac{1}{2}\cdot$$

Ensuite

$$\frac{B}{E} > \frac{\text{limite inférieure de B}}{\text{limite supérieure de E}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{B}{E} > \frac{p^m q^n \left\{ \dfrac{\sqrt{2\pi\mu pq}}{\mu}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-\tau_i^2}\right) - \dfrac{1}{\mu}\right\}}{\sqrt{2\pi\mu pq}\, p^m q^n \dfrac{1}{\mu - \dfrac{1}{12pq}}}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\tau_i^2}\right)\left(1 - \frac{1}{12\mu pq}\right)$$

$$- \left(1 - \frac{1}{12\mu pq}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$$

On déduit de là sans peine

$$\frac{B}{E} > \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\tau_i^2} - \frac{1}{24\mu pq} - \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Enfin

$$\frac{A}{E} = 1 - \frac{B}{E} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\tau_i^2} + \frac{1}{24\mu pq} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

6. *Limites de* Q *et* (Q : E). 1° *Limites de* Q. Posons dans Q, comme dans B,

$$z = p + x, \qquad 1 - z = q - x,$$

de manière que x varie seulement de 0 à l, l étant au plus égal à $\frac{1}{2}q$.

On aura

$$Q = p^m q^n \int_0^l \left(1 + \frac{x}{p}\right)^m \left(1 - \frac{x}{q}\right)^n dx = p^m q^n \int_0^l e^u dx.$$

La quantité

$$u' = -\frac{\mu x}{pq} - \mu x^2 \left[\frac{1}{q(q-x)} - \frac{1}{p(p+x)}\right],$$

où

$$q - x \gtrless \tfrac{1}{2} q,$$

est évidemment telle que

$$-\frac{\mu x}{pq} > u' > -\frac{\mu x}{pq} - \frac{2\mu x^2}{q^2}.$$

Par suite,

$$-\frac{\mu x^3}{2pq} > u > -\frac{\mu x^3}{2pq} - \frac{2\mu x^3}{3q^2}$$

$$e^{-\frac{\mu x^3}{2pq}} > e^u > e^{-\frac{\mu x^3}{2pq}} e^{-\frac{2\mu x^3}{3q^2}} > e^{-\frac{\mu x^3}{2pq}}\left(1 - \frac{2\mu x^3}{3q^2}\right).$$

Il en résulte d'abord l'inégalité

$$Q = p^m q^n \int_0^1 e^u du < p^m q^n \int_0^\infty e^{-\frac{\mu x^3}{2pq}} dx$$

$$= p^m q^n \sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \int_0^\infty e^{-t^3} dt,$$

ou

$$Q < \frac{1}{2\mu} p^m q^n \sqrt{2\pi\mu pq}\ J$$

On a ensuite

$$\int_0^1 e^u du > \int_0^1 e^{-\frac{\mu x^3}{2pq}} dx - \int_0^1 e^{-\frac{\mu x^3}{2pq}} \frac{2\mu}{3q^2} x^3 dx$$

$$> \int_0^1 e^{-\frac{\mu x^3}{2pq}} dx - \frac{2\mu}{3q^2} \int_0^\infty e^{-\frac{\mu x^3}{2pq}} x^3 dx,$$

ou encore,

$$\int_0^1 e^u du > \sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \int_0^\infty e^{-t^3} dt - \frac{2\mu}{3q^2} \cdot \frac{2p^3q^3}{\mu^3}$$

$$= \frac{1}{2\mu} \sqrt{2\pi\mu pq}\ J - \frac{4p^3}{3\mu}.$$

Donc enfin

$$Q > p^m q^n \left[\frac{1}{2\mu} \sqrt{2\pi\mu pq}\, J - \frac{4p^2}{3\mu} \right].$$

2° *Limite supérieure de* (Q : E). On a

$$\frac{Q}{E} < \frac{\text{limite supérieure de Q}}{\text{limite inférieure de E}},$$

ou

$$\frac{Q}{E} < \frac{\frac{1}{2\mu} p^m q^n \sqrt{2\pi\mu pq}\, J}{\frac{1}{\mu + 2} p^m q^n \sqrt{2\pi\mu pq}} = \frac{1}{2} J \left(1 + \frac{2}{\mu} \right).$$

Mais on sait que $\frac{1}{2} J < \frac{1}{2}$. Par suite,

$$\frac{Q}{E} < \frac{1}{2} J + \frac{1}{\mu}.$$

3° *Limite inférieure de* (Q : E). On a

$$\frac{Q}{E} > \frac{\text{limite inférieure de Q}}{\text{limite supérieure de E}} = \frac{p^m q^n \left[\frac{1}{2\mu} \sqrt{2\pi\mu pq}\, J - \frac{4p^2}{3\mu} \right]}{\mu - \frac{1}{12pq} \sqrt{2\pi\mu pq}\, p^m q^n}$$

$$= \frac{1}{2} J \left(1 - \frac{1}{12\mu pq} \right) - \frac{4}{3} \frac{p^2}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \left(1 - \frac{1}{12\mu pq} \right)$$

et, *a fortiori*,

$$\frac{Q}{E} > \frac{1}{2} J - \frac{1}{24\mu pq} - \frac{4}{3} \frac{p^2}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

7. *Limites de* P *et de* (P : E). On prouve d'abord que P surpasse Q comme on a prouvé que A surpasse B, sauf, bien entendu, si $m = n$, $p = q$, ce qui entraine P = Q. On a donc

$$\frac{P}{E} > \frac{Q}{E} > \frac{1}{2}J - \frac{1}{24\mu pq} - \frac{4}{3}\frac{p^2}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Ensuite, évidemment, P + Q < E, et, par suite,

$$\frac{P}{E} < 1 - \frac{Q}{E} < 1 - \text{limite inférieure de } \frac{Q}{E}.$$

Donc

$$\frac{P}{E} < 1 - \frac{1}{2}J + \frac{1}{24\mu pq} + \frac{4}{3}\frac{p^2}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Mais, d'après une inégalité du n° 2, on a

$$1 - \tfrac{1}{2}J = 1 - J + \tfrac{1}{2}J < \tfrac{1}{2}J + e^{-\pi^2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{P}{E} < \frac{1}{2}J + e^{-\pi^2} + \frac{1}{24\mu pq} + \frac{4}{3}\frac{p^2}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

8. *Limites de* [(P + Q) : E]. En rapprochant les résultats obtenus dans les deux derniers numéros, on trouve

$$\frac{P+Q}{E} < J + \frac{1}{\mu} + e^{-\pi^2} + \frac{1}{24\mu pq} + \frac{4}{3}\frac{p^2}{\sqrt{2\pi\mu pq}},$$

$$\frac{P+Q}{E} > J - \frac{1}{12\mu pq} - \frac{8}{3}\frac{p^2}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Nous avons trouvé antérieurement, par une autre méthode (*),

$$1 > \frac{P+Q}{E} > J - \frac{7}{\mu pq}.$$

9. *Limites de l'intégrale de Poisson.* Posons, pour simplifier les écritures,

$$\varepsilon = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}t^2} + \frac{1}{24\mu pq} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}, \quad \eta = \frac{1}{24\mu pq} + \frac{4}{3}\frac{p^2}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

On aura

$$\frac{1}{2} < \frac{A}{E} < \frac{1}{2} + \varepsilon, \quad \frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{B}{E} < \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}J - \eta < \frac{P}{E} < \frac{1}{2}J + \eta + e^{-\frac{1}{4}t^2}, \quad \frac{1}{2}J - \eta < \frac{Q}{E} < \frac{1}{2}J + \frac{1}{\mu}.$$

On déduit de là

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}J - \eta < \frac{A+Q}{E} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}J + \varepsilon + \frac{1}{\mu}, \quad \ldots (1)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}J - \eta - e^{-\frac{1}{4}t^2} < \frac{A-P}{E} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}J + \varepsilon + \eta, \quad .(2)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}J - \varepsilon - \eta < \frac{B+P}{E} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}J + \eta + e^{-\frac{1}{4}t^2}, \quad .(3)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}J - \varepsilon - \frac{1}{\mu} < \frac{B-Q}{E} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}J + \eta \quad \ldots (4)$$

(*) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1902, t. XXVI, 2e partie, pp. 211-214.

Observons que

$$A + Q = \int_0^{p+t} z^m (1 - z)^n dz,$$

$$A - P = \int_0^{p-t} z^m (1 - z)^n dz,$$

$$B + P = \int_{p-t}^{t} z^m (1 - z)^n dz,$$

$$B - Q = \int_{p+t}^{t} z^m (1 - z)^n dz.$$

Les relations (1), (2), (3), (4) donnent sous une forme précise, dans tous les cas, la limite supérieure et la limite inférieure du rapport d'une intégrale eulérienne de première espèce *incomplète* à l'intégrale *complète* correspondante. Poisson, à l'endroit cité, donne simplement la formule approximative, sans aucune indication de limites,

$$\int_0^{\theta} z^m (1 - z)^n dz = (\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} J) E,$$

le signe + correspondant au cas où $\theta(m + n)$ surpasse m, le signe — à celui où $\theta(m + n)$ est inférieur à m.

10. *Démonstration des inégalités du n° 2.* Considérons les volumes V_1, V_2, V_3, situés entre trois plans rectangulaires OXY, OYZ, OZX, sous la surface ayant pour équation $\pi z = 4e^{-x^2-y^2}$, et projetés, V_1 suivant le carré OXPY de côté OX = OY = T, V_2 suivant le quart de cercle OXY de centre O et de rayon

$OX = OY = T$, V_3 suivant le quart de cercle Oxy de rayon $Ox = Oy = (2T : \sqrt{\pi})$, et équivalent au carré OXPY.

Le volume V_1 est évidemment supérieur à V_2 qui en est une partie. Les volumes V_1 et V_3 ont une partie commune; les parties non communes ont des bases équivalentes, mais dans ces parties non communes, les z de V_3 sont plus grands que ceux de V_1, parce que z est d'autant plus grand que $x^2 + y^2$ est plus petit. On a donc $V_1 < V_3$.

On trouve aisément, d'après les formules générales de cubature,

$$V_1 = J^2, \quad V_2 = 1 - e^{-\pi^2}, \quad V_3 = 1 - e^{-\frac{4\pi^2}{\pi}} < 1 - e^{-\frac{4}{3}\pi^2}$$

et, par suite,

$$1 - e^{-\pi^2} < J^2 < 1 - e^{-\frac{4}{3}\pi^2}.$$

comme nous l'avons dit au n° 2 (*).

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 3, pp. 239-254, 1904.

Sur une sommation d'intégrales considérées en calcul des probabilités

1. *Objet de la présente note.* Soient m, n, μ, m', n', μ', M des nombres entiers tels que

$$m + n = \mu, \qquad m' + n' = \mu', \qquad \mu + \mu' = \mathrm{M};$$

p et q des fractions définies par les égalités $\mu p = m$, $\mu q = n$. Soient ensuite

$$m' = \mu' p + x, \qquad n' = \mu' q - x,$$

x variant par unités de 0 à $\pm \mu' l$, l étant une fraction tout au plus égale à la plus petite des quantités $\frac{1}{2} p$, $\frac{1}{2} q$, $\frac{1}{2} q$, par exemple.

Posons ensuite

$$\mathrm{C}_{\mu'}^{m'} = \frac{1.2\ldots\mu'}{1.2\ldots m'.1.2\ldots n'},$$

$$\mathrm{B} = \int_0^1 z^m (1-z)^n dz = \frac{1.2\ldots m.1.2\ldots n}{1.2\ldots\mu.\mu+1},$$

$$\mathrm{B}' = \int_0^1 z^{m+m'} (1-z)^{n+n'} = \frac{1.2\ldots m+m'.1.2\ldots n+n'}{1.2\ldots \mathrm{M}.\mathrm{M}+1},$$

$$\mathrm{T}_{\mu' p+x} = \mathrm{T}_{m'} = \mathrm{C}_{\mu'}^{m'} \mathrm{B}' : \mathrm{B}.$$

La somme

$$\mathrm{P} = \sum_{x=-\mu' l}^{x=\mu' l} \mathrm{T}_{\mu' p+x}$$

exprime la probabilité *a posteriori* qu'un événement, dont la probabilité *a priori* peut varier de zéro à l'unité et qui est arrivé m fois en μ épreuves, se présentera à l'avenir m' fois sur μ' épreuves, la différence entre $(m : \mu)$ et $(m' : \mu')$ étant tout au plus égale à l.

Nous nous proposons de calculer une limite supérieure et une limite inférieure de B' : B et de T_{∞}, une limite inférieure de P. On sait d'ailleurs que la somme P est inférieure à l'unité.

Laplace, dans la *Théorie analytique des probabilités* (n° 30, 3e édition, 1820, pp. 385-387), calcule une valeur approchée du T_{∞}; Poisson, dans la *Probabilité des jugements* (n° 87, p. 225, ou p. 188 de la traduction allemande), une valeur approchée de P. Mais, suivant l'usage de leur temps, ni l'un ni l'autre ne s'inquiètent d'enfermer ces expressions entre deux limites, l'une supérieure, l'autre inférieure; autrement dit, ils n'évaluent pas l'erreur commise dans l'évaluation de T_{∞} et de P. L'évaluation précise de cette erreur est l'objet propre de la présente note.

2. *Limites de* (B' : B). On a, comme l'on sait, d'après la formule de Stirling,

$$\sqrt{2\pi}\, r^{r+\frac{1}{2}} e^{-r} < 1.2 \dots r < \sqrt{2\pi}\, r^{r+\frac{1}{2}} e^{-r+\frac{1}{12r}}.$$

On déduit de là

$$B > \frac{\sqrt{2\pi}}{\mu+1} \frac{m^{m+\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}}}{\mu^{\mu+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{12m}},$$

$$B < \frac{\sqrt{2\pi}}{\mu+1} \frac{m^{m+\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}}}{\mu^{\mu+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{m}+\frac{1}{12m}}$$

De même,

$$B' > \frac{\sqrt{2\pi}}{M+1} \frac{(m+m')^{m+m'+\frac{1}{2}}(n+n')^{n+n'+\frac{1}{2}}}{M^{M+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{12M}},$$

$$B' < \frac{\sqrt{2\pi}}{M+1} \frac{(m+m')^{m+m'+\frac{1}{2}}(n+n')^{n+n'+\frac{1}{2}}}{M^{M+\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{12(m+m')}+\frac{1}{12(n+n')}}.$$

Par suite,

$$\frac{B'}{B} > \frac{\mu+1}{M+1} \frac{(m+m')^{m+m'+\frac{1}{2}}(n+n')^{n+n'+\frac{1}{2}}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}}{M^{M+\frac{1}{2}}m^{m+\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}}.a,$$

$$a = e^{-\frac{1}{12M}-\frac{1}{12m}-\frac{1}{12n}};$$

$$\frac{B'}{B} < \frac{\mu+1}{M+1} \frac{(m+m')^{m+m'+\frac{1}{2}}(n+n')^{n+n'+\frac{1}{2}}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}}{M^{M+\frac{1}{2}}m^{m+\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}}.b,$$

$$b = e^{\frac{1}{12(m+m')}+\frac{1}{12(n+n')}+\frac{1}{12\mu}}.$$

On démontre aisément les inégalités suivantes :

$$\frac{\mu+1}{M+1} > \frac{\mu}{M}, \qquad \frac{\mu+1}{M+1} < \frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{\mu+\mu'} < \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m+n} < \frac{1}{2m}+\frac{1}{2n},$$

$$\frac{1}{m+m'}+\frac{1}{n+n'} < \frac{1}{m}+\frac{1}{n}.$$

Il en résulte

$$\frac{1}{12(m+m')}+\frac{1}{12(n+n')}+\frac{1}{12\mu}$$
$$<\frac{1}{12m}+\frac{1}{12n}+\frac{1}{24m}+\frac{1}{24n}=\frac{1}{8m}+\frac{1}{8n},$$
$$\frac{1}{12M}+\frac{1}{12m}+\frac{1}{12n}<\frac{1}{24m}+\frac{1}{24n}+\frac{1}{12m}+\frac{1}{12n}=\frac{1}{8m}+\frac{1}{8n},$$
$$-\frac{1}{12M}-\frac{1}{12m}-\frac{1}{12n}>-\frac{1}{8m}-\frac{1}{8n}.$$

On a donc

$$a>e^{-\frac{1}{8m}-\frac{1}{8n}},\qquad b<e^{\frac{1}{8m}+\frac{1}{8n}},$$

Par suite,

$$\frac{B'}{B}>\sqrt{\frac{\mu}{M}}\,\frac{(m+m')^{m+m'+\frac{1}{2}}(n+n')^{n+n'+\frac{1}{2}}\mu^{\mu+1}}{M^{M+1}m^{m+\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{8m}-\frac{1}{8n}},$$

$$\frac{B'}{B}<\frac{(m+m')^{m+m'+\frac{1}{2}}(n+n')^{n+n'+\frac{1}{2}}\mu^{\mu+1}}{M^{M+1}m^{m+\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}}e^{\frac{1}{8m}+\frac{1}{8n}}.$$

En observant que

$$(m+m')^{m+m'+\frac{1}{2}}=m^{m+m'+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{m'}{m}\right)^{m+m'+\frac{1}{2}},$$

$$(n+n')^{n+n'+\frac{1}{2}}=n^{n+n'+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{n'}{n}\right)^{n+n'+\frac{1}{2}},$$

$$M^{M+1}=(\mu+\mu')^{M+1}=\mu^{M+1}\left(1+\frac{\mu'}{\mu}\right)^{M+1},$$

puis que $p = \frac{m}{\mu}$, $q = \frac{n}{\mu}$, on trouve

$$\frac{B'}{B} > \sqrt{\frac{m}{M}}\, p^{m'} q^{n'} \frac{\left(1+\frac{m'}{m}\right)^{m+m'+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{n'}{n}\right)^{n+n'+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{\mu'}{\mu}\right)^{\mu+\mu'+1}} e^{-\frac{1}{6m}-\frac{1}{6n}},$$

$$\frac{B'}{B} < \quad p^{m'} q^{n'} \frac{\left(1+\frac{m'}{m}\right)^{m+m'+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{n'}{n}\right)^{n+n'+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{\mu'}{\mu}\right)^{\mu+\mu'+1}} e^{\frac{1}{6m}+\frac{1}{6n}}.$$

Ces valeurs sont évidemment très voisines de $p^{m'}q^{n'}$ si m, n sont de grands nombres comparativement à m', n'.

3. *Limites de* $T_{\mu' p+\alpha}$. Au moyen de la formule de Stirling, on établit sans peine les inégalités

$$C_{\mu'}^{m'} > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mu'^{\mu'+1}}{m'^{m'+\frac{1}{2}} n'^{n'+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{12m'}-\frac{1}{12n'}}$$

$$C_{\mu'}^{m'} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mu'^{\mu'+1}}{m'^{m'+\frac{1}{2}} n'^{n'+\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{12\mu'}}.$$

Posons

$$C = \frac{\mu'^{\mu'+1}}{m'^{m'+\frac{1}{2}} n'^{n'+\frac{1}{2}}} \frac{(m+m')^{m+m'+\frac{1}{2}}(n+n')^{n+n'+\frac{1}{2}}}{M^{M+1}} \frac{\mu^{\mu+1}}{m^{m+\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Puisque

$$T_{\mu' p+\alpha} = C_{\mu'}^{m'} \frac{B'}{B},$$

on aura évidemment

$$T_{\mu' p+z} > \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu'}} \sqrt{\frac{\mu}{M}}\, C\, e^{-\frac{1}{8m}-\frac{1}{8n}-\frac{1}{12m'}-\frac{1}{12n'}},$$

$$T_{\mu' p+z} < \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu'}}\, C\, e^{\frac{1}{8m}+\frac{1}{8n}+\frac{1}{12\mu'}}.$$

On a

$$\frac{1}{8m} + \frac{1}{8n} = \frac{1}{8\mu p} + \frac{1}{8\mu q} = \frac{1}{8\mu pq},$$

$$\frac{1}{12m'} + \frac{1}{12n'} = \frac{\mu'}{12m'n'} = \frac{\mu'}{12(\mu' p + x)(\mu' q - x)}.$$

Puisque x est tout au plus égal à $\mu' l$, et l au plus égal à $\frac{1}{2} q$ supposé inférieur ou égal à $\frac{1}{2} p$, on a

$$m'n' \gtrless (\mu' p + \mu' l)(\mu' q - \mu' l) \gtrless \mu'^2 (p + \tfrac{1}{2} q)(q - \tfrac{1}{2} q)$$
$$= \tfrac{1}{2} \mu'^2 (1 + p) q > \tfrac{1}{2} \mu'^2 pq.$$

Donc

$$\frac{\mu'}{12m'n'} < \frac{\mu'}{6\mu'^2 pq} = \frac{1}{6\mu' pq}, \quad -\frac{\mu'}{12m'n'} > -\frac{1}{6\mu' pq}.$$

Par conséquent,

$$T_{\mu' p+z} > \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu'}} \sqrt{\frac{\mu}{M}}\, C\, e^{-\frac{1}{8\mu pq}-\frac{1}{6\mu' pq}}.$$

Mais on sait que $e^{-\alpha}$ surpasse $1 - \alpha$, si α est positif. Donc

$$e^{-\frac{1}{8\mu pq}-\frac{1}{6\mu' pq}} > 1 - \frac{1}{8\mu pq} - \frac{1}{6\mu' pq}.$$

De même, si α est égal ou inférieur à $\frac{1}{2}$, on a

$$e^{\alpha} = \frac{1}{e^{-\alpha}} < \frac{1}{1-\alpha} \leqq 1 + 2\alpha.$$

Par suite,

$$e^{\frac{1}{8m}+\frac{1}{8n}+\frac{1}{12\mu'}} = e^{\frac{1}{8\mu pq}+\frac{1}{12\mu'}} < 1 + \frac{1}{4\mu pq} + \frac{1}{6\mu'}.$$

On a donc enfin

$$T_{\mu' p+x} > \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu'}} \sqrt{\frac{\mu}{M}}\, C \left(1 - \frac{1}{8\mu pq} - \frac{1}{6\mu' pq}\right),$$

$$T_{\mu' p+x} > \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu'}}\, C \left(1 + \frac{1}{4\mu pq} + \frac{1}{6\mu'}\right)$$

Ce sont les deux limites cherchées de $T_{\mu' p+x}$.

On peut mettre

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu'}}\, C$$

sous une autre forme, en se servant des relations

$$m = \mu p. \qquad n = \mu q, \qquad m' = \mu' p + x, \qquad n' = \mu' q - x.$$

On trouve ainsi

$$\frac{\mu'^{\mu'+\frac{1}{2}}}{m'^{m'+\frac{1}{2}} n'^{n'+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{p^{\mu' p+x+\frac{1}{2}} q^{\mu' q-x+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{\mu' p}\right)^{\mu' p+x+\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{\mu' q}\right)^{\mu' q-x+\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{(m+m')^{m+m'+\frac{1}{2}} (n+n')^{n+n'+\frac{1}{2}}}{M^{M+\frac{1}{2}}}$$

$$= p^{Mp+x+\frac{1}{2}} q^{Mq-x+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{Mp}\right)^{Mp+x+\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{Mq}\right)^{Mq-x+\frac{1}{2}};$$

$$\frac{\mu^{\mu+1}}{m^{m+\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{p^{\mu p+\frac{1}{2}}q^{\mu q+\frac{1}{2}}},$$

puis

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}}C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu' pq}} \frac{\left(1+\frac{x}{Mp}\right)^{Mp+s+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{Mq}\right)^{Mq-s+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{x}{\mu' p}\right)^{\mu' p+s+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{\mu' q}\right)^{\mu' q-s+\frac{1}{2}}}.$$

Pour abréger, nous écrirons

$$t_{\mu' p+s} = \frac{\left(1+\frac{x}{Mp}\right)^{Mp+s+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{Mq}\right)^{Mq-s+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{x}{\mu' p}\right)^{\mu' p+s+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{\mu' q}\right)^{\mu' q-s+\frac{1}{2}}}.$$

Alors on aura

$$T_{\mu' p+s} > \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu' pq}}\sqrt{\frac{\mu}{M}}\left(1-\frac{1}{8\mu pq}-\frac{1}{6\mu' pq}\right)t_{\mu' p+s}$$

$$T_{\mu' p+s} < \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu' pq}}\left(1+\frac{1}{4\mu pq}+\frac{1}{6\mu'}\right)t_{\mu' p+s}.$$

La première inégalité seule nous servira dans la suite. Pour simplifier les écritures, nous écrirons

$$c = 1-\frac{1}{8\mu pq}-\frac{1}{6\mu' pq}.$$

4. *Limite inférieure de* $t_{\mu' p+x} + t_{\mu' p-x}$. On a

$$t_{\mu' p+x} + t_{\mu' p-x} > 2\sqrt{t_{\mu' p+x} \cdot t_{\mu' p-x}}.$$

Posons

$$t_{\mu' p+x} \cdot t_{\mu' p-x} = e^{v}, \qquad \sqrt{t_{\mu' p+x} \cdot t_{\mu' p-x}} = e^{\frac{1}{2}v}$$

$$v = \left(Mp + x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{x}{Mp}\right) + \left(Mp - x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{x}{Mp}\right)$$

$$- \left(\mu' p + x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{\mu' p}\right) - \left(\mu' p - x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 - \frac{x}{\mu' p}\right) + \text{etc.},$$

etc. désignant ici et plus bas des termes en q analogues aux termes en p.

On trouve, en dérivant v par rapport à x,

$$v' = \log\left(1 + \frac{x}{Mp}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{Mp + x} - \log\left(1 - \frac{x}{Mp}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{Mp - x}$$

$$- \log\left(1 + \frac{x}{\mu' p}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{\mu' p + x} + \log\left(1 - \frac{x}{\mu' p}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu' p - x} + \text{etc.};$$

$$v'' = \frac{1}{Mp + x} - \frac{1}{2}\frac{1}{(Mp + x)^2} + \frac{1}{Mp - x} - \frac{1}{2}\frac{1}{(Mp - x)^2}$$

$$- \frac{1}{\mu' p + x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(\mu' p + x)^2} - \frac{1}{\mu' p - x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(\mu' p - x)^2} + \text{etc.}$$

On a évidemment, puisque μ' est inférieur à M,

$$v'' > \frac{1}{Mp + x} + \frac{1}{Mp - x} - \frac{1}{\mu' p + x} - \frac{1}{\mu' p - x} + \text{etc.}$$

$$= \frac{2Mp}{M^2 p^2 - x^2} - \frac{2\mu' p}{\mu'^2 p^2 - x^2} + \text{etc.}$$

$$v'' > \frac{2}{Mp}\left[1 + \frac{x^2}{M^2p^2} + \cdots\right] - \frac{2}{\mu' p}\left[1 + \frac{x^2}{\mu'^2p^2} + \cdots\right] + \text{etc.}$$

$$> \frac{2}{Mp} - \frac{2}{\mu' p}\left[1 + \frac{4}{3}\frac{x^2}{\mu'^2p^2}\right] + \frac{2}{Mq} - \frac{2}{\mu' q}\left[1 + \frac{4}{3}\frac{x^2}{\mu'^2q^2}\right]$$

$$= \frac{2}{Mpq} - \frac{2}{\mu' pq} - \frac{8}{3}\frac{x^2(p^3 + q^3)}{\mu'^3p^3q^3}$$

$$> \frac{2}{Mpq} - \frac{2}{\mu' pq} - \frac{8}{3}\frac{x^2}{\mu'^3p^3q^3} = -\frac{2}{\mu' pq}\frac{\mu}{M} - \frac{8}{3}\frac{x^2}{\mu'^3p^3q^3}.$$

Comme v et v' s'annulent, pour $x = 0$, on trouve, en intégrant de 0 à x,

$$v' > -\frac{2x}{\mu' pq}\frac{\mu}{M} - \frac{8}{9}\frac{x^3}{\mu'^3p^3q^3},$$

$$v > -\frac{x^2}{\mu' pq}\frac{\mu}{M} - \frac{2}{9}\frac{x^4}{\mu'^3p^3q^3}.$$

On a donc

$$t_{\mu' p+z} + t_{\mu' p-z} > 2e^{\frac{1}{2}v} = 2e^{-\frac{x^2}{2\mu' pq}\frac{\mu}{M} - \frac{1}{9}\frac{x^4}{\mu'^3p^3q^3}},$$

et, par suite,

$$t_{\mu' p+z} + t_{\mu' p-z} > 2e^{-\frac{x^2}{2\mu' pq}\frac{\mu}{M}}\left(1 - \frac{1}{9}\frac{x^4}{\mu'^3p^3q^3}\right).$$

5. *Limite inférieure de* P. On a, puisque $t_{\mu p} = 1$,

$$P = \sum_{z=-\mu' l}^{z=+\mu' l} T_{\mu' p+z} > \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu' pq}}\sqrt{\frac{\mu}{M}}\sum_{z=-\mu' l}^{z=+\mu' l} t_{\mu' p+z}$$

$$= \frac{2c}{\sqrt{2\pi\mu' pq}}\sqrt{\frac{\mu}{M}}\left[\sum_{z=0}^{z=\mu' l}(t_{\mu p+z} + t_{\mu p-z}) - \frac{1}{2}\right],$$

$$P > \frac{2c}{\sqrt{2\pi\mu' pq}} \sqrt{\frac{\mu}{M}} \left[\sum_{x=0}^{x=\mu' l} e^{-\frac{x^2}{2\mu' pq}\frac{\mu}{M}} \left(1 - \frac{1}{9}\frac{x^4}{\mu'^3 p^3 q^3}\right) - \frac{1}{2} \right],$$

et, *a fortiori*, comme on le voit, en recourant à une représentation géométrique,

$$P > \frac{2c}{\sqrt{2\pi\mu' pq}} \sqrt{\frac{\mu}{M}} \left[\int_0^{\mu' l} e^{-\frac{x^2}{2\mu' pq}\frac{\mu}{M}} \left(1 - \frac{1}{9}\frac{x^4}{\mu'^3 p^3 q^3}\right) dx - \frac{1}{2} \right].$$

Posons

$$t^2 = \frac{\mu x^2}{2\mu' pqM}, \quad T = l\sqrt{\frac{\mu'}{2pq}}\sqrt{\frac{\mu}{M}} = l\sqrt{\frac{\mu\mu'}{2pq(\mu+\mu')}},$$

il viendra

$$P > \frac{2c}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2} dt - \frac{8c}{9\sqrt{\pi}} \frac{M^2}{\mu^2\mu' pq} \int_0^T e^{-t^2} t^4 dt - \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu' pq}} \sqrt{\frac{\mu}{M}}.$$

La seconde intégrale peut être remplacée par l'intégrale plus grande

$$\frac{8c}{9\sqrt{\pi}} \frac{M^2}{\mu^2\mu' pq} \int_0^\infty e^{-t^2} t^4 dt,$$

sans que l'inégalité cesse d'exister. Or, si l'on pose $t^2 = u$,

$$\int_0^\infty e^{-t^2} t^4 dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{3}{2}} du = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}.$$

Il résulte de là que

$$P > \frac{2c}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2} dt - \frac{1}{3} \frac{M^2}{\mu^2 \mu' pq} - \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu' pq}} \sqrt{\frac{\mu}{M}}.$$

On a

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2} dt < 1, \qquad c = 1 - \frac{1}{8\mu pq} - \frac{1}{6\mu' pq} < 1.$$

Par conséquent,

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2} dt - \frac{1}{8\mu pq} - \frac{1}{6\mu' pq} - \frac{1}{3} \frac{M^2}{\mu^2 \mu' qq} - \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu' pq}} \sqrt{\frac{\mu}{M}}.$$

On a ensuite

$$\frac{1}{3} \frac{M^2}{\mu^2 \mu' pq} = \frac{1}{3pq} \frac{\mu^2 + 2\mu\mu' + \mu'^2}{\mu^2 \mu'} = \frac{1}{3\mu' pq} + \frac{2}{3\mu pq} + \frac{\mu'}{3\mu pq}.$$

Donc, enfin, en introduisant cette valeur dans l'inégalité précédente,

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^T e^{-t^2} dt - \frac{19}{24\mu pq} - \frac{1}{2\mu' pq} - \frac{1}{3} \frac{\mu'}{\mu pq} - \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu' pq}} \sqrt{\frac{\mu}{M}}.$$

Si μ et μ' sont de grands nombres, P est très voisin de l'unité (*).

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 5, pp. 538-549, 1904.

MATHESIS

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Professeur ordinaire à l'Université de Gand, | Professeur ordinaire à l'Université de Liége
Anciens élèves de l'École normale des sciences,
Membres de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis
PH. BRETON

TROISIÈME SÉRIE.

TOME V. — ANNÉE 1905.

(TOME XXV DE LA COLLECTION).

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
21-23, RUE DU CALVAIRE, 21-23

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1905

ABRÉVIATIONS.

BB., Bulletin de l'Académie royale de Belgique.

CR., Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

NAM., Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

NCM., Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

JME., (ou JMS.), Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué par G. DE LONGCHAMPS de 1881 à 1897, ensuite par G. MARIAUD de 1897 à 1901.

IM., Intermédiaire des Mathématiciens, fondé en 1894 par MM. LAISANT et LEMOINE.

AF., Association française pour l'avancement des sciences.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué successivement par BORCHARDT, KRONECKER et WEIERSTRASS, par KRONECKER etc. (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333.

MATHESIS

MÉMORIAL MATHÉMATIQUE

Janvier.

1. 1748. Mort de *Jean I Bernoulli*, à Bâle. **1894.** Mort de *H. Hertz*, à Bonn.
2. 1822. Naissance de *R. Clausius*, à Cöslin, en Pomeranie.
3. 1777. Naissance de *Poinsot*, à Paris,
4. 1752. Mort de *G. Cramer*, à Bagnols, près de Nîmes.
5. 1642. Naissance de *Newton*, à Whoolstarpe, près Grantham, dans le Lincolnshire. **1838.** Naissance de *Camille Jordan*, à Lyon.
6. 1886. Mort de *B. de Saint Venant*, à St Ouen, près Vendôme.
7. 1881. Mort de *F. Nesselmann*, à Königsberg.
8. 1642. Mort de *Galilée*, à Arcetri, en Toscane.
9. 1848. Mort de *Caroline Herschel*, à Hanovre.
10. 1833. Mort de *A. M. Legendre*, à Paris.
11. 1890. Naissance de *G. Battaglini*, à Naples.
12. 1665. Mort de *P. Fermat*, à Castres, près de Toulouse.
13. 1746. Naissance du vicomte *de Nieuport*, à Paris.
14. 1901. Mort de *Ch. Hermite*, à Paris.
15. 1850. Naissance de *Sophie Kovalevski*, à Moscou.
16. 1834. Mort de *P. Hachette*, à Paris.
17. 1896. Mort de *M. Rühlmann*, à Hanovre.
18. 1876. Mort de *Ch. Dupin*, à Paris.
19. 1833. Naissance de *A. Clebsch*, à Königsberg, en Prusse.
20. 1864. Mort de *G. Plana*, à Turin.
21. 1609. Mort de *J. J. Scaliger*, à Leyde.
22. 1775. Naissance de *A. M. Ampère*, à Lyon.
23. 1862. Naissance de *D. Hilbert*, à Königsberg. en Prusse.
24. 1798. Naissance de *Ch. v. Staudt*, à Rothenburg.
25. 1736. Naissance de *J. L. Lagrange*, à Turin.
26. 1895. Mort de *A. Cayley*, à Cambridge.

27. 1667. Mort de *Grégoire de Saint-Vincent*, à Gand.

28. 1540. Naissance de *Ludolph van Ceulen*, à Hildesheim.

29. 1810. Naissance de *E. Ed. Kummer*, à Sorau, en Lusace.

30. 1894. Mort de *M. Stern*, à Zürich.

31. 1715. Naissance de *Fagnano*, à Sinigaglia.

×SUR LES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES ENTIERS,

par M. A. Aubry.

1. L'ensemble de trois nombres entiers x, y, z, liés par la relation $x^2 + y^2 = z^2$ s'appelle un *triangle rectangle* ou simplement un *triangle*; x et y en sont les *cathètes*, z l'*hypoténuse*. Le plus souvent, on supposera que les nombres x, y, z n'ont pas de facteur commun.

2. *L'une des cathètes est toujours un nombre pair* (Frénicle).

Cor. I. *Tous les triangles sont donnés par la formule*

(1) $$x = k\lambda^2 - k\mu^2, \quad y = 2k\lambda\mu, \quad z = k\lambda^2 + k\mu^2.$$ (Diophante)(*).

II. *L'hypoténuse est de l'une des formes* $12 + 1$, $12 + 5$ (**) (Anonyme arabe).

III. *Il y a toujours une des cathètes qui est* **3** *et une qui est* **4**, *d'où il suit que la surface est toujours* **6** (Frénicle).

IV. *L'un des côtés est* **5** (Frénicle).

V. *Le produit des trois côtés est toujours* **60** (Lenthéric).

VI. *La somme et la différence de deux cathètes sont de l'une des formes* 8 ± 1 (Frénicle).

VII. *Trouver un triangle dont la première bissectrice* (correspondant au côté x) *soit rationnelle* (Diophante).

VIII. *Trouver un triangle dont le périmètre soit un carré* (Diophante).

Diophante donne la solution suivante :

$$x = (4\lambda^2 - \nu^2)\nu^2, \quad y = 4\lambda^2(\nu^2 - 3\lambda^2), \quad z = 4\lambda^2(3\lambda^2 - \nu^2) + \nu^4$$

3. *Trouver trois carrés en progression arithmétique* (Fibonacci).

La solution

$$(\lambda^2 - \mu^2 - 2\lambda\mu)^2, \quad (\lambda^2 + \mu^2)^2, \quad (\lambda^2 - \mu^2 + 2\lambda\mu)^2$$

paraît due aux Arabes.

(*) Euclide (*Eléments*, X, lemme I, prop. 29) résout déjà cette question.

(**) Pour abréger, nous indiquons les multiples par des caractères gras : $12 + 1$, par exemple, est mis pour *multiple de* $12 + 1$.

COR. I. *La raison de la progression est* **24** (FIBONACCI).

II. *Résoudre les équations* $x^2+y=z^2$, $x^2-y=w^2$ (FIBONACCI). On trouve :

$$x=\lambda^2+\mu^2,\quad y=4\lambda\mu(\lambda^2-\mu^2),\quad z=\lambda^2-\mu^2+2\lambda\mu,\quad w=\lambda^2-\mu^2-2\lambda\mu.$$

III. *Trouver un triangle dont la seconde bissectrice soit rationnelle*(*).

IV. *Trouver trois triangulaires en progression arithmétique* (A. BOUTIN). En posant $2t_n=n(n+1)$, on trouve

$$2t_n=t_m+t_r \tag{2}$$

où

$$m=\lambda^2-2\mu^2-2\mu-1,$$
$$r=\lambda^2+2\mu^2-4\lambda\mu-2\lambda+2\mu,$$
$$n=\lambda^2-2\lambda\mu+2\mu^2-\lambda+2\mu.$$

V. *Résoudre* $(x^2+y^2)p=(x+y)^2q$ (DIOPHANTE). On pose

$$x=\lambda+\mu,\quad y=\lambda-\mu\ (**).$$

(*) EULER et CATALAN ont résolu des problèmes analogues pour les médianes de triangles quelconques.

(**) De la même manière, les substitutions $x=z-\lambda$, $y=z-\mu$ serviront à résoudre l'équation

$$xy+x+y=z^2. \qquad \text{(DIOPHANTE).}$$

On substituera $v=u-\lambda$ pour celles-ci

$$x+a=u^2,\quad x+b=v^2. \qquad \text{(ID.)}$$

Les substitutions $u=z+\lambda$, $v=z+\mu$ donneront la solution des systèmes

$$xy+a=z^2; \qquad \text{(ID.)}$$
$$x+y=a,\quad x+z^2=u^2,\quad y+z^2=v^2. \qquad \text{(ID.)}$$

On posera $z=x+\lambda$, $w=y+\mu$ pour les suivantes

$$x^2+y=z^2,\quad y^2+x=w^2; \qquad \text{(ID.)}$$
$$x+y+x^2=z^2,\quad x+y+y^2=w^2. \qquad \text{(ID.)}$$

Des substitutions analogues serviront pour les équations

$$(x+y)^2+x=z^2,\quad (x+y)^2+y=w^2; \qquad \text{(ID.)}$$
$$x+y+z^2=t^2,\quad y+z+x^2=u^2,\quad z+x+y^2=v^2; \qquad \text{(ID.)}$$
$$x^2+y=t^2,\quad y^2+z=u^2,\quad z^2+x=v^2; \qquad \text{(ID.)}$$
$$x^2+y-1=z^2,\quad x^2-y-1=w^2; \qquad \text{(BHASCHARA).}$$
$$x^2+z=t^2,\quad y^2+z=u^2; \qquad \text{(AL-KARHI).}$$
$$x+x^2=z^2,\quad x-x^2=-w^2. \qquad \text{(ID.)}$$

En général, on fait $x=Ax'+A'y'$, $y=Bx''+B'y''$ et on détermine les coefficients des nouvelles inconnues de manière à annuler certains termes et rendre l'équation plus maniable.

4. *L'aire d'un triangle ne peut être un carré* (FERMAT). Les trois côtés étant x^2+y^2, $2xy$ et x^2-y^2, l'aire A est $xy(x^2-y^2)$; x et y sont premiers entre eux et premiers avec x^2-y^2; pour que A soit un carré, il faut que x, y et x^2-y^2 le soient. Posons $x=p^2$, $y=q^2$: $x^2-y^2=p^4-q^4$ doit être également un carré. p et q étant premiers entre eux, il en est de même de p^2+q^2 et p^2-q^2 : ces deux dernières expressions doivent être des carrés. Posons donc

$$p^2+q^2=r^2, \quad p^2-q^2=s^2. \quad \text{d'où} \quad q^2+s^2=p^2 \quad \text{et} \quad s^2+2q^2=r^2;$$

comme on a

$$(a^2-2b^2)^2+2(2ab)^2=(a^2+2b^2)^2,$$

on peut écrire

$$s=t^2-2u^2, \quad q=2tu, \quad r=t^2+2u^2,$$

de sorte qu'on aurait

$$p^2=q^2+s^2=t^4+4u^4,$$

c'est-à-dire un triangle t^2, $2u^2$, p, dont l'aire $A'=t^2u^2$ serait également un carré et serait beaucoup plus petit que le premier, car on a :

$$A=p^2q^2(p^4-q^4)=4t^2u^2(t^4+4u^4)(t^2+2u^2)^2(t^2-2u^2)^2>A'$$

puisque $t^2-2u^2=s\geq 1$.

Si donc la surface du premier triangle était un carré, on pourrait déduire de celui-ci un second triangle plus petit dont la surface serait aussi un carré, de celui-ci un troisième dans le même cas, et ainsi à l'infini, ce qui est impossible, puisque les nombres ne peuvent décroître indéfiniment.

COR. Il suit de là qu'on ne peut avoir $x^4-y^4=z^2$, ni $x^4-y^4=z^4$, ni $x^4+y^4=2z^2$, ni $4x^4-y^4=z^4$, ni $2x^4\pm 2y^4=z^2$.

EULER démontre de la même manière l'impossibilité des équations

$$x^3\pm y^3=z^3. \quad x^3\pm y^3=2z^3, \quad x^4+y^4=z^4, \quad x^4+2y^4=z^2.$$

LEGENDRE, celle de $x^5+y^5=z^5$, LAMÉ celle de $x^7+y^7=z^7$, etc.

LAGRANGE, LEGENDRE, GAUSS, LEJEUNE-DIRICHLET, LEBESGUE, ÉD. LUCAS et d'autres encore ont également fait usage de cette puissante méthode de démonstration.

5. *Trouver un triangle ayant même hypoténuse qu'un triangle donné.*

(DIOPHANTE).

La relation de Fibonacci

$$(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)=(a\alpha+b\beta)^2+(a\beta-\alpha b)^2=(a\alpha-b\beta)^2+(a\beta+\alpha b)^2$$

résout immédiatement cette question.

REMARQUE. La relation précédente a été généralisée de plusieurs façons, dont les suivantes :

(3) $$(a^2+kb^2)(\alpha^2+k\beta^2)=(a\alpha\pm kb\beta)^2+k(a\beta\mp b\alpha)^2.$$ (EULER).

(4) $$(a^2+kab+lb^2)(\alpha^2+k\alpha\beta+l\beta^2)=A^2+kAB+lB^2,$$
$$A=a\alpha-l\beta b,\quad B=a\beta+b\alpha+kb\beta.$$ (LAGRANGE).

(5) $$(a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)=(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)^2$$
$$+(a\beta-b\alpha-c\delta+d\gamma)^2+(a\gamma+b\delta-c\alpha-d\beta)^2+(a\delta-b\gamma+c\beta-d\alpha)^2.$$
(EULER).

(6) $$(a^2+b^2+c^2)^2=(a^2+b^2-c^2)^2+(2ab)^2+(2bc)^2.$$ (EULER).

(7) $$(a^2+b^2+\cdots+c^2)^2=(a^2+b^2+\cdots-c^2)^2+(2ac)^2+(2bc)^2+\cdots$$
(CATALAN).

(8) $$(a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2+(a\beta-\alpha b)^2$$
$$+(b\gamma-\beta c)^2+(c\alpha-\gamma a)^2.$$ (LAGRANGE).

On tire de (3) le moyen de résoudre $x^2+ky^2=u^2+kv^2$, et en faisant $k=l^2\pm m^2$, on trouve une solution de

$$x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+w^2.$$ (DE ROCQUIGNY).

On pourrait aussi employer les formules qui suivent :

(9) $$a^2+(a+5b)^2+(a+7b)^2=(a+b)^2+(a+3b)^2+(a+8b)^2$$
(PROTH).

(10) $$(a+2b)^2+(a+3b)^2+(a+7b)^2=(a+b)^2+(a+5b)^2+(a+6b)^2$$
(ID.)

(11) $$(a^2-b^2-c^2+d^2)^2+4(ac-bd)^2+4(ab+cd)^2$$
$$=(a^2-b^2+c^2-d^2)^2+4(ad+bc)^2+4(ab-cd)^2$$
(B. AF GENNÄS).

Quant au problème de trouver des carrés égaux à la somme de trois

carrés, on peut le résoudre par les identités suivantes :(*)

(12) $$(a^2+2b^2)^2=a^4+4a^2b^2+4b^4.$$ (DIOPHANTE).

(13) $$(a^2+a+1)^2=a^2+(a+1)^2+(a^2+a)^2.$$ (ID.)

(14) $$(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)^2=(a+c)^2(a+b)^2+(b+c)^2(a+b)^2+(c^2+ac+bc-ab)^2.$$ (CATALAN, NCM, I, 32).

(15) $$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(ad+bc)^2+4(ac-bd)^2.$$ (ED. LUCAS).

(16) $$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^2=(b-c)^2(c-a)^2+(c-a)^2(c-b)^2+(a-b)^2(b-c)^2.$$ (J. NEUBERG).

6. *Résoudre*

$$xy+1=t^2,\quad yz+1=u^2,\quad zx+1=v^2.$$ (DIOPHANTE).

On posera

$$y=\alpha x+\beta,\quad z=\gamma x+\delta,\quad \beta^2=4\alpha,\quad \delta^2=4\gamma,\quad (\alpha\delta+\beta\gamma)^2=4\alpha\gamma(\beta\delta+1).$$

EULER a généralisé ce problème. DIOPHANTE a traité la même question étendue au cas de quatre inconnues ; ED. LUCAS en a donné la solution générale que voici :

$$x=\lambda,\quad y=\mu(\lambda\mu+2),\quad z=(\mu+1)(\lambda\mu+\lambda+2),$$
$$w=4(\lambda\mu+1)(\lambda\mu+\lambda+1)(\lambda\mu^2+\lambda\mu+2\mu+1).$$

7. *Trouver deux nombres tels que la somme de leurs carrés ajoutée à leur produit fasse un carré* (DIOPHANTE).

Posons $x^2+x+1=z^2$, $x=\lambda-z$, on aura

$$z=\frac{\lambda^2+\lambda+1}{2\lambda+1},\quad x=\frac{\lambda^2-1}{2\lambda+1}$$

changeons x et z en $\frac{x}{y}$ et $\frac{z}{y}$, il viendra la solution

$$x=\lambda^2-1,\quad y=2\lambda+1,\quad z=\lambda^2+\lambda+1.$$

(*) A rapprocher de celles-ci :

$$(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)^2=a^2(a+b+c)^2+b^2(a+b+c)^2+c^2(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)^2.$$ (J. NEUBERG).

$$(a^2+b^2+c^2)^3=\Sigma(a^3-3ac^2-2b^2c+ab^2)^2.$$ (REALIS).

$$(a^2+b^2)^3=(3a^2b-b^3)^2+(a^3-3ab^2)^2.$$ (EULER).

$$(a^2+b^2)^5+(a^3-b^3)^5=(a^5+ab^2)^2+(a^3-ab^2)^2.$$ (DE ROCQUIGNY).

$$(a^6+7a^3b^3+b^6)^2=(a^4+2ab^3)^3+(b^4+2a^3b)^3+(3a^2-b^2)^3.$$ (CATALAN).

$$a^3(a^3+b^3)^3=b^3(a^3+b^3)^3+a^3(a^3-2b^3)^3+b^3(2a^3-b^3)^3.$$ (EULER).

$$(6a^3+b^3)^3=(6a^3-b^3)^3+(6a^2b)^3+2(b^3)^3.$$ (CATALAN).

$$(a^2+b^2)^4=(a^4-6a^2b^2+b^4)^2+16(a^2-b^2)^2a^2b^2.$$ (ID.)

$$a^3+(a+3b)^3=(a+b)^3+(a+2b)^3+4b^3.$$ (ID.)

Cor. *Trouver trois triangles dont les aires soient égales* (Diophante). Comme le remarque Diophante, l'équation $xy + x^2 + y^2 = z^2$ qu'on vient de résoudre, entraîne les relations

$$2zx\,(z^2 - x^2) = 2zy\,(z^2 - y^2) = 2z\,(x+y)\,[(x+y)^2 - z^2]$$

d'où, en faisant $\lambda = 2$, les triangles 40, 42, 58; 24, 70, 74; 15, 112, 113 (solution de Diophante).

Fermat annonce qu'on peut trouver une infinité de triangles de ce genre.

8. L'équation $ax^2 + bx + c = y^2$ se résout aisément dans les cas suivants énumérés par Euler :

$$c = 0, \quad a = \alpha^2, \quad c = \beta^2, \quad a - b + c = \gamma^2, \quad b^2 - 4ac = \delta^2.$$

De même $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = y^2$ se résout dans certains cas par le procédé suivant, dû à Fermat. Si $a = \alpha^2$ ou si $e = \varepsilon^2$, on assimilera le premier membre au carré de $\alpha + ux + vx^2$ ou $u + vx + \varepsilon x^2$, et on disposera de u et de v de manière à obtenir une égalité de la forme $Ax = B$. Connaissant une solution $x = p$, on en trouvera une autre en changeant x en $y + p$, et ainsi de suite.

Euler traite aussi les cas analogues de l'équation

$$a + bx + cx^2 + dx^3 = y^2$$

en assimilant le premier membre au carré d'une expression du premier ou du second degré. Il remarque que si $x = p$ est une solution de

$$a + bx^4 = y^2, \quad \text{ou de} \quad a + bx^2 + cx^4 = y^2,$$

on en aura une autre en changeant x en $y + p$, ou $p\dfrac{1+y}{1-y}$, ce qui complète la solution de Fermat.

Applications I. *Trouver trois nombres tels que la somme des carrés de deux quelconques d'entre eux augmentée du nombre a fasse un carré* (Diophante). On est ramené à ce problème d'Euler : *trouver trois nombres* x, y, z, *tels que les sommes* $x^2 + y^2$, $y^2 + z^2$, $z^2 + x^2$ *soient des carrés*, ou, si l'on veut, à celui-ci : *déterminer un orthoèdre*(*) *dont les trois diagonales superficielles soient rationelles*(**).

(*) Au lieu de *parallélipipède* et *parallélipipède rectangle*, pourquoi ne dit-on pas *rhomboèdre* et *orthoèdre*, comme *rhombe* et *rectangle*?

(**) Les identités (12), (13), (14), (15), (16) résolvent la question de *trouver un orthoèdre dont les diagonales solides soient des nombres entiers*.

Il y aurait tout une étude à faire du trièdre trirectangle en nombres entiers, soit comme faces, soit comme arêtes.

EULER pose $x = \frac{u^2-1}{2u}$, $y = \frac{v^2-1}{2v}$, $v = \frac{u\lambda+1}{u+\lambda}$

et assimile la formule $u^2(v^2-1)^2 + v^2(u^2-1)^2$ au carré de $\lambda u^2 + (\lambda^2+1)u + \lambda$, ce qui donne

$$u = -\frac{4\lambda}{\lambda^2+1}, \quad v = \frac{1-3\lambda^2}{\lambda^3-3\lambda}.$$

Pour $\lambda = 2$, on a $x = 429$, $y = 2340$, $z = 880$.

EULER ajoute que p, q, r étant une solution, pq, qr, rp en est une autre : il y en a donc une infinité.

M. ESCOTT (I. M. 1901, pp. 103 et 180) donne une autre solution, qui le conduit aux nombres 442, 240, 117, différents de ceux d'EULER : 117, 44, 240.

II. *Trouver quatre nombres tels que leurs produits deux à deux augmentés de l'unité fassent des carrés* (EULER). Soient λ, μ, $\lambda+\mu+2\nu$, x les quatre nombres ; $\lambda x + 1$, $\mu x + 1$ et $(\lambda+\mu+2\nu)x + 1$ doivent être des carrés. On a ainsi

$$1 + 2(\lambda+\mu+\nu)x + [(\lambda+\mu+\nu)^2 - 1]x^2 + \lambda\mu(\lambda+\mu+2\nu)x^2 = y^2.$$

Assimilant le premier membre au carré de $1 + (\lambda+\mu+\nu)x - \frac{x}{2}$, il vient $x = 4(\lambda\mu+1)(\lambda+\mu+\nu) + \lambda\mu\nu$.

III. *Trouver un triangle dont l'hypoténuse soit un carré, ainsi que la somme de ses cathètes* (FERMAT). Solution d'EULER. Les deux cathètes étant $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, on posera $u = \lambda^2 - \mu^2$, $v = 2\lambda\mu$. Il faut que $x + y = \lambda^4 + 4\lambda^3\mu - 6\lambda^2\mu^2 - 4\lambda\mu^3 + \mu^4$ soit un carré, qu'on supposera égal à celui de $\lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2$. De là $\lambda = \frac{3}{2}\mu$ et $\mu = -119$, solution à rejeter. Posons donc $\lambda = \frac{3}{2}\mu + \nu$, on arrivera à la formule

$$\mu^4 + 296\mu^3\nu + 408\mu^2\nu^2 + 160\mu\nu^3 + 16\nu^4,$$

qui, assimilée au carré de $\mu^2 + 148\mu\nu - 4\nu^2$, donnera successivement

$$\mu = 84, \quad \nu = 1343, \quad \lambda = 1469$$
$$x = 4565486027761, \quad y = 1061652293520.$$

LAGRANGE a montré que ces nombres sont bien les plus petits qui répondent à la question, comme l'avait affirmé FERMAT.

FERMAT et FRÉNICLE ont traité beaucoup de problèmes difficiles du même genre, ceux-ci entre autres : *Quel est le plus petit nombre qui soit*

p fois et non davantage un n gone, ou somme des cathètes d'un triangle? (FERMAT).

Trouver trois triangles dont les aires soient les côtés d'un triangle donné (ID.).

De combien de triangles un nombre donné est-il la somme des deux cathètes? (ID.).

Trouver le plus petit nombre qui soit p fois et non davantage hypoténuse (FRÉNICLE).

Combien de triangles ont-ils de fois un nombre donné pour hypoténuse, ou différence des cathètes, ou surface? (ID.).

Trouver p triangles ayant même surface (ID.).

IV. *Trouver trois carrés tels qu'on trouve des carrés en retranchant l'un quelconque des trois de la somme des deux autres* (EULER) $x^2+y^2-z^2$ et $x^2+z^2-y^2$ seront des carrés si on pose

$$x=r^2+s^2,\quad y=r^2+rs-s^2,\quad z=r^2-rs-s^2.$$

Pour que $y^2+z^2-x^2$ le soit aussi, on doit avoir $4r^4-4r^2s^2+s^4=k^2$. Faisons $r=\lambda s$, $\lambda=2+\mu$; il faudra poser

$$1+16\mu+20\mu^2+8\mu^3+\mu^4=(1+8\mu+\mu^2)^2$$

d'où

$\mu=-\frac{25}{4}$, puis $\lambda=-\frac{15}{4}$, $r=15$, $s=4$, $x=241$, $y=269$, $z=149$.

Ed. LUCAS a résolu ce problème d'une manière générale. On trouve ce problème et beaucoup d'autres analogues, tous des plus intéressants, dans les *Comm. Arith* d'Euler.

BIBLIOGRAPHIE.

Ueber eine zeitgemässe Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen von F. KLEIN, mit einem Abdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von E. GÖTTING und F. KLEIN. Leipzig und Berlin, Teubner, 1904 (In-8 de IV-82 pages). Prix : 1 marc 60.

Conférences, notes et articles conduisant tous à ces conclusions : 1° Il faut introduire dans l'enseigement mathématique des gymnases, des Realgymnasien et des Realschulen les notions de fonction, de dérivée et d'intégrale et faire connaître leurs représentations géométriques; 2° par compensation, supprimer des programmes actuels quelques parties dont l'utilité est moins grande aujourd'hui que celle de ces premiers principes du calcul infinitésimal; 3° se servir de ceux-ci pour rendre plus solide et plus fructueux l'enseignement des mathématiques appliquées.

Des vues semblables ont triomphé récemment en France, comme M. Neuberg l'a fait remarquer à propos de l'excellent ouvrage de MM. Jules et Paul Tannery intitulé : *Notions de mathématiques. Notions historiques* (*Mathesis*, 1903, pp. 250-251).

Il en sera sans doute prochainement de même en Belgique. (P. M.).

Introduction à la géométrie générale, par G. Lechalas, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. Paris, Gauthier-Villars, 1904 (In-18 de IX-58 pages). Prix : fr. 1,75.

Sommaire. 1. Symétrie et retournabilité et géométrie sphérique dans la géométrie euclidienne à une, deux ou trois dimensions. 2. La géométrie euclidienne à quatre dimensions : on peut y superposer deux tétraèdres symétriques par rapport à un plan et y placer un espace sphérique à trois dimensions, où l'on peut retourner une sphère et qui est *identique* à l'espace riemannien. 3. Géométrie des espaces à courbure constante négative.

On peut admettre, ce nous semble, presque tous les résultats de l'auteur, sauf que selon nous, au lieu de *identique*, il faut *identique dans ses propriétés intrinsèques*, comme nous l'avons dit autrefois dans un *Supplément* de *Mathesis*.

(P. M.).

Géométrie imaginaire et géométrie positive. Démonstrations logiques du postulat d'Euclide par A. Liasse, ancien élève de l'École Polytechnique. Paris, de Rudeval, 1905 (IV-72 pp. in-12). Prix : 1 fr. 50.

Dans le premier chapitre de cet opuscule, l'auteur qui, évidemment, ne connait la géométrie non euclidienne et son histoire que de seconde main, en donne une idée vague, sans précision, et la déclare contraire au fonctionnement normal et naturel de l'esprit humain et à ses intuitions les plus claires (pp. 22-23) ! Dans le second chapitre et dans l'appendice, il démontre le postulatum d'Euclide de deux manières différentes, en s'appuyant chaque fois sur un postulat équivalent, mais de forme plus compliquée.

Premier postulat de M. Liasse (p. 30). *Dans un quadrilatère ayant ses quatre angles égaux et, par suite, ses côtés opposés égaux, l'angle* (a, b) *de deux côtés adjacents* a, b, *est fonction du rapport* $(a : b)$. — En réalité, on prouve, sans recourir au postulatum d'Euclide, que l'on a *ou bien angle* (a, b) indépendant de a et de b, *ou bien* fonction de a et de b et non de leur rapport seulement, la relation étant $\cos(a, b) = \operatorname{ch}\frac{1}{2}a \operatorname{ch}\frac{1}{2}b$. En admettant son postulat, M. Liasse exclut la seconde hypothèse et admet, par suite, la première équivalente évidemment au postulatum d'Euclide.

Second postulat de M. Liasse (p. 54). *La relation entre un angle* $A = BAC$ *inscrit dans une circonférence* ABC *de rayon* r *et l'angle* $BOC = O$ *au centre correspondant est indépendante du rayon.* — On prouve, encore sans recourir au postulatum d'Euclide, que cette relation est $A = \frac{1}{2}O$, *ou bien*

$$\sin\tfrac{1}{2}O = \frac{2 \sin A \operatorname{ch} r}{1 + \cos A + \operatorname{ch}^2 r (1 - \cos A)}.$$

En admettant son second postulat, M. Liasse exclut la seconde hypothèse et,

par suite, admet la première, encore une fois, équivalente au postulatum d'Euclide.

Il n'y a rien de si facile que de démontrer celui-ci, quand on admet un autre postulat. (P. M.).

Calculo differencial por el Dr. Z. G. de Galdeano, catedratico en la Universidad de Zaragoza, etc. Zaragoza, Casañal, 1904 (In-8° de XII-270 pp.). Prix : 5 pesetas.

Faute de temps et d'espace, nous ne pouvons donner qu'un aperçu du programme que l'auteur a essayé de réaliser, sans pouvoir apprécier jusqu'à quel point il a réussi à le faire avec simplicité et rigueur. Nous nous contentons donc de donner l'indication du contenu des seize chapitres dont se compose l'ouvrage.

I. *Principes.* 1. Notions sur les ensembles. 2. Infiniment petits. 3. Séries. 4. Dérivées et différentielles, déterminants fonctionnels. 5. Changement de variables. 6. Elimination des constantes et des fonctions arbitraires. 7. Calcul des différences finies direct et inverse; interpolation. 8. Notions de calcul intégral.

II. *Applications analytiques.* 1. Développements en série des fonctions réelles (développement de Taylor). 2. Développements en séries de quelques fonctions de variables imaginaires. 3. Théorèmes de Laplace et de Lagrange. 4. Décomposition des fractions rationnelles. 5. Produits infinis. 6. Extension de la formule de Taylor aux fonctions de plusieurs variables. 7. Expressions indéterminées. 8. Maxima et minima.

Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. II. Theil : **Integral-Rechnung** von Dr. L. Kiepert, Professor an der technischen Hochschule zu Hannover. Achte verbesserte und vermehrte Auflage des Leifadens von weil. Dr. M. Stegemann. Hannover, 1903, Helwingsche Verlagsbuchhandlung. (In-8° de XX-666 pp. avec 143 fig. dans le texte). Prix : 12 marcs.

Manuel très pratique et très complet de calcul intégral pour les aspirants ingénieurs, mais ça et là trop peu rigoureux. Voici l'indication des matières traitées dans les divers chapitres. I. 1. Premiers principes. 2-4. Intégration par substitution, par décomposition ou par parties. 5. Quadrature des courbes planes. 6. Cubature des solides de révolution. 7. Rectification des courbes planes. 8. Aire des surfaces de révolution. 9. Rectification des courbes gauches. II. 10. Intégration des fractions rationnelles. 11. Intégration des fonctions irrationnelles. 12. Théorie des intégrales définies. 13. Cubatures des corps quelconques; aire des surfaces quelconques; intégrales multiples. 14. Intégration des différentielles de plusieurs variables. 15-16. Équations différentielles du premier ordre ou d'ordre supérieur. 17. Équations différentielles linéaires d'ordre quelconque. 18. Équations différentielles simultanées. *Appendice.* Table des intégrales elliptiques (4 pp.). Tables des formules les plus importantes du calcul intégral (41 pp.).

Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis von Schlömilch. I. Teil. **Aufgaben aus der Differentialrechnung.** Fünfte Auflage bearbeitet

von Dr. E. Naetsch, a.-o. Professor an der Kgl. technischen Hochschule zu Dresden. Leipzig, Teubner, 1904 (VIII-372 pp. in-8°). Prix : 8 marcs.

Nouvelle édition soigneusement revue et retouchée du meilleur recueil de problèmes de calcul différentiel qui ait paru en Allemagne. Introduction : limites de fonction. 1. Première différentiation. 2. Différentiations successives. 3. Différentiation des fonctions implicites. Changement de variables. 4. Discussion des courbes planes. 5. Développées, podaires, lieu du pied des normales et des tangentes polaires. 6. Courbes à double courbure. 7. Surfaces. 8. Courbes et surfaces enveloppes. 9. Valeur des expressions de forme indéterminée. 10. Maxima et minima. 11. Séries. Sommation approchée. Solution des équations transcendantes. 12. Séries et fonctions où la variable est complexe.

En tête de chacun des chapitres, il y a un résumé des principes relatifs aux questions qui y sont proposées.

L'*Uebungsbuch* de Schlömilch, dont la première édition date de 1868, est un manuel classique excellent comme le recueil analogue de Frenet. (P. M.)

J.-A. Serret. **Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung**, bearbeitet von A. Harnack. Zweite durchgesehene Auflage, mit Unterstützung der Herren H. Liebmann und E. Zermelo herausgegeben von G. Bohlmann. Zweiter Band. Integral-rechnung. Dritter Band. Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Leipzig, B. G. Teubner, 1899-1904 (In-8° de XII-428 pp. et 55 figures dans le texte; XII-480 pp. et 10 figures dans le texte). Prix : 8 marcs et 9 marcs.

Alfred Serret (1819-1885) a publié en 1868, le *Cours de calcul différentiel et intégral* qu'il professait à la Sorbonne. Cet ouvrage eut un grand succès, parce qu'il était écrit avec ordre et clarté et qu'il contenait toutes les parties les plus accessibles de l'analyse infinitésimale, et cependant, il était un peu en retard au point de vue scientifique, particulièrement dans les questions relatives à la théorie générale des fonctions d'une variable imaginaire. Il eut plusieurs éditions françaises sensiblement identiques à la première et fut traduit en allemand, en 1885, par le regretté A. Harnack qui y introduisit de nombreuses additions et améliorations. Une seconde édition allemande fut bientôt nécessaire. Le calcul différentiel a paru en 1897 et est déjà épuisé, une troisième édition est sous presse.

Voici l'indication des principales modifications introduites dans les deux volumes de la seconde édition allemande du calcul intégral. I. Définition d'une intégrale comme limite de somme ; représentation graphique et numérique de la fonction gamma ; intégrales curvilignes ; théorie du planimètre polaire ; théorie des fonctions d'une variable complexe et de leurs intégrales ; résumé de la théorie des séries de Fourier, par Harnack. Le volume se termine par d'excellentes indications bibliographiques et un index bien fait. II. Transformations infinitésimales et transformations de contact dans la théorie des équations différentielles ; intégration des équations linéaires au moyen de développements en série à variable complexe. Calcul des variations entièrement remanié, mais sans pénétrer dans les parties trop difficiles de cette discipline. Appendice dû à Harnack sur l'intégration des équations aux dérivées partielles au moyen de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Bibliographie. Index.

Le manuel de Serret, corrigé et augmenté d'abord par Harnack, puis par Bohlmann et Zermelo, est, dans son genre, l'un des meilleurs que l'on puisse recommander aux professeurs et aux élèves.

La librairie Gauthier-Villars (55, quai des Grands-Augustins) vient de publier, comme chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1904. — Ce petit volume compact contient, comme toujours, une foule de renseignements indispensables à l'ingénieur et à l'homme de science. Parmi les Notices de cette année, signalons tout spécialement celle de M. P. Hatt, **Explication élémentaire des marées.** In-16 de près de 800 pages avec figures : 1 fr. 50 (franco, 1 fr. 85).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 1466.

(Voir *Mathesis*, (3); IV, p. 103)

Soient D, E, F *les points où les côtés a, b, c d'un triangle* ABC *touchent respectivement les cercles exinscrits* I', I'', I''' *de rayon r', r'', r'''. Si la circonférence* DEF *passe par le sommet* A, *on a les relations*

1. $\dfrac{a}{p-a} = \dfrac{b}{p-b} + \dfrac{c}{p-c}$, 2. aire $\mathrm{I'BC} = \mathrm{I''CA} + \mathrm{I'''AB}$,

3. $\sin^2\dfrac{A}{2} = \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2}$, 4. $\cos B + \cos C = 2\cos^2\dfrac{A}{2}$,

5. $$\cos A = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{2R},$$

6. $$\cos B = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r'''}{2R},$$

7. $$\cos C = 2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{r''}{2R},$$

8. $$1 = 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} = \frac{r'}{2R},$$

9. $$\overline{AD}^2 = p^2 - 2bc\ (*).$$

D *est le centre du cercle circonscrit au triangle* I'I''I''', *et les rayons r, r''', r'' sont doubles des distances du centre* O *du cercle circonscrit aux côtés a, b, c. Les angles* DEA, DFA *sont droits. La circonférence* DEF

(*) Énoncé rectifié.

passe par le pied de la symédiane menée par I *dans le triangle* IBC, *et par la projection de* D *sur la bissectrice* I''I'''. (J. NEUBERG)

Solution par MM. WEBER (Liége), DELAHAYE (Roye), EMMERICH, DUPONT et ANGELESCU (Ploesti). Soit P le point où la circonférence DEF coupe une seconde fois le côté BC. Si cette courbe passe par A, on a

$$BP \cdot BD = BA \cdot BF, \quad CD \cdot CP = CE \cdot CA,$$

d'où l'on tire

$$BP = c\frac{p-a}{p-c}, \quad CP = b\frac{p-a}{p-b}.$$

Or, $BP + PC = a$; donc

$$\frac{a}{p-a} = \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c}. \tag{1}$$

En éliminant $p-a$, $p-b$, $p-c$ au moyen de

$$T = (p-a)\,r' = (p-b)\,r'' = (p-c)\,r''',$$

on trouve

$$ar' = br'' + cr''', \quad \text{ou} \quad I'BC = I''CA + I'''AB.$$

La relation (1) peut s'écrire

$$\frac{(p-b)(p-c)}{bc} = \frac{(p-a)(p-c)}{ac} + \frac{(p-a)(p-b)}{ab},$$

d'où l'on conclut

$$\sin^2\frac{A}{2} = \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}, \tag{3}$$

relation qu'on peut encore déduire de (1) en remplaçant les numérateurs par 2R sin A, 2R sin B, 2R sin C et les dénominateurs par

$$r\cot\frac{A}{2}, \quad r\cot\frac{B}{2}, \quad r\cot\frac{C}{2}.$$

Au moyen de la formule

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha,$$

la relation (2) se transforme aisément en celle-ci

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \cos B + \cos C. \tag{4}$$

Appliquons la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ aux triangles IBC, I'BC, I''CA, I'''AB, mais en remplaçant les côtés de chacun de ces

triangles par les sinus des angles opposés qui leur sont proportionnels; nous aurons les formules connues

$$\cos^2\frac{A}{2} = \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} + 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2},$$

$$\cos^2\frac{A}{2} = \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} - 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2},$$

$$\cos^2\frac{B}{2} = \cos^2\frac{C}{2} + \cos^2\frac{A}{2} - 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2},$$

$$\cos^2\frac{C}{2} = \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} - 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

En combinant la relation (3) par addition avec la seconde de ces formules et par soustraction avec les trois autres, et se rappelant les valeurs de r, r', r'', r''' en fonction de R, A, B, C, on obtient les égalités (6), (5), (7) et (8).

Les distances δ_a, δ_b, δ_c du centre O du cercle ABC aux côtés du triangle ABC ont pour expressions

$$\delta_a = R\cos A, \quad \delta_b = R\cos B, \quad \delta_c = R\cos C;$$

on conclut de là et des relations (5), (6), (7):

$$r = 2\delta_a, \quad r''' = 2\delta_b, \quad r'' = 2\delta_c. \quad r' = 2R.$$

D'après un théorème connu, le cercle circonscrit au triangle I'I''I''' a pour rayon 2R et son centre est à l'intersection des droites I'D, I''E, I'''F; comme $r' = 2R$, ce centre est nécessairement le point D, et les droites I''E, I'''F concourent en D.

Le segment AD est donc un diamètre du cercle DEFA. Pour obtenir sa valeur, observons que.

$$\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{CE}^2$$
$$= (p-c)^2 + (p-b)^2 - (p-a)^2 = p^2 - 2bc.$$

Enfin,

$$\frac{BP}{CP} = \frac{c(p-b)}{b(p-c)} = \frac{\sin C}{\sin A}\cdot\frac{\cot\frac{B}{2}}{\cot\frac{C}{2}} = \frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{B}{2}} = \frac{\overline{BI}^2}{\overline{CI}^2},$$

ce qui démontre que IP est une symédiane du triangle IBC.

REMARQUE. On sait que les triangles ABC, II″I‴ sont entre eux comme r' : 2R; donc dans la figure actuelle ces triangles sont équivalents. (WEBER).

×Question 1478.

(Voir *Mathesis*, (3) IV; p. 176)

A un cercle O *on inscrit un hexagone* DEFD′E′F′ *dont les côtés opposés sont parallèles. Désignons les points des concours des diagonales et des côtés non consécutifs comme suit :*

$$(DD', EE') \equiv A, \quad (EE', FF') \equiv B, \quad (FF', DD') \equiv C;$$
$$(DF', EF) \equiv A', \quad (DF', E'D') \equiv B', \quad (EF, E'D') \equiv C';$$
$$(D'F, E'F') \equiv A'' \quad (D'F, ED) \equiv B'' \quad (E'F', ED) \equiv C''.$$

Cela posé. 1° O *est le centre du cercle inscrit au triangle* ABC; 2° *les droites* A′A″, B′B″, C′C″ *passent respectivement par* A, B, C *et par les points de contact de* BC. CA, AB *avec le cercle inscrit au triangle* ABC; *leur point de concours est le point de Gergonne du triangle* ABC *et le point de Lemoine des triangles* A′B′C′, A″B″C″; 3° *la circonférence de centre* A *et de rayon* AD *rencontre* EF, DF′ *en des points* G, H *situés sur la parallèle à* FF′ *menée par* A. (A. C.).

Solution par M. EMMERICH. 1° Les trapèzes isoscèles DED′E′, EFE′F′, FDF′D′ montrent l'égalité des diagonales DD′, EE′, FF′. Ces droites sont donc à des distances égales du centre O; par conséquent, O est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

2° Les triangles A′DE, A″D′E′ ayant leurs côtés correspondants parallèles, on en conclut que A′A″ passe au point de concours A de DD′, EE′. Si le cercle inscrit au triangle ABC touche BC en α, α est le milieu de la diagonale FF′ du parallélogramme A′FA″F′; par conséquent, l'autre diagonale A′A″ passe aussi par α.

Le point de concours Z de Aα, Bβ, Cγ est le point de Gergonne du triangle ABC suivant la définition de ce point. FF′ étant antiparallèle à DE et D′E′ par rapport aux angles A′ et A″, les médianes A′α, A″α des triangles A′FF″, A″FF′ sont des symédianes dans les triangles A′B′C′, A″B″C″; il s'ensuit que Z est le point de Lemoine des triangles A′B′C′, A″B″C″.

3° La circonférence de centre A et de rayon AD produit les triangles isoscèles ADH, HEG respectivement semblables aux triangles CDF', BEF, ce qui démontre la dernière partie de la proposition.

Remarque. Cette question se rattache à la théorie des cercles de Tucker. En effet, si l'on part d'un triangle quelconque A'B'C' et qu'on mène par un point quelconque A de la symédiane A'α deux antiparallèles aux côtés adjacents, on obtient quatre points D, D', E, E' d'un cercle de Tucker.

Solutions analogues par MM. Bastin, R. Desprets et E. Weber.

Question 1482.

(Voir *Mathesis*, (3) IV, p. 215)

Trouver une courbe telle que la somme ou la différence des projections de l'ordonnée sur la tangente et la normale en un même point de la courbe reste constante. (J. Neuberg)

Solution par MM. Abramescu et Rose. Les deux projections ont pour valeurs absolues

$$y \sin \alpha = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad y \cos \alpha = \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}},$$

où α est l'inclinaison de la tangente sur Ox. L'équation différentielle du problème est donc

$$y(y' \pm 1) = a\sqrt{1+y'^2},$$

ou

$$(y^2 - a^2)\,y'^2 \pm 2y^2y' + y^2 - a^2 = 0, \qquad (1)$$

a représentant une constante positive ou négative. Ne considérons que le signe — devant le terme $2y^2y'$; alors c'est la somme ou la différence des projections qui est égale à a suivant que y' est négative ou positive et la transition d'un cas à l'autre sur la même courbe se fait généralement aux points en lesquels $y' = 0$ ou bien $y' = \infty$.

On a

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + a\sqrt{2y^2 - a^2}}{y^2 - a^2},$$

ou

$$dx = \frac{y^2 - a^2}{y^2 + a\sqrt{2y^2 - a^2}}\,dy = \frac{y^2 - a\sqrt{2y^2 - a^2}}{y^2 - a^2}\,dy,$$

le double signe du radical pouvant être attribué à la constante a.

Il en résulte

$$x+c=\int\frac{y^2dy}{y^2-a^2}-a\int\frac{\sqrt{2y^2-a^2}}{y^2-a^2}dy,$$

c étant la constante d'intégration.

La première intégrale se transforme en

$$\int\frac{y^2-a^2+a^2}{y^2-a^2}dy=\int dy+a^2\int\frac{dy}{y^2-a^2}=y+\frac{1}{2}al\frac{y-a}{y+a}.$$

La seconde intégrale peut s'écrire

$$\int\frac{2(y^2-a^2)+a^2}{(y^2-a^2)\sqrt{2y^2-a^2}}dy,$$

et se décompose en deux autres :

$$I_1=2\int\frac{dy}{\sqrt{2y^2-a^2}}=\sqrt{2}\int\frac{d(y\sqrt{2})}{\sqrt{(y\sqrt{2})^2-a^2}}=\sqrt{2}l(y\sqrt{2}+\sqrt{2y^2-a^2});$$

$$I_2=\int\frac{a^2dy}{y^3\left(1-\frac{a^2}{y^2}\right)\sqrt{2-\frac{a^2}{y^2}}}.$$

Si l'on fait

$$2-\frac{a^2}{y^2}=z^2,\quad\text{d'où}\quad\frac{a^2dy}{y^3}=zdz,$$

on obtient

$$I_2=\int\frac{zdz}{(z^2-1)z}=\frac{1}{2}l\frac{z-1}{z+1}.$$

Par suite, l'équation cherchée est

$$x+c=y+\frac{1}{2}al\frac{y-a}{y+a}-a\sqrt{2}l(y\sqrt{2}+\sqrt{2y^2-a^2})$$

$$-\frac{1}{2}al\frac{\sqrt{2y^2-a^2}-y}{\sqrt{2y^2-a^2}+y}.$$

Étant donnée une courbe satisfaisant au problème, on obtient toutes les autres soit en imprimant à la première une translation parallèle à $O\varpi$, soit en construisant ses symétriques par rapport à une perpendiculaire quelconque à Ox. (J. N.).

×Question 1490.

(Voir *Mathesis*, (3), IV, p. 240)

On considère un triangle sphérique ABC *dans lequel une médiane* m_a *est le supplément de la moitié du côté correspondant* a. 1° *Démontrer que la surface de ce triangle est égale à celle du fuseau droit;* 2° *établir la relation*

$$\operatorname{cotg} R = \operatorname{cotg}\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\frac{c}{2},$$

a, b, c *désignant les côtés du triangle et* R, *le rayon du cercle circonscrit.* (Concours de l'enseignement moyen en Belgique; 1904).

Solution par M. E. Barbette. 1° La médiane m_a est donnée par la relation (*)

$$\cos m_a = \frac{\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}-1}{\cos\frac{a}{2}}.$$

Lorsque $m_a = \pi - \frac{a}{2}$, cette relation devient

$$\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}-1=0.$$

Par suite,

$$\cos E = \frac{\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}-1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}} = 0$$

c.-à-d. que $E = 90°$; or, le rapport de la surface S du triangle à la surface F du fuseau droit égale le rapport de la moitié de l'excès sphérique à 90° ou 1 :

$$\frac{S}{F} = \frac{E}{90°} \text{ ou } 1.$$

(*) Voir *Cours de Trigonométrie*, par E. Barbette, pp. 248, 245, 206.

2° La relation

$$\frac{\sin(A-E)\sin(B-E)\sin(C-E)}{\sin E} = \operatorname{cotg}^2 R,$$

peut s'écrire, en observant que $E = 90°$,

$$\sin(A-E)\sin(B-E)\sin(C-E) = \operatorname{cotg}^2 R, \qquad (1)$$

Or,

$$\operatorname{cotg} R = \operatorname{cotg}\frac{a}{2}\sin(A-E), \qquad (2)$$

$$\operatorname{cotg} R = \operatorname{cotg}\frac{b}{2}\sin(B-E), \qquad (3)$$

$$\operatorname{cotg} R = \operatorname{cotg}\frac{c}{2}\sin(C-E). \qquad (4)$$

D'où, en multipliant ces quatre dernières relations,

$$\operatorname{cotg} R = \operatorname{cotg}\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\frac{c}{2}.$$

Solution par M. PLOUMEN. 1° On a la relation

$$\cos b + \cos c = 2\cos\frac{a}{2}\cos\alpha;$$

mais $\frac{a}{2} + \alpha = 180°$, donc

$$\cos b + \cos c = -2\cos^2\frac{a}{2} = -1 - \cos a,$$

ou

$$\cos a + \cos b + \cos c + 1 = 0. \qquad (1)$$

Puisque

$$\cos E = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

on a

$$\cos E = 0 \quad \text{ou} \quad E = 1 \textit{ droit}.$$

Par suite,

$$\frac{ABC}{T} = \frac{2E}{1dr.} = 2 \quad \text{ou} \quad ABC = 2T = 1 \text{ fuseau droit}.$$

2° Du pôle O du cercle circonscrit au triangle ABC, abaissons l'arc OD

perpendiculaire sur BC. Dans le triangle rectangle OBD on a

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \operatorname{tg} R \cos\frac{B+C-A}{2}$$

ou

$$\operatorname{cotg} R = \operatorname{cotg}\frac{a}{2}\cos\frac{B+C-A}{2}.$$

Mais

$$\frac{B+C-A}{2} = E - A + 1dr. = 2dr. - A$$

et, par suite,

$$\operatorname{cotg} R = -\operatorname{cotg}\frac{a}{2}\cos A. \qquad (2)$$

Tirant alors cos A de $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, substituant dans (2) et tenant compte de (1), il vient :

$$\operatorname{cotg} R = \operatorname{cotg}\frac{a}{2}\frac{\cos b\cos c - \cos a}{\sin b \sin c} = \operatorname{cotg}\frac{a}{2}\frac{\cos b\cos c + \cos b + \cos c + 1}{\sin b \sin c}$$

ou

$$\operatorname{cotg} R = \operatorname{cotg}\frac{a}{2}\frac{4\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c}{\sin b \sin c} = \operatorname{cotg}\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\frac{c}{2}.$$

Solution par MM. F. Dupont, Rose et Abramescu. Soit AI la médiane issue de A. Dans tout triangle ABC, on a la relation connue

$$\cos b + \cos c = 2\cos\alpha\cos\tfrac{1}{2}a.$$

Or,

$$\cos\alpha = -\cos\tfrac{1}{2}a; \text{ donc } \cos b + \cos c + 2\cos^2\tfrac{1}{2}a = 0$$

ou

$$\cos a + \cos b + \cos c + 1 = 0,$$

ce qui rend nulle la valeur de cos E, E représentant la moitié de la surface ABC. Celle-ci a donc pour mesure deux droits, c'est-à-dire est la surface du fuseau droit.

La relation $\alpha = 180^\circ - \frac{1}{2}a$ entraîne la propriété analogue pour les deux autres côtés du triangle : car de l'égalité

$$\cos a + \cos b + \cos c + 1 = 0,$$

on tire, par exemple,

$$\cos a + \cos b = -2\cos^2 \tfrac{1}{2} c,$$

et comme

$$\cos a + \cos b = 2\cos \tfrac{1}{2} c \cos \gamma,$$

on voit que $\gamma = 180^\circ - \frac{1}{2} c$, γ représentant la médiane issue de C.

Si l'on désigne par M, N les milieux des côtés AC, AB, on peut écrire la formule connue $\cos MN = \cos \frac{1}{2} a \cos E$: on a donc, dans le cas présent, $\cos MN = 0$, d'où $MN = 90^\circ$ et de même $LM = MN = NL = 90^\circ$ et le triangle LMN est trirectangle.

Si P désigne l'angle formé par le prolongement de l'arc MN avec le côté BC, on aura la relation : $\sin P \sin MN = \sin E$, qui exige $P = 90^\circ$; donc les arcs joignant les milieux de deux côtés sont perpendiculaires sur le troisième.

La relation connue

$$\operatorname{cotg} R = \sin E \,.\, \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} a \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} b \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} c$$

devient, E étant égal à 90°,

$$\operatorname{cotg} R = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} a \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} b \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} c.$$

Remarque. La première partie de la question est la réciproque d'une application proposée dans les *Leçons de Trigonométrie*, par A. Cambier ; 6e édition, page 199.

Solution par A. Dalle (Malonne). 1° Dans le triangle A'BC obtenu en prolongeant les côtés AB et AC jusqu'à leur rencontre en A', la médiane correspondant au côté a vaut $\frac{1}{2} a$.

Appelons M le pied commun des médianes. Les triangles BMA' et CMA' sont isoscèles; d'où

$$A = 2\pi - (B + C);$$

donc

$$\text{Surf. } ABC = A + B + C - \pi$$

$$= 2\pi - (B + C) + B + C - \pi = \pi.$$

2° On sait que

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \operatorname{tg} R \cos (S - A), \quad (A + B + C = 2S)$$

ou

$$\operatorname{cotg} R = \operatorname{cotg} \frac{a}{2} \cos (S - A).$$

On trouve aisément

$$\operatorname{cotg}\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\frac{c}{2}=\frac{\cos(S-A)}{-\cos S}.$$

A cause du (1°), $S=\pi$, d'où

$$\operatorname{cotg} R=\operatorname{cotg}\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\frac{c}{2}.$$

Autre solution par M. R. Desprets.

×QUESTIONS D'EXAMEN.

1191. Trois voyageurs désirent se rendre dans le temps le plus court possible de A en B; la distance AB est de 25 kilomètres. Ils ne disposent que d'une voiture à deux places et conviennent que deux d'entre eux partiront en voiture et le troisième à pied au même moment. La voiture abandonnera en un certain point C les deux premiers voyageurs, qui auront à faire à pied le reste de la route, et elle retournera en arrière pour prendre le troisième voyageur qu'elle conduira au but. Déterminer le point C par la condition que les trois voyageurs arrivent en même temps en B. La vitesse de la voiture est de 12 kilomètres à l'heure, et celle des voyageurs à pied de 4 kilomètres. (*Ecole normale de Sèvres*, 1904.)

Soit D le point où se rencontrent le voyageur parti à pied de A et la voiture retournant de C vers A. Puisque les trajets de A en C en voiture et de C en B à pied se font dans le même temps que les trajets de A en D à pied et de D en B en voiture, on a nécessairement AD = CB, AC = DB.

Les deux premiers voyageurs mettent à parcourir CB à pied le même temps que la voiture à parcourir CD, DC et CB; celle-ci ayant une vitesse triple de celle des piétons, on a 2CD + CB = 3CB, d'où DC = CB = AD.

1192. Soient a, b, c trois nombres en progression arithmétique, b, c, d trois nombres en progression géométrique, et c, d, e trois nombres en progression harmonique. Démontrer que a, c, e sont en progression harmonique. (*J. de Vuibert*).

En éliminant b et d entre les relations

$$b=\frac{a+c}{2},\quad c^2=bd,\quad \frac{1}{d}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{e}\right),$$

on trouve $c^2=ae$.

1192. Une transversale rencontre les côtés d'un triangle ABC aux points A′, B′, C′, et les parallèles à cette transversale menées par A, B, C les coupent en A″, B″, C″. Démontrer que

$$AB'.BC'.CA' = AC'.BA'.CB' = A'A''.B'B''.C'C''.$$

(MERRIFIELD).

On connaît l'égalité des deux premiers produits. Multiplions membre à membre les relations

$$\frac{A''A'}{AB'} = \frac{A'C}{B'C'},\quad \frac{B''B'}{BC'} = \frac{B'A}{C'A'},\quad \frac{C''C'}{CA'} = \frac{C'B}{A'B}$$

en tenant compte de l'égalité connue, etc. (DE ALBA).

1194. Résoudre l'équation

$$\cos 2x = \sqrt{2}\,(\cos^3 x + \sin^3 x - \sin x\,(\cos^2 x - \sin^2 x \cos x).$$

L'équation se ramène à

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}\,(\cos x + \sin x)(1 - 2\sin x \cos x).$$

Une première solution est

$$\cos x + \sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} x = -1.$$

Une seconde est

$$(\cos x - \sin x)^2 = 2\,(1 - \sin 2x)^2,$$

d'où

$$\sin 2x = 1 \quad \text{ou} \quad 1 - \sin 2x = \frac{1}{2}.$$

1195. Trouver sur le côté AB d'un triangle ABC un point D tel que les volumes engendrés par les triangles BDC, DAC tournant autour de BC soient dans un rapport donné $m : 1$.

Si l'on mène AH et DE perpendiculaires à BC, on trouve

$$\text{vol BDC} : \text{vol BAC} = \frac{1}{3}\pi\,\overline{DE}^2.BC : \frac{1}{3}\pi\,\overline{AH}^2.BC = m : m + 1.$$

1196. D étant un point quelconque pris sur le côté AB du triangle, les volumes engendrés par les triangles ABD, ACD tournant autour de AD sont entre eux comme $\overline{BD}^2 : \overline{CD}^2$.

1197. Pour que le système.

$$x = by + cz,\quad y = ax + cz,\quad z = ax + by$$

admette une solution autre que $x = y = z = 0$, on doit avoir

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2. \qquad (J.\ de\ Vuibert).$$

Le système proposé peut prendre la forme

$$ax + by + cz = x\,(1 + a) = y\,(1 + b) = z\,(1 + c)$$

d'où l'on déduit

$$x=\frac{ax+by+cz}{1+a},\quad y=\frac{ax+by+cz}{1+b},\quad z=\frac{ax+by+cz}{1+c}.$$

En faisant la somme de ces égalités multipliées par a, b, c, on trouve

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1;$$

or

$$\frac{a}{1+a}=\frac{a+1-1}{1+a}=1-\frac{1}{1+a},\text{ etc.}$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1501**. On considère trois cercles tangents extérieurement deux à deux. Si ρ_1 et ρ_2 désignent les rayons des deux cercles tangents aux trois premiers, et si r est le rayon du cercle inscrit dans le triangle ayant pour sommets les centres de ces trois cercles on a la relation

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{4}{r}.$$

(E. N. Barisien).

×**1502**. ABCD étant un tétraèdre quelconque, on prend sur les arêtes BA, CA, DA les longueurs BB′, CC′, DD′ proportionnelles à trois longueurs données. Démontrer que le centre de gravité du triangle B′C′D′ décrit une droite, et que la sphère circonscrite au tétraèdre AB′C′D′ passe par un cercle fixe. (J. Neuberg).

1503. Soient M, N deux points quelconques donnés du plan d'un triangle ABC, et soit $A_1B_1C_1$ un triangle variable homothétique à ABC par rapport à M. Les droites AN, BN, CN rencontrent respectivement B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 aux points A_2, B_2, C_2. Trouver les enveloppes des côtés du triangle $A_2B_2C_2$, et de l'axe d'homologie des triangles $A_2B_2C_2$, ABC ou $A_2B_2C_2$, $A_1B_1C_1$. (Abramescu).

1504. Chercher une courbe rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy, telle que si en l'un quelconque M de ses points on mène l'ordonnée MP, la tangente qui coupe Ox en T, la normale qui coupe Oy en N′, on ait

$$\overline{TP}^2+\overline{ON'}^2=\overline{OM}^2.$$ (Rose).

×**1505**. Déterminer le triangle dont deux côtés et la surface sont représentés par a^2+b^2, a^2-b^2, $ab(a^2-b^2)$. (Barbette).

QUESTIONS NON RÉSOLUES DES DEUX PREMIÈRES SÉRIES.

×**513** (VI, p. 71, XI, p. 30). Vérifier l'identité

$$8^n \sum_{p=0} \left(\frac{1}{16}\right)^p [C_{2p,p}]^2 C_{n,2p} = \sum_{p=0} \frac{(C_{2n-2p,n-p} C_{2p,p})^2}{C_{n,p}}.$$

(E. CATALAN).

598 (VII, p. 280, XI, p. 31). Ayant posé

$$\alpha_1 = A\alpha + B\beta + C\gamma, \quad \beta_1 = A'\alpha + B'\beta + C'\gamma, \quad \gamma_1 = A''\alpha + B''\beta + C''\gamma;$$
$$\alpha_2 = A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1, \quad \beta_2 = A'\alpha_1 + B'\beta_1 + C'\gamma_1,$$
$$\gamma_2 = A''\alpha_1 + B''\beta_1 + C''\gamma_1;$$
$$\alpha_3 = A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2, \text{ etc}; \quad \alpha_4 = A\alpha_3 + B\beta_3 + C\gamma_3, \text{ etc}.$$

On demande comment doivent être les coefficients A, B, C, A′, B′, C′, A″, B″, C″, pour que

$$\frac{\alpha_n}{\alpha} = \frac{\beta_n}{\beta} = \frac{\gamma_n}{\gamma}.$$

(E. LEMOINE)

Cette question n'est pas entièrement nouvelle. Elle se rattache à la *projectivité cyclique*. Les conditions de la question sont réalisées, lorsqu'on fait tourner une figure n fois autour d'un point fixe, chaque fois de l'angle $(2\pi : n)$.

778 (XII, p. 176). Soient M, N deux points complémentaires par rapport au triangle ABC; U, V leurs triangles podaires. Trouver les lieux décrits par ces points lorsque l'on donne une relation de la forme $mU + nV = p$. Ces lieux peuvent-ils être des droites? (J. DÉPREZ).

825 (XIII, p. 80). La formule $N = 1 + x + x^2$, où l'on peut supposer x non carré, donne les nombres premiers 3, 7, 13, 31, 43, 73. 157, 193,... En donne-t-elle une infinité? E. CATALAN).

876. (XIII, p. 216). Étant donnés un angle xOy et un point P, une sécante quelconque menée par P rencontre Ox en A, Oy en B. Sur la droite AB qui reste toujours sa propre homologue, on construit une figure F de forme invariable. 1° Tout point C de F décrit une hyperbole. 2° Le centre de cette hyperbole décrit une figure F′ semblable à celle du point C. 3° Le centre de similitude des figures F, F′ décrit une circonférence. 4° Le centre instantané de similitude de la figure F décrit une podaire d'hyperbole. (SOLLERTINSKY).

905 (XIV, p. 32). Soient A′, B′, C′, F les points où le cercle inscrit au triangle ABC touche les côtés BC, CA, AB et le cercle des neuf

points. Démontrer que F et le centre de gravité G′ du triangle A′B′C′ sont réciproques par rapport au cercle de Brocard et que F est la projection de G′ sur la tangente menée par le point de Steiner à l'ellipse maximum circonscrite. (MORLEY).

1138 (XVII, p. 214). Un triangle ABC de forme invariable se déplace de façon que ses côtés restent tangents à une hypocycloïde à trois rebroussements. L'orthocentre et le centre du cercle circonscrit décrivent un même cercle. La droite d'Euler enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements. Le centre de gravité décrit une hypocycloïde à trois rebroussements à laquelle la droite d'Euler est normale. Un point quelconque, invariablement lié au triangle ABC (c'est-à-dire dont les coordonnées normales par rapport à ce triangle ne varient pas) décrit une hypotrochoïde. (A. GOB).

1147 (XVII, p. 279) Trouver deux nombres consécutifs dont l'un soit un carré et l'autre un triangulaire. (DE ROCQUIGNY).

1230 (XIX, p. 128). Démontrer que si

$$\lim n! \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{1} + \frac{a_{n-2}}{1.2} + \frac{a_{n-3}}{1.2.3} + \cdots\right) = l$$

la série $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ est convergente quel que soit x, et que sa somme tend vers l lorsque x croît indéfiniment. (E. CESÀRO).

1235 (XIX, p. 152). On considère le lieu des points doubles Q d'une famille de courbes C, parallèles. Démontrer *analytiquement* : 1° que la ligne (Q) est également inclinée sur les deux branches de la courbe C, qui se croisent au point Q; 2° que les centres de courbure de ces branches sont les foyers d'une conique, ayant un contact du second ordre, au point Q, avec la ligne (Q). (E. CESÀRO).

1238 (XIX, p. 176). Étudier la courbe décrite par un point qui se meut constamment suivant la résultante de n forces, dirigées vers n points fixes. (E. CESÀRO).

1238 (XIX, p. 215). Démontrer l'identité suivante :

$$5^n - 5^{n-1}C_{2n,1} + 5^{n-2}C_{2n-1,2} - 5^{n-3}C_{2n-2,3} + \cdots + (-1)^n C_{n+1,n}$$
$$= 1 + C_{2n,1} + C_{2n-1,2} + C_{2n-2,3} + \cdots + C_{n+1,n}.$$

(EMMERICH).

1240 (XIX, p. 240). Un point se meut de manière que la somme des carrés des projections de chacun de ses déplacements infiniment petits

constamment

QUESTIONS NON RÉSOLUES DES DEUX PP' (E. Cesàro).

×**512** (VI, p. 71, XI, p. 30). Vérifier l'iden' , nombres tels que

$$8^n \sum_{p=0} \left(\frac{1}{16}\right)^p [C_{2p,p}]^3 C_{n,2p} = \sum$$ ne limite α. Démontrer

529 (VII, p. 280, XI, p. 31). Ay $\frac{\alpha x^2 + \cdots}{\quad + \cdots} = \alpha$ (1)

$\alpha_1 = A\alpha + B\beta + C\gamma$, $\beta_1 = A'\alpha +$

$\alpha_2 = A\alpha_1 + B\beta_1 +$

$\gamma_2 =$ $\frac{x^2}{1.2} - \alpha_{n+3}\frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$

$\alpha_3 = A\alpha_2 + B\beta_2 +$

On demande comm' ... s'annule pas, il peut se faire que le premier A'', B'', C'', pour σ ... Peut-on, alors, affirmer que sa valeur est toujours ... nombres a_0, a_1, a_2, etc.? (E. Cesàro).

Cette ques' ... Parmi les courbes à torsion constante, il y a des tivité cycli' ... qui sont les géodésiques de certains tourner ' ... Même question pour les chaînettes ... sont les normales principales sont les binormales d'une autre (E. Cesàro)

527

rapp ... (XI, p. 126). Soit

lieu ... $(1+x+x^2+\cdots+x^k)^m = 1 + A_{m,1}x + A_{m,2}x^2 + A_{m,3}x^3 + \text{etc.}$;

m' ... démontrer la formule :

$1 + A_{m,1} + A_{m-1,2} + A_{m-2,3} + \cdots + A_{2,m-1} + A_{1,m} = u_{m+k+1}$;

quelques-uns des derniers termes du premier membre peuvent être nuls car $A_{i,j} = 0$, si $j > ik$; u_{m+k+1} désigne le terme de rang $m+k+2$ dans la suite de Fibonacci généralisée, où chaque terme est la somme des $(k+1)$ précédents, les valeurs initiales étant

$$u_0 = u_1 = u_2 = \cdots = u_{k-1} = 0, \quad u_k = 1.$$

(A. Boutin).

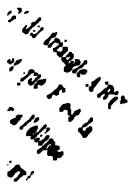
1287. (XX, p. 276). On donne dans un même plan deux droites AB, A'B'. Soient M, M' deux points mobiles sur ces droites sous la condition

$$MA.MB = M'A'.M'B';$$

quelle est l'enveloppe de la droite MM'? Trouver géométriquement le point de contact de MM' avec l'enveloppe. (J. Neuberg).

ʼRIAL MATHÉMATIQUE

ʻévrier.



ssance de *L. Ferrari*, à Bologne.
e et mort en **1736** de *Thomas Ceva*, à Milan.
2. Mort de *Ph. Gilbert*, à Louvain.
rt de *Chr. Clavius*, à Rome.
Naissance de *Ph. Gilbert*, à Beauraing.
nt. **9**. **1882**. Mort de *H. St. Smith*, à Oxford.
1891. Mort de *Sophie Kovalevski*, à Stockholm.
1. **1650**. Mort de *Descartes*, à Stockholm.
12. **1804**. Mort de *Kant*, à Königsberg.
13. **1805**. Naissance de *Dirichlet*, à Düren.
14. **1811**. Naissance de *G. H. F. Nesselmann*, à Fürstenau, près Elbing.
15. **1564**. Naissance de *Galilée*, à Pise.
16. **1892**. Mort de *Th. Hirst*, à Londres.
17. **1874**. Mort de *Ad. Quetelet*, à Bruxelles.
18. **1851**. Mort de *Jacobi*, à Berlin. **1899**. Mort de *S. Lie*, à Christiania.
19. **1473**. Naissance de *Copernic*, à Thorn. **1897**. Mort de *Weierstrass*, à Berlin.
20. **1762**. Mort de *T. Mayer*, à Goettingue.
21. **1903**. Mort de *J. Studnička*, à Prague.
22. **1796**. Naissance de *Ad. Quetelet*, à Gand. **1857**. Naissance de *H. Hertz*, à Hambourg.
23. **1855**. Mort de *Gauss*, à Goettingue.
24. **1582**. Bulle de *Grégoire XIII*, sur la réforme du calendrier.
25. **1638**. Mort de *Cl. G. Bachet*, à Paris.
26. **1878**. Mort de *A. Secchi*, à Rome.
27. Néant. **28**. **1838**. Naissance de *Maurice Lévy*, à Ribeauvillé (Alsace). **29**. Néant.

---

sur les droites qui le joignent à n points fixes soit constamment maximum ou minimum. Étudier sa trajectoire. (E. Cesàro).

1246 (XIX, p. 264, 280). Soient $a_0, a_1, a_2, \cdots$ des nombres tels que

$$\lim (n!\, a_n) = \infty$$

et $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \cdots$ des nombres qui tendent vers une limite α. Démontrer que

$$\lim_{x=\infty} e^x \frac{a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 x + a_2\sigma_2 x^2 + \cdots}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots} = \alpha \qquad (1)$$

où

$$\sigma_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}\frac{x}{1} + \alpha_{n+2}\frac{x^2}{1.2} - \alpha_{n+3}\frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

Lorsque la limite α n'existe pas, il peut se faire que le premier membre de (1) existe. Peut-on, alors, affirmer que sa valeur est toujours la même, quels que soient les nombres a_0, a_1, a_2, etc.? (E. Cesàro).

1247 (XIX, p. 180). Parmi les courbes à torsion constante, il y a des spirales logarithmiques tordues qui sont les géodésiques de certains cônes. Quels sont ces cônes? — Même question pour les chaînettes tordues dont les normales principales sont les binormales d'une autre courbe. (E. Cesàro)

1271 (XX, p. 128). Soit

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^k)^m = 1 + A_{m,1}x + A_{m,2}x^2 + A_{m,3}x^3 + \text{etc.};$$

démontrer la formule :

$$1 + A_{m,1} + A_{m-1,2} + A_{m-2,3} + \cdots + A_{2,m-1} + A_{1,m} = u_{m+k+1};$$

quelques-uns des derniers termes du premier membre peuvent être nuls car $A_{i,j} = 0$, si $j > ik$; u_{m+k+1} désigne le terme de rang $m + k + 2$ dans la suite de Fibonacci généralisée, où chaque terme est la somme des $(k + 1)$ précédents, les valeurs initiales étant

$$u_0 = u_1 = u_2 = \cdots = u_{k-1} = 0, \quad u_k = 1.$$

(A. Boutin).

1297. (XX, p. 276). On donne dans un même plan deux droites AB, A'B'. Soient M, M' deux points mobiles sur ces droites sous la condition

$$MA.MB = M'A'.M'B';$$

quelle est l'enveloppe de la droite MM'? Trouver géométriquement le point de contact de MM' avec l'enveloppe. (J. Neuberg).

MÉMORIAL MATHÉMATIQUE

Février.

1. Néant. **2**. **1522**. Naissance de *L. Ferrari*, à Bologne.
3. Naissance en **1648** et mort en **1736** de *Thomas Ceva*, à Milan.
4. Néant. **5**. **1892**. Mort de *Ph. Gilbert*, à Louvain.
6. **1612**. Mort de *Chr. Clavius*, à Rome.
7. **1832**. Naissance de *Ph. Gilbert*, à Beauraing.
8. Néant. **9**. **1882**. Mort de *H. St. Smith*, à Oxford.
10. **1891**. Mort de *Sophie Kovalevski*, à Stockholm.
11. **1650**. Mort de *Descartes*, à Stockholm.
12. **1804**. Mort de *Kant*, à Königsberg.
13. **1805**. Naissance de *Dirichlet*, à Düren.
14. **1811**. Naissance de *G. H. F. Nesselmann*, à Fürstenau, près Elbing.
15. **1564**. Naissance de *Galilée*, à Pise.
16. **1892**. Mort de *Th. Hirst*, à Londres.
17. **1874**. Mort de *Ad. Quetelet*, à Bruxelles.
18. **1851**. Mort de *Jacobi*, à Berlin. **1899**. Mort de *S. Lie*, à Christiania.
19. **1473**. Naissance de *Copernic*, à Thorn. **1897**. Mort de *Weierstrass*, à Berlin.
20. **1762**. Mort de *T. Mayer*, à Goettingue.
21. **1903**. Mort de *J. Studnička*, à Prague.
22. **1796**. Naissance de *Ad. Quetelet*, à Gand. **1857**. Naissance de *H. Hertz*, à Hambourg.
23. **1855**. Mort de *Gauss*, à Goettingue.
24. **1582**. Bulle de *Grégoire XIII*, sur la réforme du calendrier.
25. **1638**. Mort de *Cl. G. Bachet*, à Paris.
26. **1878**. Mort de *A. Secchi*, à Rome.
27. Néant. **28**. **1838**. Naissance de *Maurice Lévy*, à Ribeauvillé (Alsace). **29**. Néant.

SUR L'AIRE LINÉAIRE DE LA SURFACE ENGENDRÉE PAR UNE FIGURE INVARIABLE,

par M. C. E. WASTEELS.

1. Considérons une droite AB invariablement liée à un système d'axes rectangulaires mobiles $Oxyz$. Soient u la surface engendrée par cette droite depuis l'instant t_0 jusqu'à l'instant t, $\overline{u}$ l'aire géométrique correspondante, $\overline{v_0}$ et $\overline{\omega}$ la vitesse de O et la rotation instantanée autour de O à l'instant t, $\overline{F}$ le vecteur $\overline{AB}$, $\overline{e}$ la coordonnée géométrique du milieu C de AB et $\overline{v}$ la vitesse de ce point à l'instant t. Si l'on partage le vecteur $\overline{F}$ en un nombre infiniment grand de parties infiniment petites $\Delta\overline{F}$ et qu'on désigne par $\overline{e'}$ la coordonnée géométrique d'un point quelconque de $\Delta\overline{F}$ et par $\overline{v'}$ la vitesse de ce point, on aura

$$d\overline{u} = (\lim \mathbf{S}.\mathcal{M}\Delta\overline{F}\overline{v'})dt = (\lim \mathbf{S}.\mathcal{M}\Delta\overline{F}\overline{v_0})dt + (\lim \mathbf{S}.\mathcal{M}\Delta\overline{F}.\mathcal{M}\overline{\omega}\overline{e'})dt.$$

Or, si $\overline{a}$ est le vecteur-unité dirigé suivant $\overline{F}$, on peut écrire

$$\lim \mathbf{S}.\mathcal{M}\Delta\overline{F}.\mathcal{M}\overline{\omega}\overline{e'} = \lim \mathbf{S}.\mathcal{M}\overline{a}.\mathcal{M}\overline{\omega}(\overline{e'}\Delta F)$$

$$= .\mathcal{M}\overline{a}.\mathcal{M}\overline{\omega}(\overline{e}F) = \mathcal{M}\overline{F}.\mathcal{M}\overline{\omega}\overline{e}.$$

Par suite,

$$d\overline{u} = .\mathcal{M}\overline{F}\overline{v_0}dt + \mathcal{M}\overline{F}.\mathcal{M}\overline{\omega}\overline{e}dt = \mathcal{M}\overline{F}(\overline{v_0} + \mathcal{M}\overline{\omega}\overline{e})dt,$$

ou

$$d\overline{u} = \mathcal{M}\overline{F}\overline{v}dt.$$

2. Si un nombre quelconque de vecteurs invariablement liés aux axes ont leurs milieux au même point C, on aura

$$d\mathbf{S}\overline{u} = \mathcal{M}(\mathbf{S}\overline{F})\overline{v}dt = \mathcal{M}\overline{R}\overline{v}dt,$$

$\overline{R}$ étant le vecteur résultant.

Il résulte de là que la somme des aires linéaires correspondant aux surfaces engendrées par les différents vecteurs est égale à celle de la surface engendrée par le vecteur résultant appliqué par son milieu au même point C.

On peut encore dire que la somme des projections algébriques des premières surfaces sur un plan quelconque est égale à celle de la dernière sur le même plan.

8. Cherchons, d'une manière générale, la relation qui doit exister entre deux systèmes de vecteurs invariablement liés aux axes mobiles pour que la somme des aires linéaires soit la même pour les deux systèmes, quel que soit le mouvement des axes. A cet effet, examinons dans quels cas la quantité $\mathbf{S}\bar{u}$, relative à un système de vecteurs, est nulle pour tous les mouvements des axes.

On a

$$d\mathbf{S}\bar{u} = \mathcal{M}(\mathbf{S}\bar{\mathbf{F}})\bar{v}_0 dt + \mathbf{S}\mathcal{M}\bar{\mathbf{F}}\mathcal{M}\bar{\omega}\bar{e}dt.$$

Cette différentielle doit donc être nulle pour $\bar{v}_0$ et $\bar{\omega}$ quelconques: cette condition revient à

$$\mathbf{S}\bar{\mathbf{F}} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{S}\mathcal{M}\bar{\mathbf{F}}\mathcal{M}\bar{\omega}\bar{e} = 0$$

pour $\bar{\omega}$ quelconque.

Si l'on désigne par $\bar{a}_x$, $\bar{a}_y$, $\bar{a}_z$ les vecteurs-unités dirigés suivant les axes, on pourra poser

$$\bar{\omega} = \omega_x\bar{a}_x + \omega_y\bar{a}_y + \omega_z\bar{a}_z.$$

Or, si $\bar{\omega}$ est quelconque, ω_x, ω_y et ω_z le sont pareillement; il en résulte que la relation en $\bar{\omega}$ équivaut aux trois suivantes :

$$\mathbf{S}\mathcal{M}\bar{\mathbf{F}}\mathcal{M}\bar{a}_x\bar{e} = 0, \quad \mathbf{S}\mathcal{M}\bar{\mathbf{F}}\mathcal{M}\bar{a}_y\bar{e} = 0, \quad \mathbf{S}\mathcal{M}\bar{\mathbf{F}}\mathcal{M}\bar{a}_z\bar{e} = 0.$$

Comme $\mathcal{M}\bar{\mathbf{F}}\mathcal{M}\bar{a}_x\bar{e} = \bar{a}_x(\bar{\mathbf{F}}\bar{e}) - \bar{e}(\bar{a}_x\bar{\mathbf{F}})$, on aura, en désignant par X, Y, Z les composantes de $\bar{\mathbf{F}}$ suivant les axes coordonnés,

$$\mathcal{M}\bar{\mathbf{F}}\mathcal{M}\bar{a}_x\bar{e} = \bar{a}_x(\mathrm{X}x + \mathrm{Y}y + \mathrm{Z}z) - \bar{a}_x x\mathrm{X} - \bar{a}_y y\mathrm{X} - \bar{a}_z z\mathrm{X},$$

ou

$$\mathcal{M}\bar{\mathbf{F}}\mathcal{M}\bar{a}_x\bar{e} = \bar{a}_x(\mathrm{Y}y + \mathrm{Z}z) - \bar{a}_y\mathrm{X}y - \bar{a}_z\mathrm{X}z.$$

La condition $\mathbf{S}\mathcal{M}\bar{\mathbf{F}}\mathcal{M}\bar{a}_x\bar{e} = 0$ revient donc à

$$\mathbf{S}(\mathrm{Y}y + \mathrm{Z}z) = 0, \quad \mathbf{S}\mathrm{X}y = 0, \quad \mathbf{S}\mathrm{X}z = 0.$$

Les deux autres conditions peuvent de même être remplacées par

$$\mathbf{S}(\mathrm{Z}z + \mathrm{X}x) = 0, \quad \mathbf{S}\mathrm{Y}z = 0, \quad \mathbf{S}\mathrm{Y}x = 0;$$
$$\mathbf{S}(\mathrm{X}x + \mathrm{Y}y) = 0, \quad \mathbf{S}\mathrm{Z}x = 0, \quad \mathbf{S}\mathrm{Z}y = 0.$$

Enfin, les relations $\mathbf{S}(\mathrm{Y}y + \mathrm{Z}z) = 0$, $\mathbf{S}(\mathrm{Z}z + \mathrm{X}x) = 0$, $\mathbf{S}(\mathrm{X}x + \mathrm{Y}y) = 0$ reviennent à $\mathbf{S}\mathrm{X}x = 0$, $\mathbf{S}\mathrm{Y}y = 0$, $\mathbf{S}\mathrm{Z}z = 0$.

On conclut de ce qui précède que les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathbf{S}\bar{u}$ soit nulle quel que soit le mouvement des axes, sont

$$\begin{array}{lll} \mathbf{S}X = 0, & \mathbf{S}Y = 0, & \mathbf{S}Z = 0; \\ \mathbf{S}Xx = 0, & \mathbf{S}Yx = 0, & \mathbf{S}Zx = 0; \\ \mathbf{S}Xy = 0, & \mathbf{S}Yy = 0, & \mathbf{S}Zy = 0; \\ \mathbf{S}Xz = 0, & \mathbf{S}Yz = 0, & \mathbf{S}Zz = 0. \end{array}$$

Observons que x, y, z désignent les coordonnées du milieu du vecteur $\bar{\mathrm{F}}$; si l'on prenait ce point comme point d'application d'une force représentée par le vecteur $\bar{\mathrm{F}}$, le système de forces ainsi obtenu serait en équilibre astatique, car on démontre en mécanique que les douze équations obtenues sont précisément les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre astatique.

4. Remarque. On peut conclure de ce qui précède que la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre astatique est

$$\mathbf{S}\mathscr{M}_{\bar{\mathrm{F}}}(\bar{v}_0 + \mathscr{M}_{\bar{\omega}}\bar{e}) = 0,$$

$\bar{v}_0$ et $\bar{\omega}$ étant quelconques. Nous allons démontrer directement cette condition.

1° *La condition est nécessaire.* En effet, donnons aux axes mobiles un déplacement quelconque et soit $\Delta\bar{e}$ le déplacement du milieu de $\bar{\mathrm{F}}$; pour l'équilibre astatique, on devra avoir

$$\mathbf{S}\mathscr{M}_{\bar{\mathrm{F}}}(\bar{e} + \Delta\bar{e}) = 0; \quad \text{d'où} \quad \mathbf{S}\mathscr{M}_{\bar{\mathrm{F}}}\Delta\bar{e} = 0,$$

et, par suite,

$$\mathbf{S}\mathscr{M}_{\mathrm{F}}\frac{d\bar{e}}{dt} = 0, \quad \text{ou} \quad \mathbf{S}\mathscr{M}_{\bar{\mathrm{F}}}\bar{v} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{S}\mathscr{M}_{\bar{\mathrm{F}}}(\bar{v}_0 + \mathscr{M}_{\bar{\omega}}\bar{e}) = 0; \qquad \text{c. q. f. d.}$$

2° *La condition est suffisante.* Pour le prouver, considérons une nouvelle positon quelconque des axes et soient $\bar{b}_x$, $\bar{b}_y$, $\bar{b}_z$ les nouvelles positions des unités $\bar{a}_x$, $\bar{a}_y$, $\bar{a}_z$. Il suffira de démontrer que

$$\mathbf{S}\bar{\mathrm{F}} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{S}\mathscr{M}_{\mathrm{F}}(\bar{b}_x x + \bar{b}_y y + \bar{b}_z z) = 0.$$

La première relation se déduit sans peine de $\mathbf{S}\mathscr{M}_{\bar{\mathrm{F}}}\bar{v}_0 = 0$, ou $\mathscr{M}_{(\mathbf{S}\bar{\mathrm{F}})}\bar{r}_0 = 0$, dans laquelle $\bar{r}_0$ est quelconque.

Pour arriver à la seconde, observons que

$$\mathcal{M}\overline{F}\,\mathcal{M}\overline{\omega e} = \overline{\omega}(\overline{eF}) - \overline{e}(\overline{F\omega});$$

donc

$$\mathbf{S}\overline{\omega}(\overline{eF}) - \mathbf{S}\overline{e}(\overline{F\omega}) = 0.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par un vecteur arbitraire $\overline{k}$; nous aurons

$$(\overline{\omega k})\mathbf{S}(\overline{eF}) - \mathbf{S}(\overline{ek})(\overline{F\omega}) = 0.$$

En faisant successivement $\overline{\omega}$ et $\overline{k}$ égaux à $\overline{a_x}$, $\overline{a_y}$, $\overline{a_z}$ et ajoutant membre à membre les trois égalités ainsi obtenues, on trouve

$$2\mathbf{S}(\overline{eF}) = 0.$$

Dès lors, la relation en $\overline{\omega}$ et $\overline{k}$ se réduit à

$$\mathbf{S}(\overline{ek})(\overline{F\omega}) = 0.$$

Pour $\overline{k} = \overline{a_x}$, il vient

$$\mathbf{S}x(\overline{F\omega}) = 0 \quad \text{ou} \quad (\mathbf{S}\overline{Fx})\overline{\omega} = 0; \quad \text{d'où} \quad \mathbf{S}\overline{F}x = 0,$$

puisque $\overline{\omega}$ est quelconque. Il en résulte que

$$\mathbf{S}.\mathcal{M}\overline{F}\overline{b_x}x \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}(\mathbf{S}\overline{F}x)\overline{b_x} = 0.$$

On démontre de la même manière que

$$\mathbf{S}.\mathcal{M}\overline{F}\overline{b_y}y = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{S}.\mathcal{M}\overline{F}\overline{b_z}z = 0.$$

Par suite,

$$\mathbf{S}.\mathcal{M}\overline{F}(\overline{b_x}x + \overline{b_y}y + \overline{b_z}z) = 0; \qquad \text{c. q. f. d.}$$

De la démonstration qui précède on peut encore conclure que les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre astatique sont

$$\mathbf{S}\overline{F} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{S}(\overline{ek})(\overline{F\omega}) = 0,$$

$\overline{k}$ et $\overline{\omega}$ étant quelconques.

On peut en déduire sans peine les conditions analytiques données plus haut.

5. Considérons actuellement deux systèmes de vecteurs $\overline{F}$ et $\overline{F'}$ et supposons que les forces représentées par ces vecteurs et appliquées à leurs points milieux constituent deux systèmes astatiquement équivalents. Si $\overline{u}$ et $\overline{u'}$ sont les aires linéaires des surfaces engendrées par les

deux systèmes, on aura, en observant que le système formé par les forces $\overline{F}$ et les forces $-\overline{F'}$ est en équilibre astatique,

$$\overline{u} - \overline{u'} = 0 ; \quad \text{d'où} \quad \overline{u} = \overline{u'}.$$

Réciproquement, si, pour un mouvement arbitraire, on a $\overline{u} = \overline{u'}$, on peut conclure que le système $\overline{F}$ et $-\overline{F'}$ est en équilibre astatique, et que, par suite, les deux systèmes $\overline{F}$ et $\overline{F'}$ sont astatiquement équivalents.

6. On peut étendre les propriétés qui précèdent aux systèmes de courbes, planes ou gauches. Nous aurons, dans ce cas,

$$d\overline{\mathbf{S}u} = [\lim \mathbf{S}\mathcal{M}\Delta\overline{e}(\overline{v}_0 + \mathcal{M}\overline{\omega}\overline{e})]dt,$$

les accroissements $\Delta\overline{e}$ étant déterminés, pour chacune des lignes, en la supposant parcourue dans un sens donné.

En raisonnant comme plus haut, on trouve que les conditions nécessaires et suffisantes pour que la somme des aires linéaires soit constamment nulle quel que soit le mouvement des axes, peuvent s'exprimer par

$$\lim \mathbf{S}\Delta\overline{e} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{S}\overline{c} = 0,$$

c désignant la corde sous-tendant l'une des courbes, et

$$\lim \mathbf{S}\mathcal{M}\Delta\overline{e}\mathcal{M}\overline{\omega}\overline{e} = 0 \quad \text{ou} \quad \lim \mathbf{S}(\overline{e}\overline{k})(\Delta\overline{e}\overline{\omega}) = 0$$

pour $\overline{k}$ et $\overline{\omega}$ quelconques.

7. Un cas particulier intéressant à étudier est celui d'une ligne fermée. On obtient alors

$$d\overline{u} = \mathcal{M}(\lim \mathbf{S}\Delta\overline{e})\overline{v}_0 dt + \lim \mathbf{S}\mathcal{M}\Delta\overline{e}\mathcal{M}\overline{\omega}\overline{e}dt,$$

ou

$$d\overline{u} = \lim \mathbf{S}\mathcal{M}\Delta\overline{e}\mathcal{M}\overline{\omega}\overline{e}dt.$$

Or,

$$\lim \mathbf{S}\mathcal{M}\Delta\overline{e}\mathcal{M}\overline{\omega}\overline{e} = \left[\mathcal{M}\overline{e}\mathcal{M}\overline{\omega}\overline{e}\right]_{e_0}^{e_1} - \lim \mathbf{S}\mathcal{M}\overline{e}\mathcal{M}\overline{\omega}\Delta\overline{e};$$

comme il s'agit d'une ligne fermée, $\overline{e}_1 = \overline{e}_0$; donc

$$\left[\mathcal{M}\overline{e}\mathcal{M}\overline{\omega}\overline{e}\right]_{e_0}^{e_1} = 0 ;$$

par suite,

$$\lim \mathbf{S}\mathcal{M}\Delta\overline{e}\mathcal{M}\overline{\omega}\overline{e} = -\lim \mathbf{S}\mathcal{M}\overline{e}\mathcal{M}\overline{\omega}\Delta\overline{e} = \lim \mathbf{S}\mathcal{M}\overline{e}\mathcal{M}\Delta\overline{e}\overline{\omega}.$$

Observons maintenant qu'on a la relation

$$\mathcal{M}\Delta\overline{e}.\mathcal{M}\overline{\omega}\overline{e} + \mathcal{M}\overline{\omega}\mathcal{M}\overline{e}\Delta\overline{e} + \mathcal{M}\overline{e}\mathcal{M}\Delta\overline{e}\overline{\omega} = 0.$$

Nous aurons donc

$$2 \lim \mathbf{S} \mathscr{M} \bar{\Delta e} \mathscr{M} \bar{\bar{\omega}} \bar{\bar{e}} + \lim \mathbf{S} \mathscr{M} \bar{\omega} \mathscr{M} \bar{e} \bar{\Delta e} = 0;$$

d'où

$$\lim \mathbf{S} \mathscr{M} \bar{\Delta e} \mathscr{M} \bar{\bar{\omega}} \bar{\bar{e}} = -\tfrac{1}{2} \lim \mathbf{S} \mathscr{M} \bar{\omega} \mathscr{M} \bar{e} \bar{\Delta e}.$$

Comme l'aire linéaire $\bar{s}$ de la figure considérée est égale à

$$\tfrac{1}{2} \lim \mathbf{S} \mathscr{M} \bar{e} \bar{\Delta e},$$

on peut écrire

$$\lim \mathbf{S} \mathscr{M} \bar{\Delta e} \mathscr{M} \bar{\bar{\omega}} \bar{\bar{e}} = \mathscr{M} \bar{\bar{s}} \bar{\bar{\omega}};$$

d'où

$$d\bar{u} = \mathscr{M} \bar{\bar{s}} \bar{\bar{\omega}} dt.$$

Cette formule peut encore se démontrer de la manière suivante.

Soient $\bar{s}_0$ et s deux surfaces-couvercles limitées à la ligne mobile dans ses positions à l'instant t_0 et à l'instant t; comme la surface décrite par cette ligne forme avec s_0 et s une surface fermée, on a

$$\bar{u} + \bar{s} - \bar{s}_0 = 0; \quad \text{d'où} \quad d\bar{u} + d\bar{s} = 0.$$

Or,

$$d\bar{s} = \mathscr{M} \bar{\bar{\omega}} \bar{\bar{s}} dt = -\mathscr{M} \bar{\bar{s}} \bar{\bar{\omega}} dt;$$

par suite,

$$d\bar{u} = \mathscr{M} \bar{\bar{s}} \bar{\bar{\omega}} dt; \qquad \text{c. q. f. d.}$$

8. De cette formule, on peut conclure que la condition nécessaire et suffisante pour que l'aire linéaire de la surface engendrée par une ligne fermée soit constamment nulle, est que l'aire linéaire de cette ligne soit elle-même nulle. On peut encore dire que la condition nécessaire et suffisante pour que deux lignes quelconques ABC et AB'C menées entre A et C décrivent constamment des surfaces de même aire linéaire, est que les aires linéaires des lignes fermées ABCA et AB'CA, obtenues en menant la corde CA, soient égales entre elles.

Gand, le 27 mai 1903.

SUR UN GROUPE DE TROIS HYPERBOLES ÉQUILATÈRES(*),

Soient M_a, M_b, M_c les milieux des côtés et H_a, H_b, H_c les pieds des hauteurs d'un triangle scalène ABC, H l'orthocentre, O le centre du cercle circonscrit.

(*) Les développements qui vont suivre ne renferment rien de nouveau; mais ils peuvent servir à nos jeunes lecteurs d'exercice de géométrie projective.

En faisant tourner les côtés BA, CA autour des sommets B, C avec des vitesses égales et de sens contraires, nous obtenons deux faisceaux inversement égaux (B) et (C). Soit P l'intersection de deux rayons homologues de ces faisceaux; ce point décrit une conique Σ_a qui passe par A, B, C. Si l'on construit le parallélogramme BPCP', on voit facilement que BP' et CP' sont deux rayons homologues des faisceaux (B), (C) et comme les deux points P, P' de Σ_a sont symétriques par rapport à M_a, M_a est le centre de Σ_a. Les deux parallèles menées par B, C à la bissectrice intérieure AI de ABC sont encore deux rayons homologues des faisceaux (B) et (C); il en est de même des parallèles menées par B et C à la bissectrice extérieure I_bAI_c. Les points à l'infini sur les deux bissectrices appartiennent donc à Σ_a, et cette conique est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les parallèles menées par M_a aux bissectrices de l'angle BAC; ce sont donc les bissectrices M_aI' et $I'_bM_aI'_c$ de l'angle $M_bM_aM_c$ du triangle complémentaire $M_aM_bM_c$. Les hauteurs BH_b, CH_c sont également des rayons correspondants des faisceaux (B) et (C); on conclut de là que Σ_a passe par H, propriété déjà connue. Soit A_1 le point diamétralement opposé à A sur la circonférence O; les angles ABA_1, ACA_1 étant droits, A_1B et A_1C sont des éléments correspondants des faisceaux (B), (C) et A_1 est situé sur Σ_a. Connaissant les quatre points A, B, C, A_1 communs à Σ_a et au cercle O, on voit que les axes de Σ_a sont parallèles aux bissectrices des angles formés par deux côtés opposés du quadrangle complet $BACA_1$; cette propriété résulte aussi de ce que les asymptotes de Σ_a sont déjà connues.

Soient B', C' les points de rencontre de BP avec AC et de CP avec AB; ces points se correspondent dans deux ponctuelles projectives (B'), (C') dont H_b et H_c sont des éléments homologues et dont A est un élément uni. Ces ponctuelles sont donc perspectives; elles sont même semblables, car les triangles BH_bB', CH_cC' étant équiangles, le rapport $H_bB' : H_cC'$ est constant. Par suite, il suffit de déplacer la droite H_bH_c parallèlement à elle-même pour engendrer les ponctuelles (B'), (C').

Les tangentes en B et C sont les rayons des faisceaux (B) et (C) qui correspondent au rayon CB (ou BC) de l'autre faisceau; ces tangentes sont donc parallèles à H_bH_c. Le diamètre M_aA et la tangente en A à Σ_a ont des directions symétriques par rapport à une asymptote; par suite Σ_a touche en A la symédiane AK du triangle ABC.

La puissance de l'hyperbole Σ_a est égale au produit des distances du point B aux deux asymptotes; elle a donc pour expression

$$\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}(B-C)\times\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}(B-C)=\tfrac{1}{8}a^2\sin(B-C).$$

On la trouve encore en cherchant le produit des distances de A aux asymptotes ou celui des distances de M_a aux droites AI, I_bI_c; ce procédé donne

$$\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{A}{2}\times\frac{1}{2}(b+c)\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{8}(b^2-c^2)\sin A.$$

Il existe deux autres hyperboles équilatères Σ_b, Σ_c qui sont circonscrites au triangle ABC et ont pour centre respectivement M_b, M_c.

Une hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABC est la transformée par inversion triangulaire d'un diamètre du cercle O; les inverses des extrémités de ce diamètre sont les points à l'infini de l'hyperbole. Il est facile de voir que les courbes Σ_a, Σ_b, Σ_c correspondent aux diamètres OM_a, OM_b, OM_c.

Les trois hyperboles Σ_a, Σ_b, Σ_c ont été étudiées d'abord par M. E. Lemoine; il en a été également question dans *Mathesis*. M. Majcen d'Agram en a publié une étude détaillée dans l'*Archiv für Mathematik und Physik*, série III, t. IV, p. 76. (J. N.).

VARIÉTÉS.

Progrès de la géométrie élémentaire (*).

Me voici arrivé par une voie indirecte à cette Géométrie non euclidienne dont l'étude prend dans les recherches des géomètres une place qui grandit chaque jour. Si j'étais seul à vous entretenir de Géométrie, je prendrais plaisir à vous rappeler tout ce qui a été fait sur ce sujet depuis Euclide, ou du moins depuis Legendre, jusqu'à nos jours. Envisagée successivement par les plus grands géomètres du dernier siècle, la question s'est progressivement élargie. C'est par le célèbre *postulatum* relatif aux parallèles que l'on a commencé; c'est par l'ensemble des axiomes géométriques que l'on finit.

Les Éléments d'Euclide, qui ont résisté au travail de tant de siècles, auront du

---

(*) Extrait de *l'Etude sur le développement des méthodes géométriques*, lue le 24 septembre 1904 au Congrès des Sciences et des Arts à Saint-Louis par Gaston Darboux. Cette étude substantielle a paru en une brochure de 34 pp., chez Gauthier-Villars, Paris, 1904. (Prix : 1 fr. 50) et auparavant dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*.

moins l'honneur de provoquer, avant de finir, une longue suite de travaux admirablement enchaînés qui contribueront, de la manière la plus efficace, au progrès des mathématiques, en même temps qu'ils fourniront aux philosophes les points de départ les plus précis et les plus solides pour l'étude de l'origine et de la formation de nos connaissances. Je suis assuré d'avance que mon distingué collaborateur n'oubliera pas parmi les problèmes du temps présent, celui-ci, qui est le plus important peut-être, et dont il s'est occupé avec tant de succès; et je lui laisse le soin de le développer avec toute l'ampleur qu'il mérite assurément.

Je viens de parler des éléments de la Géométrie. Ils ont reçu depuis cent ans des accroissements qu'il convient de ne pas oublier. La théorie des polyèdres s'est enrichie des belles découvertes de Poinsot sur les polyèdres étoilés et de celles de Möbius sur les polyèdres à une seule face(**). Les méthodes de transformation ont élargi l'exposition. On peut dire aujourd'hui que le premier Livre contient la théorie de la translation et de la symétrie, que le deuxième équivaut à la théorie de la rotation et du déplacement, que le troisième repose sur l'homothétie et l'inversion.

Mais il faut bien reconnaître que c'est grâce à l'Analyse que les *Éléments* se sont enrichis de leurs plus belles propositions. C'est à l'Analyse la plus haute que nous devons l'inscription des polygones réguliers de 17 côtés et des polygones analogues. C'est à elle que nous devons les démonstrations si longtemps cherchées de l'impossibilité de la quadrature du cercle, de l'impossibilité de certaines constructions géométriques à l'aide de la règle et du compas. C'est à elle enfin que nous devons les premières démonstrations rigoureuses des propriétés de maximum et de minimum de la sphère. Il appartiendra à la Géométrie d'intervenir sur ce terrain où l'Analyse l'a précédée.

Que seront les éléments de la Géométrie au cours du siècle qui vient de commencer? Y aura-t-il un seul Livre élémentaire de Géométrie? C'est peut-être l'Amérique, avec ses écoles affranchies de tout programme et de toute tradition qui nous donnera les meilleures solutions de cette importante et difficile question. On a quelquefois appelé v. Staudt, l'*Euclide du XIX^e siècle;* je préférerais l'appeler l'*Euclide de la Géométrie projective;* mais cette Géométrie, quelque intéressante qu'elle puisse être, est-elle appelée à fournir la base unique des futurs éléments?

CONCOURS DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN EN BELGIQUE (1904).

Question de Géométrie analytique.

Nous avons reçu onze bonnes solutions de cette question. Ne pouvant les publier toutes *in extenso*, nous ferons abstraction des légères variantes de l'une à l'autre et essayerons de les présenter à nos lecteurs aussi complètement que possible.

(**) Ajoutons les deux beaux théorèmes : *Deux polyèdres convexes dont les faces sont égales sont égaux* (CAUCHY). *Un tétraèdre peut être décomposé en six hexaèdres autosymétriques* (DARBOUX). (P. M.)

Soient deux axes rectangulaires OX, OY; *on donne un point* A *de coordonnées p, q, ainsi que le symétrique* B *de ce point par rapport à l'origine* O.

1° *Trouver l'équation du lieu des foyers des hyperboles équilatères passant par les deux points donnés* A, B *et dont l'axe réel est parallèle à OX.*

2° *On demande une discussion algébrique de l'équation trouvée, afin de reconnaitre la nature du lieu suivant les positions du point* A.

3° *Dans le cas où le lieu est une ellipse, ramener l'équation à sa forme la plus simple et déterminer les longueurs des axes de symétrie ainsi que les positions des foyers.*

Solution par MM. VAN DINTER (Ketwijck), VERHEUGEN, G. L., H. LEZ, P. BASTIN. I. Soient (a, b) les coordonnés du centre et $2c$ l'axe de l'une des hyperboles équilatères. La courbe a alors pour équation

$$(x-a)^2-(y-b)^2=c^2, \tag{1}$$

et les coordonnées des foyers sont

$$x=a\pm c\sqrt{2}, \quad y=b. \tag{2}$$

Exprimons que les points (p, q), $(-p, -q)$ sont sur la courbe :

$$(p-a)^2-(q-b)^2=c^2, \tag{3}$$

$$(p+a)^2-(q+b)^2=c^2. \tag{4}$$

En combinant les égalités (3) et (4) par addition et par soustraction, on trouve

$$p^2+a^2-q^2-b^2=c^2, \tag{5}$$

$$ap-bq=0. \tag{6}$$

L'équation (6) nous apprend que le centre de l'hyperbole variable décrit une droite qui est symétrique de la droite AB par rapport à la bissectrice de l'angle XOY.

Pour trouver le lieu du foyer, il faut éliminer a, b, c entre les équations (2), (5) et (6); ce qui donne

$$p^2x^2+(2p^2-q^2)y^2-2pqxy-2p^2(p^2-q^2)=0. \tag{7}$$

Donc ce lieu est une conique qui a pour centre l'origine O.

II. Le binôme caractérisant le genre de la courbe est

$$p^2q^2-p^2(2p^2-q^2)=p^2(q^2-p^2).$$

Nous choisissons les directions des axes coordonnés pos

manière que A soit situé dans l'angle XOY, et nous appelons OZ la bissectrice de cet angle. Cela posé, on peut distinguer les cas suivants :

1° $q > p$, A est situé dans l'angle ZOY. Le lieu (7) est une hyperbole, qui devient équilatère lorsque la somme des coefficients de x^2 et de y^2 est nulle, ce qui correspond à $\frac{q}{p} = \sqrt{3}$ ou à *angle* AOX $= 60°$.

2° $q < p$, A est situé dans l'angle ZOX. Le lieu (7) est une ellipse toujours réelle, car les points de rencontre avec les axes coordonnés sont réels ; il ne peut jamais être une circonférence.

3° $q = p$, A est sur la bissectrice OZ. L'équation (7) devient $(x - y)^2 = 0$, de sorte que le lieu est la droite OZ. Les égalités (6), (5) et (4) donnent maintenant

$$a = b, \quad c = 0, \quad x - a = \pm (y - a);$$

par suite les hyperboles variables dégénèrent en des systèmes de deux droites rectangulaires dont l'axe est constamment OZ, les foyers coïncident avec le centre de chacun de ces systèmes. On pouvait prévoir cette circonstance, la corde AB étant parallèle à une direction asymptotique.

4° $p = 0$, A et B sont deux points symétriques par rapport à l'axe réel qui est commun à toutes les hyperboles de la question. L'équation (7) se réduit à $y^2 = 0$, résultat évident.

5° $q = 0$, OY est l'axe imaginaire commun à toutes les hyperboles considérées. Le lieu des foyers est maintenant l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 2p^2$. qui a pour foyers les points A et B.

III. Supposons $q < p$. Pour ramener l'équation (7) à la forme

$$Mx^2 + Ny^2 - 2p^2(p^2 - q^2) = 0, \tag{8}$$

nous faisons tourner les axes coordonnés d'un angle φ défini par l'équation

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2pq}{p^2 - q^2},$$

d'où $$\operatorname{tg} \varphi = \frac{q}{p}, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{p}{q}.$$

Adoptons la première solution qui fait coïncider OX avec OA. Des formules connues donnent ensuite

$$M + N = 3p^2 - q^2, \quad M - N = -(p^2 + q^2),$$

c'est-à-dire

$$M = p^2 - q^2, \quad N = 2p^2.$$

L'équation (8) sera donc

$$\frac{x^2}{2p^2}+\frac{y^2}{p^2-q^2}=1.$$

On a donc une ellipse dont les carrés des demi-axes sont $2p^2$, p^2-q^2; la différence de ces carrés étant $p^2+q^2=\overline{OA}^2$, A et B sont les foyers de l'ellipse.

Solution par MM. Ploumen, Barbette, Fr. Dupont et Despretz. La directrice de l'hyperbole variable étant perpendiculaire à OX, l'équation focale prend la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(mx+t)^2. \qquad (9)$$

Pour que l'hyperbole soit équilatère, les coefficients de x^2 et de y^2 doivent être égaux et de signes contraires, d'où l'on conclut $m^2=2$. L'équation (9) devient alors

$$y^2-x^2-2\beta y-2(\alpha+t\sqrt{2})x+\alpha^2+\beta^2-t^2=0.$$

La condition de passer par les points A(p, q) et B$(-p, -q)$ donne

$$q^2-p^2-2\beta q-2(\alpha+t\sqrt{2})p+\alpha^2+\beta^2-t^2=0,$$
$$q^2-p^2+2\beta q+2(\alpha+t\sqrt{2})p+\alpha^2+\beta^2-t^2=0;$$

d'où, par addition et par soustraction,

$$q^2-p^2+\alpha^2+\beta^2-t^2=0.$$
$$\beta q+(\alpha+t\sqrt{2})p=0.$$

Il reste à éliminer t entre les deux dernières équations.

Discussion comme ci-dessus.

Si l'on exprime que l'équation (9) est vérifiée par les coordonnées des points A et B, on trouve

$$\pm\sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}=p\sqrt{2}+t,$$
$$\pm\sqrt{(p+\alpha)^2+(q+\beta)^2}=-p\sqrt{2}+t);$$

d'où

$$\pm\sqrt{(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2}\pm\sqrt{(p+\alpha)^2+(q+\beta)^2}=2p\sqrt{2},$$

équation qui exprime que la somme ou la différence des distances du point (α, β) aux points A et B est constante; il en résulte que le lieu des foyers des hyperboles de la question est en général une ellipse ou une hyperbole ayant pour foyers les points A et B.

Remplaçons dans l'équation (7) p et q par $r\cos\theta$, $r\sin\theta$; il vient

$$x^2\cos^2\theta+(2\cos^2\theta-\sin^2\theta)y^2-2\cos\theta\sin\theta.xy-2r^2\cos^2\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=r^2$$

Dans ce résultat, faisons $r=0$; nous aurons l'équation du lieu des foyers des hyperboles équilatères qui touchent une même droite OA au point O. Ce lieu se compose de deux droites réelles si OA tombe dans l'angle ZOY.

M. Gisolf (Delft) a résolu la question en représentant l'hyperbole variable par l'équation

$$(x-y-m)(y+x-n)=K,$$

les asymptotes parallèles aux bissectrices des angles des axes ayant pour équations $y-x-m=0$, $y+x-n=0$.

Généralisation par M. J. Déprez. I. Soit à chercher le lieu des foyers des coniques Γ passant par deux points fixes A et B et homothétiques à une conique donnée Σ.

Les axes coordonnés étant parallèles aux axes de symétrie de Σ et menés par le milieu O de AB, les coniques Γ peuvent être représentées par l'équation focale

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(mx+t)^2.$$

Le paramètre m est fixe, car il représente le rapport des distances d'un point de la courbe au foyer et à la directrice; t est variable. On a les équations de condition

$$(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2=(mp+t)^2,$$
$$(p+\alpha)^2+(q+\beta)^2=(mp-t)^2,$$

d'où l'on déduit, par addition et par soustraction,

$$p^2+q^2+\alpha^2+\beta^2=m^2p^2+t^2.$$
$$p\alpha+q\beta+mpt=0.$$

En éliminant t entre ces dernières équations et remplaçant ensuite α et β par x et y, on trouve pour le lieu proposé :

$$(m^2p^2-q^2)\,y^2-2pqxy+(m^2-1)\,p^2x^2$$
$$+m^2p^2\,[q^2-p^2\,(m^2-1)]=0. \qquad (10)$$

Le lieu est une conique ayant pour centre le point O.

II. Pour nous rapprocher de la question du concours, prenons pour Σ une hyperbole. Menons par O les droites Δ_1, Δ_2 parallèles aux asymptotes de Σ et faisant avec OX les angles α et $\pi-\alpha$; menons aussi par O les deux droites Δ_3, Δ_4 qui font avec OX les angles β, $\pi-\beta$ tels que $\operatorname{tg}^2\beta=1+\operatorname{tg}^2\alpha$; enfin, désignons l'angle AOX par ω. L'équation (10)

pourra s'écrire ainsi, si l'on remarque que l'excentricité numérique de l'hyperbole Σ est $m = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} \beta$:

$$(\operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \omega) y^2 - 2xy \operatorname{tg} \omega + x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + p^2 \operatorname{tg}^2 \beta (\operatorname{tg}^2 \omega - \operatorname{tg}^2 \alpha) = 0.$$

Les quantités qui permettent de reconnaître le genre du lieu (10), et les variétés de ce genre ont pour expression :

$$\delta = 4 \operatorname{tg}^2 \beta (\operatorname{tg}^2 \omega - \operatorname{tg}^2 \alpha),$$

$$A\Delta = -4p^2 \operatorname{tg}^4 \beta (\operatorname{tg}^2 \omega - \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 (\operatorname{tg}^2 \omega - \operatorname{tg}^2 \beta).$$

Rangeons par ordre de grandeur croissante les valeurs de ω (paramètre variable) comprises entre 0 et π et annulant δ et Δ :

$$\omega = 0 \cdots \alpha \cdots \beta \cdots \frac{\pi}{2} \cdots \pi - \beta \cdots \pi - \alpha \cdots \pi.$$

Si ω appartient à l'un des intervalles $(0, \alpha)$, $(\pi - \alpha, \pi)$, on a $\delta < 0$, $A\Delta > 0$. Le lieu est une ellipse réelle.

Pour $\omega = \alpha$ ou $\pi - \alpha$, δ et Δ s'annulent. Le lieu est une parabole qui dégénère en deux droites confondues avec Δ_1 si $\omega = \alpha$ ou avec Δ_2 si $\omega = \pi - \alpha$.

Si ω appartient à l'un des intervalles (α, β), $(\pi - \beta, \pi - \alpha)$, on a $\delta > 0$, $A\Delta > 0$. Le lieu est une hyperbole qui coupe le diamètre conjugué de OY.

Soit $\omega = \beta$ ou $\pi - \beta$; δ est positif, Δ n'est pas nul, mais A et D (coefficients des termes en y^2 et en y) sont nuls. Le lieu est une hyperbole ayant pour asymptote OY.

Lorsque ω se trouve dans l'un des intervalles $\left(\beta, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi - \beta\right)$, on a $\delta > 0$, $A\Delta < 0$. Le lieu est une hyperbole qui coupe le diamètre OY.

Dans l'hypothèse $\omega = \frac{\pi}{2}$, le lieu dégénère en deux droites confondues avec OX.

Les différents cas que nous venons d'examiner, correspondent aux différentes positions de OA par rapport aux axes et aux droites Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4.

Le lieu des foyers des hyperboles variables sera semblable à Σ si l'on a $\cos \omega = \cos^2 \alpha$.

III. Pour faire coïncider les axes coordonnés avec les axes de symétrie du lieu, il faut les faire tourner de l'angle φ déterminé par l'équation

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{B}{A-C} = \frac{2\operatorname{tg}\omega}{1-\operatorname{tg}^2\omega} = \operatorname{tg} 2\omega .$$

On voit que AB est l'un de ces axes de symétrie.

En appliquant des formules connues, on trouve l'équation réduite

$$\frac{x^2}{p^2 \operatorname{tg}^2 \beta} + \frac{y^2}{p^2(\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \omega)} = 1,$$

et de celle-ci on conclut facilement que A et B sont les foyers du lieu cherché.

IV. Appelons O′, F, d le centre, un foyer et la directrice d'une hyperbole Γ passant par les points donnés A, B et homothétique à une hyperbole donnée Σ.

La droite OO′ est évidemment parallèle au diamètre conjugué avec les cordes de Σ parallèles à AB; donc le lieu de O′ est une droite.

Prenons pour d une perpendiculaire à OX qui ne passe pas entre A et B; ces points appartiennent alors à une même branche de Γ. Soient A_1, B_1 les projections de A, B sur d, et A_2, B_2 celle de A, B sur OX; appelons m l'excentricité numérique de Σ. Nous aurons

$$AF = m \cdot AA_1, \quad BF = m \cdot BB_1,$$

d'où l'on conclut que la différence des distances AF, BF est égale à $m \cdot A_2B_2$, et que le lieu du point F est une hyperbole ayant pour foyers les points A, B. Toutefois, pour que l'hyperbole Γ existe, on doit avoir

$$m \cdot A_2B_2 < AB \text{ ou } m \cdot AB \cos\omega < AB, \text{ ou } m < \frac{1}{\cos\omega} .$$

Si l'on choisit pour directrice de Γ une droite perpendiculaire à OX et passant entre A et B, la somme $AF + BF$ sera égale à $m \cdot A_2B_2$, et le lieu de F sera une ellipse ayant pour foyers les points A et B. Mais on doit avoir $m \cdot A_2B_2 > AB$, ou $m \cdot AB \cos\omega > AB$, ou $m > \frac{1}{\cos\omega}$.

V. Tout point P (autre que le centre O′) invariablement lié à la conique variable Γ décrit une conique.

D'abord, si F, F′ sont les deux foyers de Γ, la droite FF′ est une

corde du lieu décrit par ces points; comme elle se déplace parallèlement à OX, son milieu O′ décrit un diamètre D de ce lieu.

Le triangle O′PF étant d'espèce constante, on passe du lieu (10) au lieu (P) en faisant tourner *l'ordonnée* O′F (D et O′X sont considérés comme des axes coordonnés) d'un angle constant et en la modifiant dans un rapport constant. Par suite, le lieu (P) est encore une conique.

VI. On pourrait encore généraliser la question du concours en considérant une hyperbole variable passant par deux points fixes A, B et dont une asymptote passe par un point fixe, l'angle des asymptotes étant donné (voir question 1493).

BIBLIOGRAPHIE.

Kurze Einleitung in die Differential- und Integralrechnung (Infinitesimal-Rechnung) von Dr. Ph. I. Fisher, Professor der Nationalökonomie an der Yale Universität, übersetzt von N. Pinkus. Leipzig, Teubner 1904. (VI-72 pp. in-8°, 11 fig. dans le texte, cartonné). Prix : 1,80 marc.

Opuscule écrit pour les statisticiens et les économistes qui veulent comprendre la partie mathématique de la théorie des richesses telle qu'elle est exposée par Jevons, Walras et d'autres. 1. Dérivée; son interprétation géométrique, cas de x^n. 2. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction de fonction. 3. Dérivées de sin x, tang x, séc x, e^x, arc sin x, arc tang x, log x, x^n (n non entier positif). 4. Dérivées successives. Maxima et minima. 5. Théorème de Taylor. 6. Calcul intégral. 7. Fonctions de plusieurs variables.

A mesure que l'on s'éloigne du début, l'exposition est de moins en moins satisfaisante au point de vue de la rigueur : à la page 4, dy est assez bien défini; à la page 48, n° 76, $dy = \lim \Delta y$!

Nous conseillons aux économistes qui veulent apprendre les principes fondamentaux de l'analyse infinitésimale de lire plutôt que la brochure de M. Fisher, les 16 pages qui terminent la petite *Algèbre* de M. P. Giraud : ils pourront y puiser des idées précises et exactes sur les variations d'une fonction étudiées au moyen de sa dérivée. (P. M.)

Vorbereitende Einführung in die Raumlehre, von Dr. G. Holzmüller. Leipzig et Berlin, Teubner, 1904 (X-123 pp. in-8° et 76 figures dans le texte). Prix : 1,60 marc.

Sommaire. I. Préliminaires sur la mesure des grandeurs. II. Généralités sur la notion de l'espace et la géométrie. III. Explication des principales notions géométriques au moyen de modèles et de dessins. A) Cube, droite, plan et carré. B) Construction simple de figures planes. IV. Corps déduits du cube, développement de leur surface sur un plan, modèles. A) Prismes et pyramides. B) Tétraèdre et octaèdre réguliers. c) Icosaèdre et dodécaèdre réguliers. Exemples de

pénétration de deux corps. V. Quelques remarques sur la symétrie dans le plan et dans l'espace. VI. Notions sur la sphère, la circonférence de cercle, les arcs de cercle et les angles, les figures limitées par des arcs de cercle sur une sphère, le cylindre et le cône. VII. Appendice. Indications pour la construction de quelques modèles plus difficiles.

Le programme prussien de 1901 prescrit, pour la cinquième des écoles réales supérieures et pour la quatrième des écoles latines un enseignement intuitif préparatoire de notions de géométrie avec des exercices sur l'emploi du compas et de la règle. Le professeur doit, au moyen de modèles très simples, développer chez l'élève des notions qu'il possède déjà d'une manière en quelque inconsciente; pour cela, il ne partira pas, comme Euclide, de définitions scientifiques abstraites, mais ces définitions résulteront plutôt des conversations entre maître et élèves et seront formulées successivement à mesure que les choses seront complètement analysées.

Le Manuel du Dr. Holzmüller réalise le programme que nous venons d'indiquer; on peut même dire qu'il le dépasse souvent. On y rencontre une foule de notions intéressantes, que pourraient mettre à profit les professeurs de mathématiques ou de dessin de nos établissements d'instruction moyenne pour rendre leur enseignement plus intuitif et plus attrayant, par suite plus fructeux.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1485.

(Voir *Mathesis*, (3); IV, p. 216.)

Soient (ρ_1, θ_1), (ρ_2, θ_2), (ρ_3, θ_3), (ρ_4, θ_4) *les coordonnées polaires des pieds des normales issues du point* $P(\rho', \theta')$ *à l'ellipse*

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}. \tag{1}$$

Démontrer les relations

$$\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 = \frac{b^2\rho'^2}{e^2}, \tag{2}$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 2\theta' + (1 + 2n)\pi. \tag{3}$$

(Nanson.)

Solution par M. H. Lez. On sait que les pieds des normales qu'on peut mener d'un point $P(x', y')$ à une ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

se trouvent sur une hyperbole équilatère

$$c^2xy - a^2x'y + b^2y'x = 0. \tag{4}$$

Transportons l'origine des coordonnées au foyer F ($x = c$), l'équation (4) devient :

$$c^2xy + c^2y - a^2x'y + b^2y'x + b^2cy^2 = 0.$$

Introduisant les coordonnées polaires, on obtient :

$$\rho^2c^2 \sin\theta\cos\theta + \rho(c^2\sin\theta - ax'\sin\theta + b^2y'\cos\theta) + b^2cy' = 0. \quad (5)$$

De l'équation (1) on tire :

$$\cos\theta = \frac{b^2 - a\rho}{c\rho}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{\rho}\sqrt{c^2 - (\rho - a)^2}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (5) et réduisant, on trouve :

$$c^2\rho^4 - 2ac(2c - x')\rho^2 + \cdots\cdots + a^2(a^2 - c^2)[(c - x')^2 + y'^2] = 0. \quad (6)$$

D'où

$$\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 = \frac{a^2b^2}{c^2}[y'^2 + (c - x')^2] = \frac{a^2b^2\rho^2}{c^2} = \frac{b^2\rho'^2}{e^2},$$

car

$$\overline{FP}^2 = \rho'^2 = y'^2 + (c - x')^2.$$

Maintenant, éliminant ρ entre l'égalité (1) et l'équation (5), on aura la relation qui lie les variables $\sin\theta$, $\cos\theta$. On obtient ainsi :

$$\left.\begin{array}{c} ac(c - x')\sin\theta\cos\theta + acy'\cos^2\theta + (c^2 - ax')\sin\theta \\ + (a^2 + c^2)y'\cos\theta + acy' \end{array}\right\} = 0,$$

ou

$$M\sin\theta\cos\theta + N\cos^2\theta + P\sin\theta + Q\cos\theta + S = 0. \quad (7)$$

Mais

$$\sin\theta = \frac{2\,\mathrm{tang}\frac{\theta}{2}}{1 + \mathrm{tang}^2\frac{\theta}{2}}, \qquad \cos\theta = \frac{1 - \mathrm{tang}^2\frac{\theta}{2}}{1 + \mathrm{tang}^2\frac{\theta}{2}};$$

portant ces valeurs dans l'équation (7), on trouve

$$\left.\begin{array}{c} (N + S - Q)\,\mathrm{tang}^4\frac{\theta}{2} + 2(P - M)\,\mathrm{tang}^3\frac{\theta}{2} \\ + 2(S - N)\,\mathrm{tang}^2\frac{\theta}{2} + 2(P + M)\,\mathrm{tang}\frac{\theta}{2} + N + S + Q \end{array}\right\} = 0,$$

ou

$$y'(a-c)^2\tan g^4\frac{\theta}{2}+2(a-c)(c^2+ax')\tan g^3\frac{\theta}{2}$$

$$-2(a+c)(c^2-ax')\tan g\frac{\theta}{2}-y'(a+c)^2=0. \qquad (9)$$

Remarquant que dans l'équation

$$A_0\tan g^4\frac{\theta}{2}+A_1\tan g^3\frac{\theta}{2}+A_2\tan g^2\frac{\theta}{2}+A_3\tan g\frac{\theta}{2}+A_4=0,$$

on a

$$\tan g\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{2}\right)=\frac{A_1-A_3}{A_0-A_2+A_4},$$

l'équation (9) donne

$$\tan g\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{2}\right)=\frac{2(a-c)(c^2+ax')+2(a+c)(c^2-ax')}{y'[(a-c)^2-(a+c)^2]}$$

$$=-\frac{c-x'}{y'}.$$

Or, la droite PF a pour équation $\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'-c}$; elle fait donc un angle φ dont la tangente est égale à $-\frac{y'}{c-x'}$. L'angle θ' étant le supplément de φ, $\tan g\,\theta'=-\tan g\,\varphi=\frac{y'}{c-x'}$; on a donc

$$\tan g\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{2}\right)\cdot\tan g\,\theta'=-1,$$

ou

$$\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{2}\right)\cos\theta'+\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{2}\right)\sin\theta'$$

$$=\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{2}-\theta'\right)=0.$$

Cette relation ayant lieu pour $\frac{\pi}{2}+n\pi$, on a

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4-2\theta'=\pi(1+2n).$$

M. E. N. Barisien a résolu la même question.

Question 1489.

(Voir *Mathesis*, (3) IV; p. 240.)

Soient (aa'), (bb'), (cc') *les trois couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre* ABCD. *Par un point* P, *on mène les droites* a'', b'', c'', *qui rencontrent respectivement les couples* (a, a'), (b, b'), (c, c') *aux points* (A_1, A_1'), (B_1, B_1'), (C_1, C_1').

Démontrer que le plan $b''c''$ *tourne autour d'une droite fixe* a''' *s'appuyant sur* a *et* a', *lorsque le point* P *parcourt la droite* a''. *Réciproquement, si un plan tourne autour d'une droite* a''' *s'appuyant sur* a *et* a', *il rencontre les arêtes* b, b', c, c' *en des points* B_1, B_1', C_1, C_1' *tels que le point d'intersection des droites* B_1B_1', C_1C_1' *parcourt une droite* a'' *s'appuyant sur* a *et* a'. (Steiner).

Solution géométrique par M. F. Dupont. Etant donnée une position particulière du point P sur a'', pour obtenir les points B_1, B_1', C_1, C_1', où b'' et c'' coupent b et b', c et c', nous prendrons l'intersection des plans b'P, bP, c'P, cP avec b, b', c, c'. Cela posé, on voit facilement que les ponctuelles $[B_1]$, $[B_1']$, $[C_1]$, $[C_1']$ sont toutes projectives entre elles, comme étant des sections des faisceaux de plans $b'[P]$, $b[P]$, $c'[P]$, $c[P]$ projetant la ponctuelle $[P]$ à partir des axes b', b, c', c.

Les ponctuelles $[B_1']$ et $[C_1']$ sont même perspectives, comme ayant l'élément uni C correspondant à la position $P \equiv A_1$. Il en est de même des ponctuelles $[B_1]$ et $[C_1]$ qui ont le point A pour élément uni.

Si maintenant nous faisons coïncider P avec A_1, nous obtiendrons la droite BD comme position de $B_1'C_1'$ et, par conséquent, le centre de perspective A' des ponctuelles $[B_1']$ et $[C_1']$ est situé sur a'. Puisque les droites B_1C_1 et $B_1'C_1'$ sont toujours dans un même plan, le centre de perspective des ponctuelles $[B_1]$ et $[C_1]$ sera aussi le point A'; et, par conséquent, tous les plans $b''c''$ passeront par A'.

De même, ils devront passer par le centre de perspective A des ponctuelles $[B_1]$, $[C_1']$ et $[B_1']$, $[C_1]$: par conséquent, ils tournent autour de la droite $a''' \equiv AA'$.

Réciproque. Le faisceau de plans π d'axe a''' déterminera dans le plan BCD un faisceau de rayons qui coupera les droites b' et c' suivant deux ponctuelles perspectives $[B_1']$ et $[C_1']$ et dans le plan ABD, les deux ponctuelles perspectives $[B_1]$ et $[C_1]$. Les faisceaux des plans $b[B_1']$, $c[C_1']$, $b'[B_1]$, $c'[C_1]$ sont donc tous projectifs entre eux.

Les faisceaux $b[B_1']$ et $c\,[C_1']$, $b'[B_1]$ et $c'[C_1]$ sont même perspectifs à cause des éléments unis ABD, BCD qui correspondent à la position $\pi \equiv a'''a'$. Si nous prenons pour π le plan $a'''a$, nous obtiendrons la droite a comme intersection des plans bB_1' et cC_1', $b'B_1$ et $c'C_1$, et les plans sur lesquels se coupent les éléments homologues des feuillées $b[B_1']$ et $c[C_1']$, $b'[B_1]$ et $c'[C_1]$ passent par la droite a. Les droites d'intersection des plans homologues des faisceaux $b'[B_1]$ et $c'[C_1]$, $b[B_1']$ et $c[C_1']$ forment le même plan, car elles se rencontrent toujours en un point P et elles s'appuyent sur a. Désignons par A_1' le point de rencontre de ce plan avec a'.

De même les plans homologues des feuillées $b[B_1']$ et $c'[C_1]$, $b'[B_1]$ et $c[C_1]$ doivent se couper sur un plan $a'A_1$, A_1 étant l'intersection de ce plan avec a.

On en conclut que le point P étant l'intersection des quatre plans bB_1', cC_1', $b'B_1$, $c'C_1$ doit parcourir l'intersection $a'' \equiv A_1A_1'$ des plans fixes aA_1', $a'A_1$.

Remarque. Cette réciproque n'est que la proposition correspondant au théorème direct suivant le principe de dualité.

M. Claeys nous a également adressé une bonne solution synthétique.

Solution analytique par MM. P. Bastin et Claeys. 1° Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les coordonnées du point P relativement au tétraèdre donné. Si a, b, c désignent les arêtes AB, AC, AD, nous avons pour équations:

$$\text{de la droite } a'' \ldots\ldots \frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}=0,\quad \frac{z}{\gamma}-\frac{t}{\delta}=0;$$

$$\text{»} \qquad b'' \ldots\ldots \frac{x}{\alpha}-\frac{z}{\gamma}=0,\quad \frac{y}{\beta}-\frac{t}{\delta}=0;$$

$$\text{»} \qquad c'' \ldots\ldots \frac{x}{\alpha}-\frac{t}{\delta}=0,\quad \frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}=0;$$

$$\text{du plan } b''c'' \ldots\ldots \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}-\frac{t}{\delta}=0.$$

Ce dernier passe par une droite a''' ayant pour équations

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=0,\quad \frac{z}{\gamma}+\frac{t}{\delta}=0;$$

a''', qui s'appuie sur a et a', est fixe lorque le point P se déplace sur a'', car dans ce cas les rapports $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ restent constants; les points d'appui

A_2 et A'_2 sont les conjugués harmoniques des points A_1 et A'_1 par rapports aux arêtes $AB \equiv a$ et $CD \equiv a'$.

2° Une droite a''', s'appuyant sur a et a', peut être définie par les équations $x + \lambda y = 0$, $z + \mu t = 0$; un plan passant par a''' sera représenté par

$$x + \lambda y + k(z + \mu t) = 0.$$

La droite B_1, B'_1, est dans ce plan et s'appuie sur b et b'; elle a donc pour équations,

$$x + kz = 0, \quad \lambda y + k\mu t = 0.$$

Nous trouvons de même pour équations de la droite $c_1c'_1$:

$$x + k\mu t = 0, \quad \lambda y + kz = 0.$$

De ces quatre dernières équations, dont trois seulement sont distinctes, nous tirons par l'élimination de k :

$$x - \lambda y = 0, \quad z - \mu t = 0,$$

qui définissent une droite a'' s'appuyant sur a et a'.

×QUESTION D'EXAMEN.

1198. Soient P, Q deux points inverses par rapport au triangle ABC. Démontrer que le produit des puissances du point A par rapport aux cercles circonscrits aux deux triangles BCP, BCQ est égal à b^2c^2.

(FUHRMANN).

Appelons α, α' les angles BPC, BQC; nous aurons $\alpha + \alpha' = \pi + A$. Les cercles BCP, BCQ rencontrant AC aux points M, N, les puissances de A par rapport à ces cercles sont AC. AM. AC; AN. AM et AN se calculent dans les triangles AMB, ANB dont les angles extérieurs en M et N sont égaux à α et α' et dont les angles en B sont égaux à $\alpha - A$, $\alpha' - A$, etc.

La figure suppose P et Q intérieurs au triangle ABC.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1506. De chaque point M d'une ellipse donnée comme centre on décrit un cercle Σ qui touche le petit axe.

1° Trouver le lieu des centres de similitude du cercle Σ et du cercle principal de l'ellipse.

2° Trouver l'enveloppe de l'axe radical de ces deux cercles et le lieu du pied de cet axe sur la ligne des centres OM.

3° Trouver les aires de ces deux courbes. (E. N. BARISIEN).

1507. On donne dans un même plan deux coniques C, C'. La tangente en un point quelconque M de C coupe C' aux points A, B. On détermine sur cette tangente un quatrième point N par la condition que le rapport anharmonique (ABMN) ait une valeur constante λ. Trouver le lieu du point N. (ABRAMESCU.)

1508. La tangente et la normale en un point quelconque M d'une courbe rencontre les axes coordonnés aux points T, T', N, N'; les parallèles à OM par N et à TT' par N se coupent en un point M'.

Déterminer la courbe par la condition que l'abscisse ou l'ordonnée de M' soit égale à l'ordonnée de M, ou bien que l'abscisse de M' soit moyenne harmonique entre ON et ON'. (ROSE).

1509. Discuter les racines de l'équation

$$3x^4 + 4px^3 - 12p^2x^2 + p^2(q - q^2) = 0.$$

Considérer p et q comme les coordonnées rectangulaires d'un point M d'un plan et distinguer différentes régions de ce plan suivant la nature des racines. (*Faculté des Sciences de Bucarest*, 1904).

1510. Les hauteurs AA', BB', CC' d'un triangle ABC se coupant au point H, posons

$$\frac{AH}{AH'} = \alpha, \quad \frac{BH}{HB'} = \beta, \quad \frac{CH}{HC'} = \gamma.$$

1° Démontrer les relations

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \alpha + 1, \quad \cos A = \frac{\alpha}{\alpha + 2} \cos(B - C),$$

$$b^2 + c^2 - a^2 = \frac{2\alpha}{\alpha + 1} \overline{AA'},$$

$$\alpha\beta\gamma - (\alpha + \beta + \gamma) = 2.$$

2° Si l'on donne α, H et le centre de gravité G du triangle ABC, les points A, A' et le milieu A_1 de BC décrivent des circonférences, et le côté BC tourne autour d'un point fixe.

3° Si l'on donne α et les sommets B, C, les points A, H décrivent des ellipses.

4° Quel est le lieu du sommet C lorsque les sommets A et B restent fixes et que α a une valeur donnée? (J. NEUBERG).

MÉMORIAL MATHÉMATIQUE

Mars.

1. 1884. Mort d'*I. Todhunter*, à Cambridge.
2. 1885. Mort d'*A. Serret*, à Versailles.
3. 1845. Naissance de *George Cantor*, à Saint-Pétersbourg.
1879. Mort de *W. K. Clifford*, à Madère.
4. Néant. **5. 1512.** Naissance de *G. Mercator*, à Rupelmonde.
1827. Mort de *Laplace*, à Auteuil.
1835. Naissance de *H. Weber*, à Heidelberg.
6. 1875. Mort de *C. L. Mathieu*, à Paris.
7. 1889. Mort de *A. Genocchi*, à Turin.
8. 1644. Mort de *B. Castelli*, à Rome.
9. 1866. Mort de *E. Bour*, à Val-de-Grâce.
10. 1837. Mort de *H. Th. Colebrooke*, à Londres.
11. 1780. Naissance de *A. L. Crelle*, à Eichwerder près Wriezen a. O.
1811. Naissance de *U. Leverrier*, à Saint-Lo (Manche).
12. 1859. Naissance d'*Ernest Cesàro*, à Naples.
13. 1884. Mort de *S. Aronhold*, à Berlin.
14. 1875. Mort de *E. Lamarle*, à Douai.
15. 1897. Mort de *J. J. Sylvester*, à Londres.
16. 1846. Naissanee de *G. Mittag-Leffler*, à Stockholm.
17. 1782. Mort de *Daniel I Bernoulli*, à Bâle.
18. 1796. Naissance de *J. Steiner*, à Utzenzdorf, près de Soleure.
19. 1861. Naissance de *A. Kneser*, à Grüssow (Mecklembourg).
20. 1895. Mort de *L. Schläfli*, à Berne.
21. 1768. Naissance de *J. B. Fourier*, à Auxerre.
22. 23. Néant. **24. 1809.** Naissance de *J. Liouville*, à Saint-Omer (Pas-de-Calais).
25. 1826. Naissance de *J. Weingarten*, à Berlin.
26. 1859. Naissance de *Ad. Hurwitz*, à Hildesheim.
27. Néant. **28. 1749.** Naissance de *Laplace*, à Beaumont-en-Auge.
29. 1840. Naissance de *A. D. André*, à Lyon.
30. 1796. *Gauss* découvre la construction du polygone régulier de 17 côtés.

31. 1596. Naissance de *Descartes*, à La Haye en Touraine.
1727. Mort de *Newton*, à Londres.
1730. Naissance de *E. Bézout*, à Nemours.

EXERCICES DE CALCUL INTÉGRAL(*) ;

par M. E. N. Barisien.

1. Trouver l'aire commune aux deux cardioïdes

$$\rho = 2R(1 + \cos\theta), \quad \rho = 2R(1 - \cos\theta).$$

Ces courbes sont symétriques l'une de l'autre par rapport au point de rebroussement commun O et aussi par rapport à la droite OY perpendiculaire à l'axe polaire OX. On en conclut

$$U = 2\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} 4R^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta = 8R^2\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta = 2(3\pi-8)R^2.$$

2. On considère sur une circonférence de centre O un point fixe A et un point variable M. On porte sur chaque rayon OM une longueur MN = MN′ = arc AM. Rectifications et quadrature des courbes (N), (N′).

Posons OA = 1 et prenons O pour pôle, OA pour axe polaire; les équations des courbes (N), (N′) seront

$$\rho = 1+\theta, \quad \rho = 1-\theta.$$

Ces lignes sont deux spirales d'Archimède qui sont symétriques l'une de l'autre par rapport à OA. Portons sur la circonférence donnée les arcs AB, AB′ égaux au rayon; les droites OB′, OB touchent les spirales en O. Si OB′ est pris pour axe polaire, la courbe (N) a pour équations $\rho = \theta$; l'arc OA de cette spirale et l'aire comprise entre cet arc et le rayon OA sont donnés par

$$s = \int_0^1 \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta = \tfrac{1}{2}\left[l(\theta+\sqrt{1+\theta^2})+\theta\sqrt{1+\theta^2}\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}[l(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}],$$

$$U = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \rho^2\,d\theta = \tfrac{1}{6}.$$

3. L'aire comprise entre les deux courbes

$$y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y = e^{-x^2},$$

qui sont asymptotes l'une à l'autre, est finie et égale à $(\pi - \sqrt{\pi})$.

(*) Depuis une dizaine d'années, notre zélé correspondant nous a adressé un nombre très considérable de questions proposées. Nous réunissons ici plusieurs problèmes intéressants sur les quadratures, en ajoutant les démonstrations. (J. N.).

Les deux courbes se touchent sur l'axe OY au point (0, 1); la tangente commune est horizontale. L'axe des abcisses est une asymptote commune. L'aire comprise entre l'asymptote et l'une ou l'autre courbe a respectivement pour expression

$$2\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi, \quad 2\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

4. Quadrature de la courbe dont les coordonnées paramétriques en φ sont

$$x=\frac{a\sin^{m+1}\varphi}{\cos^m\varphi}, \quad y=\frac{b\cos^{m+1}\varphi}{\sin^m\varphi},$$

m étant un nombre entier positif.

En faisant varier φ de 0 à $\frac{1}{2}\pi$ on obtient une première branche asymptotique des deux axes positifs; lorsque φ varie dans les intervalles $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$, $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ on trouve trois autres branches symétriques de la première par rapport à l'un des axes ou à l'origine. La succession de ces branches diffère suivant que m est pair ou impair. Prenons pour *élément* de l'aire comprise entre les axes coordonnés et la première branche de la courbe la quantité

$$ydx=ab(m+\cos^2\varphi)d\varphi;$$

nous aurons facilement pour cette aire $\frac{1}{4}ab(2m+1)\pi$.

(*A continuer*).

TRANSFORMATION, PAR DÉCOUPURES, D'UN POLYGONE EN UN CARRÉ;

par M. E. Barbette.

1. *Transformation d'un triangle en un rectangle* (Le lecteur est prié de faire la figure). Que l'angle A soit aigu, droit ou obtus, les angles B et C étant aigus, menons la droite DE qui unit les milieux D, E des côtés AB et AC, puis abaissons les perpendiculaires AF, BG, CH sur DE.

Les triangles rectangles AFD et BGD sont égaux, ainsi que les triangles rectangles AFE et CHE; en sorte que le triangle ABC est équivalent au rectangle BCHG.

La transformation nécessite les deux découpures DE *et* AF.

Remarque. Si l'angle A est droit, une construction plus simple s'im-

pose : menons la droite DE qui unit les points milieux des côtés CA et CB, puis abaissons sur DE la perpendiculaire BF.

Les triangles rectangles CDE et BFE sont égaux ; en sorte que le triangle ABC est équivalent au rectangle ABFD.

La transformation nécessite la découpure DE.

2. *Transformation d'un rectangle en un carré.* Soient m et n les longueurs des côtés AB et BC du rectangle ABCD et supposons $m > n$. Trois cas sont à considérer :

1° $m > 2n$. Traçons la circonférence de centre B et de rayon BC qui coupe AB en E ; élevons au point E la perpendiculaire sur AB jusqu'à sa rencontre en F avec la demi-circonférence décrite sur AB comme diamètre, puis dessinons le carré BFGH équivalent au rectangle donné. Abaissons HK perpendiculaire sur AB.

Il est facile de prouver l'égalité des triangles BEF et ADM, BEF et HKB, NCB et LKH, MFN et AGL.

La transformation nécessite les trois découpures AM, BN, GL.

2° $m < 2n$. Traçons la circonférence de centre B et de rayon BC qui coupe AB en E ; élevons au point E la perpendiculaire sur AB jusqu'à sa rencontre en F avec la demi-circonférence décrite sur AB comme diamètre, puis dessinons le carré BFGH équivalent au rectangle donné. Abaissons HK perpendiculaire sur AB.

Il est facile de prouver l'égalité des triangles BEF et ADM, BEF et HKB et par suite, des quadrilatères AKHG et MCBF.

La transformation nécessite les deux découpures AM *et* BF.

3° $m = 2n$ (Le lecteur est prié de faire la figure). La solution de ce problème est donnée par le carré BFAG qu'on obtient en joignant les milieux F, E des côtés CD, AB et en prolongeant la droite FE de EG = FE ; les triangles BCF et GEA, ADF et GEB sont égaux.

La transformation nécessite les deux découpures AF *et* BF.

3. *Transformation d'une somme de deux carrés inégaux en un carré.* Disposons les carrés donnés ABFG et AEDC de façon que le côté AG de l'un et le côté CA de l'autre soient supportés par une même droite.

La droite CB coupe ED en M; élevons en B la perpendiculaire sur BC qui rencontre FG en H. Les triangles CAB et HFB étant égaux, il en résulte que BH = BC. Terminons donc le carré CBHK, équivalant la somme des deux carrés donnés.

Cette construction fournit une démonstration du théorème de Pythagone.

Soit L le point où HK rencontre AG; abaissons KN perpendiculaire sur AG. Il est facile de prouver l'égalité des triangles CKN et BHF, KNL et CDM, MEB et LGH.

La transformation nécessite les trois découpures CM, BH, HL.

4. *Transformation d'un polygone quelconque en un carré.* Un polygone de p côtés est la somme de $(p-2)$ triangles, donc aussi la somme de $(p-2)$ carrés équivalents à ces triangles. De proche en proche, on transforme cette somme de $(p-2)$ carrés en une somme de $(p-3)$ carrés, celle-ci en une somme de $(p-4)$ carrés, et ainsi de suite; enfin une somme de deux carrés en un carré.

Remarque. Un quadrilatère ABA'C se transforme facilement en un rectangle équivalent GHH'G', en menant la droite DE, qui unit les milieux D, E des côtés A'B et A'C et la droite D', E', qui unit les milieux, D', E' des côtés A'B et A'C; puis en abaissant des points B et C les perpendiculaires communes GG' et HH' aux droites DE et D'E'.

LES CENTRES ISODYNAMIQUES DANS LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ(*);

par A. Krauß, professeur à Madrid.

I. Nous rappelons d'abord les propriétés de ces points.

Les trois cercles d'Apollonius d'un triangle ABC, c'est-à-dire les cercles qui ont pour diamètre la distance des points où les bissectrices intérieure et extérieure d'un angle du triangle rencontrent le côté opposé, se coupent aux deux mêmes points W, W' appelés *centres isodynamiques* du triangle. Cette dénomination provient de ce que les trois pro-

(*) La même question a été traitée sous une forme un peu différente par M. Godt, professeur à Lübeck, en 1904. Les loisirs nous manquent pour remonter à la première source de ce genre de travaux. (J. N.)

duits BC.WA, CA.WB, AB.WC des côtés opposés du quadrangle ABCW, par exemple, sont égaux entre eux. Un tel quadrangle est dit *isodynamique.*

Soient A′, B′, C′, D′ les points qui correspondent aux sommets A, B, C, D d'un quadrangle dans une inversion de pôle ω et de puissance P. On a

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{\omega A'}{\omega B} = \frac{\omega A'.\omega A}{\omega A.\omega B} = \frac{P}{\omega A.\omega B}, \quad \frac{C'D'}{CD} = \frac{P}{\omega C.\omega D};$$

d'où

$$\frac{A'B'.C'D'}{AB.CD} = \frac{P^2}{\omega A.\omega B.\omega C.\omega D},$$

résultat qui montre que les produits des côtés opposés du quadrangle A′B′C′D′ sont entre eux comme les produits homologues du quadrangle ABCD. En particulier, *un quadrangle isodynamique* ABCW *se transforme par inversion de ses sommets en un quadrangle isodynamique.*

Si l'on transforme par inversion le triangle ABC, écrivons

$$A'B' = P\frac{AB.\omega C}{\omega A.\omega B.\omega C}, \quad B'C' = P\frac{BC.\omega A}{\omega A.\omega B.\omega C},$$

d'où l'on déduit

$$A'B' : B'C' : C'A' = AB.\omega C : BC.\omega A : CA.\omega B.$$

Donc les côtés du triangle A′B′C′ sont proportionnels aux produits des côtés opposés du quadrangle ωABC. En particulier, *si l'on prend pour pôle d'inversion le centre isodynamique du triangle* ABC, *on obtient un triangle équilatéral* A′B′C′.

II. Cela posé, considérons l'équation

$$a_0 z^3 - 3a_1 z^2 - 3a_2 z - a_3 = 0, \qquad (1)$$

dans laquelle les coefficients sont des quantités réelles ou complexes. Les trois racines définissent un système de trois points A, B, C (une racine $x - \xi i$ est représentée par un point ayant pour coordonnées rectangulaires x, ξ).

Si l'on y fait la substitution linéaire générale

$$Z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad (2)$$

qu'on peut encore mettre sous la forme

$$Z = \mu + \frac{\varepsilon}{z + \eta}, \tag{3}$$

on obtient une nouvelle équation

$$A_0 Z^3 + 3A_1 Z^2 + 3A_2 Z + A_3 = 0, \tag{4}$$

dont les racines définissent un second système de trois points A', B', C'.

Or, la substitution (3) peut se décomposer ainsi :

$$z' = z + \eta, \quad z'' = \frac{\varepsilon}{z'}, \quad Z = \mu + z''; \tag{5}$$

les trois égalités (5) définissent respectivement une translation, une inversion symétrique ayant pour pôle l'origine O des coordonnées, et une translation. Chacune de ces trois transformations fait correspondre au centre isodynamique d'un triangle le centre isodynamique du nouveau triangle.

III. La translation $z' = z + \eta$ peut être choisie de manière à amener le centre isodynamique W de ABC en O. L'inversion symétrique $z''z' = \varepsilon$ transforme ensuite le triangle en un triangle équilatéral $A_1B_1C_1$ (*). Enfin la translation $Z = \mu + z''$ peut amener le centre du triangle $A_1B_1C_1$ en O.

Ainsi, la substitution (2), par un choix convenable des paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, transforme le triangle ABC en un triangle équilatéral A'B'C' ayant pour centre l'origine O des coordonnées. Mais les sommets d'un tel triangle A'B'C' sont définis par une équation binôme

$$Z^3 - p = 0 \quad \text{ou} \quad Z^3 = \rho^3(\cos\theta + i\sin\theta),$$

ayant pour racines

$$\rho\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right), \quad \rho\left(\cos\frac{\theta + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\theta + 2\pi}{3}\right),$$
$$\rho\left(\cos\frac{\theta + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\theta + 4\pi}{3}\right).$$

(*) Le second centre isodynamique W', après les deux premières transformations devient le centre du triangle équilatéral $A_1B_1C_1$, car il conserve son rôle par rapport à ce dernier triangle.

IV. Pour effectuer la réduction de l'équation (1) à la forme binôme $A_0Z^3 + A_3 = 0$, nous employons la substitution

$$Z = \frac{z - \alpha}{z - \beta}.$$

Les centres isodynamiques du triangle équilatéral A'B'C' en lequel il faut transformer le triangle ABC sont l'origine des coordonnées et un point quelconque à l'infini; les quantités α et β pour lesquelles $Z = 0$ ou ∞ correspondent donc aux deux points W, W' du triangle ABC.

Nous déterminons ces quantités en identifiant l'équation (1) avec l'équation

$$A_0 (z - \alpha)^3 + A_3 (z - \beta)^3 = 0,$$

ce qui donne

$$A_0 + A_3 = a_0, \quad A_0\alpha + A_3\beta = -a_1, \quad A_0\alpha^2 + A_3\beta^2 = a_2,$$
$$A_0\alpha^3 + A_3\beta^3 = -a_3.$$

En éliminent A_0 et A_3 entre les trois premières égalités, puis entre les trois dernières on trouve

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 \\ -a_1 & \alpha & \beta \\ a_2 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 \\ -a_2 & \alpha & \beta \\ a_3 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Développons ces déterminants suivant les éléments de la première colonne et supprimons ensuite le facteur $\beta - \alpha$ commun à tous les termes; il vient

$$a_0\alpha\beta + a_1(\alpha + \beta) + a_2 = 0, \quad a_1\alpha\beta + a_2(\alpha + \beta) + a_3 = 0.$$

De ces égalités on déduit

$$\frac{\alpha\beta}{a_1a_3 - a_2^2} = \frac{-(\alpha + \beta)}{a_0a_3 - a_2a_2} = \frac{1}{a_0a_2 - a_1^2},$$

de sorte que α et β sont les racines de l'équation

$$(a_0a_2 - a_1^2)\, u^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)\, u + (a_1a_3 - a_2^2) = 0,$$

appelée la *canonisante* de (1).

De là, on déduit le théorème suivant :

Les racines du hessien d'une binaire cubique correspondent aux centres isodynamiques du triangle dont les sommets représentent les racines de la binaire cubique.

Il est sous entendu qu'on passe de l'équation (1) à la binaire cubique homogène en remplaçant z par $(x : y)$.

V. Considérons encore une équation du quatrième degré

$$f(z) = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4 = 0;$$

soient A, B, C, D les quatre points-racines.

Supposons que la transformation linéaire

$$Z = \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

la ramène à une équation binôme $A_0 Z^4 + A_4 = 0$. Elle doit alors être identique à l'équation

$$A_0 (z - \alpha)^4 + A_4 (z - \beta)^4 = 0,$$

ce qui exige

$$A_0 + A_4 = a_0, \quad A_0\alpha + A_4\beta = -a_1, \quad \cdots, \quad A_0\alpha^4 + A_4\beta^4 = a_4.$$

Et éliminant entre trois équations consécutives de ce système les inconnues A_0, A_4 on trouve

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 \\ -a_1 & \alpha & \beta \\ a_2 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 \\ -a_2 & \alpha & \beta \\ a_3 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_2 & 1 & 1 \\ -a_3 & \alpha & \beta \\ a_4 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} a_0\alpha\beta + a_1(\alpha + \beta) + a_2 &= 0, \\ a_1\alpha\beta + a_2(\alpha + \beta) + a_3 &= 0, \\ a_2\alpha\beta + a_3(\alpha + \beta) + a_4 &= 0. \end{aligned}$$

Pour que le problème soit possible, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Si cette condition est remplie, α et β se déterminent comme plus haut au moyen d'une équation du second degré. La condition (6) exprime que les couples de points définis par les équations

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 f}{dx dy} = 0, \quad \frac{d^2 f}{dy^2} = 0,$$

où $f(x, y) = 0$ représente l'équation proposée rendue homogène, sont en involution.

L'équation binôme $A_0Z^4 + A_4 = 0$ définit un carré A′B′C′D′ ayant pour centre l'origine O des coordonnées. Ce carré, comme on l'a expliqué plus haut, provient du quadrilatère ABCD par une translation suivie d'une inversion symétrique de pôle O et d'une nouvelle translation. Ces transformations conservent les rapports entre les produits des côtés opposés; par conséquent,

$$\frac{AB.CD}{A'B'.C'D'} = \frac{BC.DA}{B'C'.D'A'} = \frac{AC.BD}{A'C'.B'D'}.$$

Il en résulte

$$AB.CD = BC.DA = \tfrac{1}{2} AC.BD.$$

Donc le quadrilatère ABCD est inscriptible dans une circonférence et les deux produits des côtés opposés sont égaux entre eux; autrement dit, il est *harmonique*. Le cercle d'Apollonius du triangle ABC qui passe par A, rencontre la circonférence circonscrite au point D. Tout point de cette circonférence jouit de la propriété que si on le prend pour pôle d'une inversion, les triangles ABC et DBC se transformant en des triangles isoscèles.

Les cercles d'Apollonius des deux triangles ABC, ABD se rencontrent en deux points W, W′ qu'on peut appeler *centres isodynamiques* du quadrilatère harmonique ABCD. Quand on prend l'un de ces points pour pôle d'inversion, le quadrilatère se change en un carré. Une inversion par rapport à un pôle quelconque transforme les centres isodynamiques d'un quadrilatère harmonique en les centres isodynamiques d'un nouveau quadrilatère harmonique.

NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Sur le pentagone inscriptible à une circonférence.* Soient a, b, c, d, e les longueurs des côtés CD, DE, EA, AB, BC du pentagone ABCDE, respectivement opposés aux sommets A, B, C, D, E et soient a', b', c', d', e' les longueurs des diagonales BE, CA, DB, EC, AD. On a les relations

$$a'b'e' = [illegible] + acd + bb'd,$$

$$a'b'(a - b) + [illegible] + d'e'(d - e) + e'a'(e - a)$$
$$= ac(a' - c') + [illegible] + da(d' - a') + eb(e' - b').$$

(Cardoso-Laynes).

I. Les quadrilatères inscriptibles ABCD, AEDB donnent

$$ad + ee' = b'c', \quad bd + cc' = a'e'.$$

Eliminons c' entre ces relations, etc.

II. On a les cinq égalités

$$aa' + be = c'd', \quad bb' + ca = d'e', \quad cc' + db = e'a', \quad \ldots$$

Ajoutons les membre à membre après les avoir multipliées une première fois par b', c', d', e', a', une seconde fois par e', a', b', c', d'; les nouvelles égalités auront les mêmes seconds membres. En égalant leurs premiers membres, on obtient, après transposition de quelques termes, la seconde formule de M. Cardoso-Laynes.

2. *Sur la question* 1490 (Voir *Mathesis*, 1905, p. 23). Nous avons reçu deux nouvelles démonstrations de la première partie de cette question.

1. Si les arcs AC, BC se coupent une seconde fois en C', l'hypothèse AD $= \pi -$ CD (D désignant le milieu du côté BC) entraîne l'égalité AD $=$ C'D, d'où l'on conclut *angle* C'AD $=$ AC'D $=$ ACD ou *angle* DAC $+$ ACD $= \pi$. Par analogie *angle* BAD $+$ ABD $= \pi$.

Il en résulte que la somme des angles du triangle ABC est égale à quatre droits, et l'excès sphérique vaut deux droits. (A. C.).

2. Achevons le grand cercle BC, et prolongeons la médiane DA jusqu'à la seconde rencontre en N avec le cercle BDC.

L'arc AD étant le supplément de BD est égal à l'arc NB, de même les arcs BD, AN sont égaux. Par suite, les triangles ADB, BNA ayant leurs trois côtés égaux, le premier est la moitié du fuseau DBNAD. On verrait de même que le triangle ADC vaut la moitié du fuseau DCNAD. Donc le triangle proposé ABC vaut la moitié d'un hémisphère ou un fuseau droit. (H. Lez).

BIBLIOGRAPHIE.

Correspondance.

M. le commandant Liasse, auteur de l'ouvrage intitulé : **Géométrie imaginaire et géometrie positive**, que nous avons critiqué, pp. 14-15 nous demande l'insertion de la réponse suivante :

« 1° On ne trouve dans ce travail aucune hypothèse particulière et aucun des deux postulats que vous m'avez attribués ou paru m'attribuer.

« 2° Les propositions que vous avez formulées sous le nom de postul

M. Liasse me semblent d'ailleurs exactes (*) pour la raison générale suivante: un angle inscrit dans une circonférence est indépendant du rayon; car s'il en dépendait, il arriverait que, dans une circonférence du rayon donné, la valeur d'un angle inscrit déterminé varierait suivant l'unité de longueur adoptée pour mesurer le rayon. » (**)

Elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester, von Dr. E. Netto, Professor an der Universität Giessen, Leipzig, Teubner. 1904 (In-8° de VIII-200 pp., 13 figures dans le texte). Prix : 4 marcs 40.

Cet ouvrage renferme les leçons du cours *Introduction à l'Algèbre*; il a pour but de préparer les étudiants en mathématiques aux théories de l'Algèbre supérieure et de réunir pour les non-mathématiciens les méthodes et les problèmes les plus importants. Ce n'est pas un traité proprement dit. L'auteur s'est surtout proposé de développer successivement diverses notions, d'en montrer les applications et de préparer ainsi l'étude de l'Algèbre supérieure; il s'est interdit de trop longs développements sur les questions touchant à la philosophie des mathématiques (nombres irrationnels, nombres complexes, passage à la limite, etc.).

La matière traitée est repartie en huit chapitres : I. Équations du premier degré. II. Équations incomplètes du second degré. III. Équations complètes du second degré. IV. Combinaisons. Puissance d'un polynome. V. Déterminants. Équations linéaires à plusieurs inconnues. VI. Équations binômes. VII. Équations du 3e degré. VIII. Équations du quatrième degré. Chacun de ces chapitres donne plus que n'indique son titre. Par exemple, le premier chapitre contient la représentation géométrique de l'équation $y = ax - b$, la somme des termes d'une progression arithmétique, des développements sur les fractions continues. Dans le chapitre II, nous rencontrons le développement de $\sqrt{a}$ en fraction continue, la périodicité de cette fraction, l'équation de Pell, la représentation géométrique de $x - yi$ en coordonnées rectangulaires ou polaires.

Cette analyse, bien qu'incomplète, suffit pour montrer que le livre de M. Netto est fort intéressant. (J. N.).

Dr. Bardey's **Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben aus der Elementar-Arithmetik.** Neue Ausgabe vorzugsweise zum Gebrauche in den mittleren und oberen Klassen der Lehrerseminare bearbeitet von W. Seyffarth. Leipzig und Berlin, Teubner. 1904. (In-8° de VIII-[illegible] pages, cartonné). Prix : 2 marcs 80.

Sommaire. I. Addition. II Soustraction III. Multiplication. IV. Division.

(*) En géométrie euclidienne (Note de M. Liasse).

(** A corriger dans notre critique, p. 14, les deux formules. La première doit être [illegible] $a, b = \text{th} \frac{1}{2} a \, \text{th} \frac{1}{2} b$, la seconde $\tan \frac{1}{2} [illegible] = \text{chr} \tan A$, en supposant que A [illegible] soit un d'angle [illegible]. Les postulats que nous avons attribués à l'auteur ne sont pas *explicitement* dans son opuscule, mais nous pensons qu'ils y sont *implicitement*. (P. M.).

V. Fractions ordinaires. VI. Nombres décimaux. VII. Divisibilité des nombres. IX. Rapports et proportions. X. Puissances. XI. Extraction des racines. XII. Logarithmes. XIII. Équations du premier degré. XIV. Équations du second degré. XV. Analyse indéterminée. XVI. Progressions. XVII. Intérêts composés et annuités.

Excellent recueil d'exercices sur l'arithmétique et le *calcul algébrique*, avec des *questions de théorie*.

Méthode pour la résolution géométrique des principales formules de trigonométrie rectiligne, par E. Lercangée, lieutenant et L. Libois, lieutenant retraité. Bruxelles, Libois, rue Ernest Allard, 45, 1904. Prix : 2 fr. 50. (Autographie in-8°, 101 pp., 61 figures).

Cet ouvrage, rédigé d'après des notes de l'ex-cours central de préparation à l'Ecole militaire, n'est pas un traité proprement dit, car les définitions, les théories purement trigonométriques, et les discussions y ont été omises. « Il a simplement pour but de montrer aux débutants une méthode qui permet souvent de supprimer une partie du travail de mémoire exigé par les constructions. »

Nous est avis que les traités de trigonométrie en usage sont suffisamment méthodiques et que c'est surtout par des exercices nombreux et gradués que les élèves parviennent à comprendre la trigonométrie, à retenir les formules, à en saisir l'usage et à acquérir une certaine initiative.

Au point de vue de l'*éducation mathématique*, il nous semble qu'il y a avantage à déduire des développements de $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$ les valeurs de $\sin 2a$, $\cos 2a$, etc., au lieu de les démontrer péniblement par la géométrie. (J. N.).

Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik von Prof. Dr. G. Holzmüller, Direktor a. D. der jetzigen Oberrealschule zu Hagen i. W. Erster Teil, bis zum Abschlusz der Untersekunda reichend. Vierte Doppel-Auflage mit 192 Fig. im Text. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1904 (XII-319 pp. in-8°. cartonné). Prix : 2,80 marcs.

En analysant deux autres ouvrages du même auteur (*Mathesis*, 1904, p. 115; 1905, p. 49-50), nous avons indiqué les tendances particulières qu'il poursuit depuis nombre d'années avec grand succès.

Un résumé de la table des matières, avec quelques explications que nous ajoutons entre crochets, donnera au lecteur une idée suffisante des principes qui guident M. Holzmüller, et des différences existant entre nos programmes et ceux des établissements prussiens.

Section I. Géométrie plane. A. Programme de la Quarta et de la Untertertia. I. Résumé synoptique et compléments des résultats du cours préparatoire. [Il s'agit du *Vorkursus* en cinquième des écoles réales supérieures et en quatrième des écoles latines; voir *Mathesis*, 1905, p. 49]. *a*. Notions préliminaires, définitions. *b*. Les constructions géométriques les plus simples : α. Instruments de dessin. β. Trois postulats. [On est censé joindre deux points donnés par une droite *mathématique*, etc.]. γ. Constructions fondamentales [Doubler, tripler,... un segment de droite ou un angle; diviser un angle en deux parties égales;

mener une perpendiculaire, une parallèle]. *c.* Remarques sur les parallèles et la somme des angles d'un triangle. *d.* Exercices de constructions. *e.* Notions sur la symétrie dans le plan. II. Suite. *a.* Egalité des figures rectilignes. [L'égalité de deux triangles qui ont trois éléments égaux chacun à chacun est déduite de ce que avec ces trois éléments on ne peut construire qu'un seul triangle]. *b.* Théorie du parallélogramme. *c.* Premières notions sur la circonférence. *d.* Figures équivalentes. [Théorèmes de Pythagore, de Pappus]. *e.* Calcul des aires des figures planes. *f.* Remarques finales.

B. Programme de la Obertertia et de la Untersecunda. I. Similitude des figures rectilignes. [Polygones semblables. Homothétie. Division harmonique]. II. Sécantes d'un cercle. Centres de similitude de deux cercles. [Faisceau de cercles. Division d'une droite en moyenne et extrême raison. Polygones réguliers de 10, 5, 15 côtés]. III. Applications de l'Algèbre à la Géométrie. (Construction de $\frac{ab}{c}$, $\sqrt{ab}$,...).

Section II. A. Programme des classes de Quarta et de Untertertia. I. Domaine des nombres entiers absolus. II. Introduction des nombres négatifs et fractionnaires. [Représentation géométrique des nombres. Calcul des nombres négatifs et fractionnaires. Nombres premiers. Plus grand commun diviseur]. III. Nombres décimaux. IV. Proportions. V. Equation du premier degré à une inconnue.

B. Programme de la Obertertia. I. Equations du premier degré à 2 inconnues. II. Racine carrée. III. Equations du second degré. IV. Puissances et racines, avec des exposants indices) entiers positifs.

C. Programme de la Untersecunda. I. Equations du second degré. II. Exposants négatifs et fractionnaires. III. Logarithmes vulgaires [On part de la définition exponentielle].

Section III. Trigonométrie. Programme de la Untersecunda. I. Fonctions trigonométriques dans le triangle rectangle. III. Triangles rectangles, triangles isoscèles, polygones réguliers. IV. Lignes trigométriques d'un angle obtus. Triangle quelconque.

Section IV. Stéréométrie. Programme de la Untersecunda. I. Corps dérivés du cube. Octaèdre et tétraèdre réguliers. Pénétration de deux tétraèdres, de deux cubes, de deux octaèdres réguliers. Rhombododécaèdre. Dodécaèdre pentagonal. I. Icosaèdre régulier. Solides tronqués. Polyèdres semiréguliers). II. Prismes et cylindres droits. III. Proposition de Cavalieri et ses principales applications. [Voici le théorème de Cavalieri : Si deux solides sont tels que leurs sections par un même plan parallèle à un plan fixe sont toujours équivalentes, ces solides ont même volume]. IV. Exercices divers. (J. N.).

Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie von Prof. H. Müller, Oberlehrer am K. Aug. Gymnasium in Charlottenburg und M. Kutnewsky, Oberlehrer an der XII. Realschule in Berlin. II. Teil. Ausgabe A, für Gymnasien. Zweite verbesserte und stark gekürzte Auflage. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1905. (In-8° de VIII-278 pp. cartonné). Prix : 2,20 marcs.

Sommaire. *Section* I. Arithmétique et Algèbre. I et II. Equations du second

degré à une ou plusieurs inconnues. III. Analyse indéterminée du premier degré. IV. Progressions. V. Equations d'un degré supérieur. VI. Nombres complexes. VII. Maxima et Minima. VIII. Combinaisons Formule du binôme. — *Section* II. Trigonométrie. IX. Applications des propositions principales. X Applications des formules sin $(a \pm b)$, cos $(a \pm b)$, tg $(a \pm b)$. XI. Exercices divers. XII. Problèmes sur le triangle sphérique et applications empruntées à la Géographie mathématique. — *Section* III. Stéréométrie. XIII. Problèmes sur les polyèdres. XIV. Cylindre, cône et sphère. XV. Volume de la sphère. — *Section* IV. Théorie des coordonnées et des sections coniques. XV. Ligne droite et cercle. XVI. Sections coniques.

Ce recueil est fait avec un soin extrême. — Un grand nombre d'applications se rapportent à la géométrie et à la physique.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 778.

(Voir *Mathesis*, XII, p. 176 et XXV, p. 80)

Soient M, N *deux points complémentaires au triangle* ABC; U, V *les surfaces de leurs triangles podaires. Trouver les lieux décrits par ces points lorsqu'on donne une relation de la forme* $mU + nV = p$. *Ces lieux peuvent-ils être des droites?* (J. DÉPREZ).

Soient en coordonnées cartésiennes

$$u \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0,$$
$$v \equiv (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 - \tfrac{1}{4}R^2 = 0,$$

l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC et celle du cercle passant par les milieux A', B', C' des côtés de ce triangle.

On sait que le lieu d'un point M (x, y) dont le triangle podaire, par rapport au triangle ABC, a une aire constante est une circonférence de même centre que le cercle circonscrit. Cette aire a donc pour expression λu; le facteur constant λ se détermine facilement en faisant coïncider M avec le centre O (α, β) du cercle ABC; donc si T désigne la surface ABC, on a pour l'aire considérée $-\dfrac{T}{4R^2}u$.

Le triangle podaire de M par rapport au triangle ABC vaut quatre fois celui du point complémentaire N par rapport au triangle A'B'C'; elle est donc égale à $-\dfrac{T}{R^2}v$. Par conséquent, si x, y désignent mainte-

nant les coordonnées du point N, la condition $mU + nV = p$ s'exprime par l'équation

$$4mv + nu + 4\frac{R^2}{T}p = 0.$$

Celle-ci représente une circonférence dont le centre ω divise la distance OO_9 des centres des cercles u, v dans le rapport $\frac{O\omega}{\omega O_9} = \frac{4m}{n}$.

On obtient une droite perpendiculaire à la droite OO_9 lorsque $4m + n = 0$. (J. N.).

Question 1365.

(Voir *Mathesis*, (3); II, p. 104).

Si M *est le centre et* m *un axe de symétrie d'une conique quelconque* U *circonscrite à un triangle donné* $A_1A_2A_3$, *étudier la transformation* (M, m).

Appelons B_1, B_2, B_3, les milieux des côtés du triangle $A_1A_2A_3$, O le centre du cercle circonscrit, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, les côtés indéfinis) des triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, enfin c_1, c_2, c_3 les parallèles à a_1, a_2, a_3 menées par A_1, A_2, A_3.

I Si l'on prend pour M un point quelconque du plan $A_1A_2A_3$, les points A_1, A_2, A_3 et leurs symétriques A_1', A_2', A_3' par rapport à M déterminent une conique du réseau (U) dont on pourra trouver les axes de symétrie m, m'. Ainsi, *en général, à un point* M *correspondent deux droites rectangulaires* m, m'.

Cependant, le réseau (U) comprend une circonférence dont un diamètre quelconque joue le rôle d'axe. Donc, lorsque M coïncide avec O, on peut prendre pour droite correspondante m une droite quelconque menée par O.

Si l'on fait coïncider M avec B_1, on n'a plus que quatre points A_1, A_2, A_3, A_1' pour déterminer la conique. Par conséquent, à chacun des points B_1, B_2, B_3 correspond dans notre transformation une droite quelconque menée par ce point.

Les quatre points O, B_1, B_2, B_3 auxquels correspondent des faisceaux de droites, sont appelés les *points principaux* de la transformation (M, m). Il n'y a pas d'autre point de cette espèce.

Une conique du réseau (U) est constituée par les parallèles a_1, c_1. Elle a pour centre un point quelconque de b_1, pour un axe de symétrie b_1;

après avoir choisi pour centre un point M de b_1, le second axe de symétrie est la perpendiculaire en M à b_1.

Une parabole du réseau (U) est considérée comme ayant son centre à l'infini dans la direction des diamètres, elle a un axe de symétrie proprement dit et la droite de l'infini tient lieu de second axe.

Lorsque M parcourt la droite a_1, la conique correspondante est constituée par les droites A_2A_3, A_1M; ses axes, bissectrices des angles de ces droites, enveloppent la parabole qui a pour foyer A_1, pour directrice a_1.

II. Prenons maintenant arbitrairement l'axe m d'une conique du réseau (U). Les points A_1, A_2, A_3 et leurs symétriques A_1'', A_2'', A_3'' par rapport à m déterminent la courbe et par suite son centre M. Donc, *en général à une droite m correspond un seul point* M.

Cependant, lorsque m coïncide avec b_1, b_2, b_3, on peut prendre pour M un point quelconque de m.

De même, lorsque m coïncide avec l'une des droites OB_1, OB_2, OB_3, les six points A_1, A_2, A_3, A_1'', A_2'', A_3'' se réduisent à quatre et on peut prendre pour centre un point quelconque de l'une de ces droites.

D'après cela, les six côtés du quadrangle complet $B_1B_2B_3O$ des points principaux ont pour point correspondant dans notre transformation un point quelconque du même côté. Ces six droites sont des *droites principales* de la transformation (M, m).

Une droite quelconque menée par un point fondamental a pour point correspondant ce même point, à moins qu'elle ne coïncide avec une droite principale.

III. Pour traiter la question par le calcul, soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées rectangulaires des points A_1, A_2, A_3 et (α, β) celles du centre M d'une conique U circonscrite au triangle $A_1A_2A_3$. Cette courbe a pour équation

$$A(y-\beta)^2 + B(y-\beta)(x-\alpha) + C(x-\alpha)^2 = 1, \qquad (1)$$

sous les conditions

$$A(y_1-\beta)^2 + B(y_1-\beta)(x_1-\alpha) + C(x_1-\alpha)^2 = 1. \quad \text{etc.}$$

De celles-ci on déduit les valeurs des coefficients A, B, C. En désignant par D le dénominateur commun des inconnues et en dénotant les déterminants par leur première ligne lorsque les autres lignes ont une

composition analogue, on peut écrire

$$\begin{aligned}
AD &= \begin{vmatrix} 1 & (y_1-\beta)(x_1-\alpha) & (x_1-\alpha)^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & x_1y_1-\beta x_1-\alpha y_1 & x_1^2-2\alpha x_1 \end{vmatrix} \\
&= 2\alpha^2 \begin{vmatrix} 1 & y_1 & x_1 \end{vmatrix} - 2\alpha \begin{vmatrix} 1 & x_1y_1 & x_1 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} 1 & y_1 & x_1^2 \end{vmatrix} \\
&\qquad - \beta \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1y_1 & x_1^2 \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BD &= \begin{vmatrix} (y_1-\beta)^2 & 1 & (x_1-\alpha)^2 \end{vmatrix} \\
&= 4\alpha\beta \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1 \end{vmatrix} - 2\beta \begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1^2 \end{vmatrix} \\
&\qquad - 2\alpha \begin{vmatrix} y_1^2 & 1 & x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1^2 & 1 & x_1^2 \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CD &= \begin{vmatrix} y_1^2-2\beta y_1 & x_1y_1-\beta x_1-\alpha y_1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2\beta^2 \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \end{vmatrix} - 2\beta \begin{vmatrix} y_1 & x_1y_1 & 1 \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} y_1^2 & x_1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\qquad - \alpha \begin{vmatrix} y_1^2 & y_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1^2 & x_1y_1 & 1 \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

soit, en abrégé,

$$\left.\begin{aligned}
AD &= 2M\alpha^2 + N\alpha + P\beta + Q, \\
BD &= -4M\alpha\beta + N'\alpha + P'\beta + Q', \\
CD &= 2M\beta^2 + N''\alpha + P''\beta + Q''.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

L'équation

$$-4M\alpha\beta + N'\alpha + P'\beta + Q' = 0,$$

suppose $B = 0$; donc elle représente le lieu des centres des coniques du réseau dont les axes de symétrie sont parallèles aux axes coordonnés. Ce lieu est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes Ox, Oy (Voir *Mathesis*, 1899, p. 46).

Les hypothèses $A = 0$ ou $C = 0$ correspondent aux hyperboles du réseau qui ont une asymptote parallèle à Oy ou à Ox; les lieux des centres de ces courbes sont des paraboles.

Les lieux de centres dont il vient d'être question sont des coniques de neuf points de quadrangles dont trois sommets sont A_1, A_2, A_3 et dont le quatrième est un point de la circonférence $A_1A_2A_3$ ou est à l'infini dans une direction déterminée.

IV. Le coefficient angulaire μ d'un axe de symétrie de la conique (1) est racine de l'équation

$$\mu^2 + 2\frac{C-A}{B}\mu - 1 = 0. \qquad (3)$$

Représentons cet axe par l'équation $ux + vy + 1 = 0$, en sorte qu'il a pour coordonnées u et v; l'équation (3) devient

$$B(u^2 - v^2) + 2(A - C)uv = 0. \qquad (4).$$

On a aussi

$$u\alpha + v\beta + 1 = 0. \tag{5}$$

Si l'on remplace A, B, C par les valeurs déduites de (2), les équations (4) et (5) définissent la transformation (M, m). Mais il importe de simplifier la relation (4) au moyen de (5).

On peut écrire, au lieu de (4),

$$(-4M\alpha\beta + S')(u^2 - v^2) + 2[2M(\alpha^2 - \beta^2) + S - S'']uv = 0,$$

où S, S', S'' représentent les quantités $N\alpha + P\beta + Q$, $N'\alpha + P'\beta + Q'$, $N''\alpha + P''\beta + Q''$. Or,

$$\begin{aligned} -4M\alpha\beta(u^2 - v^2) + 4M(\alpha^2 - \beta^2)uv &= 4M(\alpha u + \beta v)(\alpha v - \beta u) \\ &= -4M(\alpha v - \beta u); \end{aligned}$$

l'équation (4) se réduit donc à

$$S'(u^2 - v^2) + 2(S - S'')uv + 4M(\beta u - \alpha v) = 0, \tag{6}$$

elle définit un *connexe* (1, 2). A toute droite (u, v), elle fait correspondre des points (α, β) en ligne droite, et à tout point (α, β) les tangentes (u, v) d'une certaine conique.

Lorsque le point M parcourt une droite

$$p\alpha + q\beta + 1 = 0. \tag{7}$$

l'équation de l'enveloppe des droites correspondantes (m, m') s'obtient en remplaçant dans (6) α et β par $\frac{p-u}{pv-qu}$, $\frac{v-q}{pv-qu}$, le résultat sera du troisième degré en u et v, ce qui s'explique facilement : par chaque point de la droite (p, q) on peut mener deux droites m, sans compter la droite (p, q) qui est elle-même une droite m.

Supposons maintenant que la droite m(u, v) tourne autour d'un point fixe N(x, y). Pour avoir le lieu du point correspondant M, nous éliminons u et v entre les équations (6), (7) et $ux + vy + 1 = 0$; nous aurons encore un résultat du troisième degré en α et β. On pouvait prévoir cette conclusion : car sur chaque droite m menée par le point N nous trouvons un seul point M, mais le point N est lui-même un point M pour deux droites passant par ce point, à savoir les axes de la conique du réseau (U) qui a pour centre N.

Si le point N est à l'infini dans une direction donnée, le lieu du point M se décompose en une conique et en la droite de l'infini, lieu des centres des paraboles du réseau.

Nous arrêtons ici nos développements sur la question 1365 bien qu'ils soient incomplets : il resterait encore à signaler les singularités dues aux éléments principaux, les formules de transformation en coordonnées trilinéaires par rapport au triangle de référence $A_1A_2A_3$, etc.

(J. NEUBERG).

Question 1415bis (*).

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 128).

Soient P_a et P'_a, P_b et P'_b, P_c et P'_c *les projections d'un point* P *sur les bissectrices intérieures et extérieures du triangle* ABC. *Les hyperboles équilatères circonscrites aux rectangles* $PP_aAP'_a$, $PP_bBP'_b$, $PP_cCP'_c$ *ont, en outre du point* P, *trois autres points communs* M, M', M''. *Ces points sont situés sur la circonférence* ABC; P *est l'orthocentre du triangle* MM'M'' *et les hauteurs de ce triangle sont tangentes à une même hypocycloïde à trois rebroussements indépendante de la position du point* P. (A. GOB.)

Solution par M. GOB. Soient I, I_a, I_b, I_c les centres des cercles inscrit et ex-inscrits au triangle ABC. Les hyperboles équilatères circonscrites aux rectangles $PP_aAP'_a$, $PP_bBP'_b$, $PP_cCP'_c$ sont les hyperboles d'Apollonius du point P relativement aux coniques constituées par les couples de droites (I_bI_c, II_1), (I_aI_c, II_b) (I_aI_c, II_c). Ce théorème est donc un cas particulier de la question 1416; il suffit de remplacer le quadrangle ABCD considéré dans cette question par le quadrangle orthogonal $II_aI_bI_c$.

La courbe φ rencontrée dans la question 1416 se réduit dans le cas actuel à une hypocycloïde à trois rebroussements. En effet, la conique γ est un cercle et par conséquent les points J et J' coïncident avec les points cycliques du plan.

Solution analogue par M. ABRAMESCU.

Solution par M. EMMERICH Appelons M, M', M'' les points d'intersection de l'hyperbole H_a avec la circonférence ABC, et soient A_0, B_0, C_0 les milieux des arcs BC, CA, AB. AP étant un diamètre, les angles MPP$_a$ et MAA_0 sont égaux et de sens contraires, on doit démontrer la même chose pour les angles MPP_b et MBB_0, MPP_c et MCC_0.

Pour fixer les idées, supposons P à l'intérieur de l'angle B_0IC et les points M, M', M'' sur les arcs BA_0, AB_0, CB_0 respectivement. On a,

---

(*) Le lecteur fera bien de lire la solution de la question 1416 avant celle de la question 1415.

I désignant le centre du cercle inscrit :

$$\text{angle } MPP_b = MPP_a + P_aPP_b = MAA_c + 2^{dr.} - P_aIP_b = MAA_c + \tfrac{1}{2}(A+B)$$
$$= MBA_c + A_cBC + CBB_c = MBB_c;$$
$$\text{angle } MPP_c = P_aPP_c - MPP_a = P_aIP_c - MAA_a = \tfrac{1}{2}(A+C) - MAA_a$$
$$= BCA_c + BCC_c - MCA_c = MCC_c.$$

Des égalités $MPP_a = MAA_c$, $M'PP = M'AA_c$ on conclut alors par addition : angle $MPM' = MAM' = 2^{dr.} - MM''M'$; les deux relations analogues jointes à celle-ci démontrent que P est l'orthocentre du triangle $MM'M''$.

Soient maintenant E, D les points d'intersection de $M'M''$ avec A_cA, MA respectivement. Des couples rectangulaires (ED, MP), (EA, PP_a) on conclut ensuite que angle $DEA = MPP_a = MAA_c = EAD$, puis angle $MDM'' = 2MAA_c$. Or, si la hauteur MP coupe le cercle circonscrit en Q, et qu'on mène le diamètre AA_1, on a *angle* $MDM'' = QMA_1$; par conséquent. *arc* $QA_1 = 2.$ *arc* MA_c, ou si le point A_2 divise l'arc fixe A_cA_1 dans le rapport 1 : 2, *arc* $QA_2 = 2.$ *arc* MA_2. On est ainsi ramené à la définition connue de l'hypocycloïde à trois rebroussements.

Question 1416.

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 104 et IV, p. 141.)

On considère les hyperboles d'Apollonius d'un point fixe P *par rapport aux coniques passant par quatre points fixes* A, B, C, D. *Démontrer que ces hyperboles ont, en outre du point* P, *trois points communs,* L, M, N *situés sur la conique des neuf points du quadrangle* ABCD; *les droites* PL, PM, PN *sont tangentes à une même courbe de la troisième classe, indépendante de la position du point* P *et qui est la projection orthogonale (réelle ou imaginaire) d'une hypocycloïde à trois rebroussements.*

(A. Gob.)

Solution par M. Gob. L'équation $F = 0$ d'une conique du faisceau contenant un paramètre variable au 1er degré, il est évident que l'équation

$$(x - x_1)\,F'_y = (y - y_1)\,F'_x$$

qui représente l'hyperbole d'Apollonius du point P contient le même paramètre au premier degré. Cette courbe passe donc par quatre points fixes P, L, M, N.

L'hyperbole d'Apollonius d'un point P est le lieu d'un point Q tel que la droite PQ soit perpendiculaire à la polaire de Q. Les polaires de L

par rapport à toutes les coniques du faisceau sont donc perpendiculaires à PL. Or, en général, les polaires d'un point fixe par rapport aux coniques d'un faisceau passent par un point fixe ; dans le cas actuel, les polaires sont parallèles entre elles ; une des polaires est donc la droite de l'infini et par conséquent une des coniques du faisceau a son centre en L. Le point L appartient donc à la conique des neuf points, γ, du quadruple.

Soient E le milieu de AD et O le point de rencontre des droites AD et BC, ces points se trouvent sur la conique γ. Menons par L, dans la conique γ, la corde LL′ parallèle à la tangente en E, le faisceau (O, LEL′C) est harmonique. En effet, si l'on projette orthogonalement le quadrangle ABCD suivant un quadrangle orthogonal, la projection de γ sera une circonférence et le faisceau considéré aura pour projection le faisceau formé par un angle et ses bissectrices. Il résulte de là que OL′ est la polaire de L par rapport à la conique constituée par les droites AD et BC ; par conséquent, PL est perpendiculaire à OL′.

Cela posé, considérons une corde mobile, KK′, de γ, parallèle à la tangente en E et cherchons l'enveloppe φ de la perpendiculaire d abaissée de K sur OK′ ; il résulte de ce qui précède que les droites PL, PM, PN sont tangentes à φ. Pour trouver la classe de φ, cherchons le lieu du point de rencontre R de OK avec la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque P sur OK′. Les droites OK, OK′ et PR décrivent des faisceaux homographiques, le lieu de R est donc une conique passant par O et par P ; cette conique rencontre γ en quatre points O, L, M, N et, par conséquent, on ne peut mener à φ par le point P que trois tangentes PL, PM, PN ; cette courbe est donc de la 3e classe et il résulte de sa génération qu'elle est indépendante de la position du point P.

Si l'on fait coïncider la droite KK′ avec la droite de l'infini, la droite d coïncidera aussi avec la droite de l'infini, tout en tendant à devenir perpendiculaire à l'une ou à l'autre des asymptotes de γ. La courbe φ est donc doublement tangente à la droite de l'infini et ses points de contact J et J′ avec cette droite sont situés suivant les directions perpendiculaires aux asymptotes de γ. Pour projeter orthogonalement cette courbe suivant une hypocycloïde à trois rebroussements, il suffira de choisir le plan de projection de telle façon que les points J et J′ se projettant sur ce plan suivant les points cycliques.

Pour une solution analytique [illegible] par M. [illegible], voir *Mathesis*, (3) IV, p. 14.

×Question 1471.

(Voir *Mathesis*, (3) IV; p. 128.)

Construire un triangle connaissant un angle, la hauteur abaissée du sommet de l'angle sur le côté opposé, et la somme des deux autres côtés.

Note par M. Emmerich. Les recueils allemands donnent plusieurs solutions élémentaires de cette question. La solution suivante me semble l'emporter au point de vue de la simplicité (Voir *Geometrische Konstruktions-Aufgaben*, par MM. Lieber et von Lühmann).

Appelons E, F, G les points où la médiatrice de BC rencontre la bissectrice intérieure de l'angle A, la base BC, et la parallèle menée par A à BC; soient encore H, I les pieds des perpendiculaires abaissées de E sur AB, AC respectivement. Les triangles EHB, EIC étant égaux, on a $AH = AI = \frac{1}{2}(b+c)$, ce qui fait connaître le quadrilatère AHEI. Joignons alors F à H et I. Des quadrilatères inscriptibles EHBF, EBAC, EFIC on conclut que *angle* $EFH = EBH = ECI = \pi - EFI$; il s'ensuit que la droite HI passe par F. Le point G étant sur la circonférence AHEI, il s'agit donc de mener une corde EG de sorte que sa partie au delà de HI soit égale à la hauteur donnée $AD = h$. Ainsi la construction est ramenée à un problème connu.

Discussion. On doit avoir $FG \leq AL$, L désignant le point (AE, HI); d'où

$$h \leqq \tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}A.$$

Comment trouver cette restriction par la trigonométrie? On a

$$a^2 = (b+c)^2 - 4bc\cos^2\tfrac{1}{2}A = (b+c)^2 - 2ah\cot\tfrac{1}{2}A;$$

$$a = -h\cot\tfrac{1}{2}A + \sqrt{(b+c)^2 + h^2\cot^2\tfrac{1}{2}A}.$$

Or,
$$a\cos\tfrac{1}{2}(B-C) = (b+c)\sin\tfrac{1}{2}A,$$

donc
$$a \geqq (b+c)\sin\tfrac{1}{2}A;$$

$$[(b+c)\sin\tfrac{1}{2}A + h\cot\tfrac{1}{2}A]^2 \leqq (b+c)^2 + h^2\cot^2\tfrac{1}{2}A;$$

$$2h(b+c)\cos\tfrac{1}{2}A \leqq (b+c)^2\cos^2\tfrac{1}{2}A;$$

$$h \leqq \tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}A.$$

Remarque. Au problème ci-dessus on peut rattacher les cas où l'on connaît $b-c$ au lieu de $b+c$, ou $B-C$ au lieu de A.

Solution géométrique par Emile Weber. Soient donnés l'angle A,

la hauteur h_a et la somme $b + c$. La base du triangle cherché doit être tangente à la circonférence décrite du point A comme centre avec h_a pour rayon. D'autre part, il est aisé de trouver l'enveloppe de la base d'un triangle, dont l'angle au sommet est fixe et dont la somme des côtés qui le comprennent est une constante, $b + c$. Cette enveloppe est une parabole touchant les côtés de l'angle A aux points M et N. tels que $AM = AN = b + c$. L'axe de cette parabole est la bissectrice AP de l'angle A et le sommet est situé au milieu de la distance AP (P étant le milieu de MN). Le problème est ainsi ramené à construire les tangentes communes à une parabole et à un cercle dont le centre se trouve sur l'axe de la parabole. On peut effectuer cette construction, sans tracer la parabole, en faisant la remarque suivante (voir *Journal de Vuibert*, 1903, p. 153) : une tangente commune à une parabole et à une circonférence ayant son centre A sur l'axe. est tangente à une seconde circonférence ayant pour centre A', symétrique de A par rapport au foyer, et pour axe radical avec la circonférence A, la tangente au sommet de la parabole.

Solution par M. Cl. Servais. 1. On porte sur les côtés de l'angle donné A. les longueurs AB_1, AC_1 égales à la somme k; on prend le milieu S de la distance du point A à la droite B_1C_1 : sur AS on construit les points E et F équidistants de S et conjugués par rapport au cercle (A) décrit du point A comme centre avec la hauteur donnée h pour rayon. Au point B_1, on élève une perpendiculaire à AB. coupant AS au point A'; on détermine les éléments doubles R et R' de l'involution déterminée par les couples AA', EF. Chacune des tangentes menées soit de R, soit de R' au cercle (A) est la base d'un triangle satisfaisant aux données de la question.

En effet, la base inconnue BC du triangle est tangente au cercle (A) et à la parabole P tangente aux deux droites AB, AC, respectivement aux points B_1 et C_1; le point S est le sommet de cette parabole et la droite AS est l'axe. [illegible] sur B_1C_1 sont les [illegible] au cercle (A) et à la parabole (P). On sait [illegible] les pôles L_1 et L_2 de l par [illegible] EF du triangle [illegible] conjugués dans une involution [illegible] tangentes communes à (A) [illegible] est la droite AB_1, [illegible] cette droite et L_2 est

identique à B_1. Ainsi AA′ est un couple de l'involution citée, ce qui établit la construction ci-dessus.

2. Remarque. Les constructions indiquées s'exécutent aisément si on les rapporte sur le cercle (A) par des projections faites d'un point de ce cercle. Pour ce point, on choisira l'une des extrémités V, W du diamètre normal à AS, par exemple W. Les projections des points E et F sur le cercle sont les éléments doubles d'une involution dont le pôle est le point S. La droite WA′ coupant le cercle (A) en V′, V et V′ projections de A et A′ sont les éléments doubles d'une involution dont le pôle T est celui de la corde VV′. La droite ST coupe (A) aux points conjugués communs à ces involutions; ces points sont les projections de R et R′. On remarquera que la construction précédente est indépendante de la réalité des points E et F.

3. *Realité des solutions.* 1° $h < AS$, le triangle EFG est réel et les quatre tangentes communes au cercle (A) et à la parabole sont réelles; le problème a quatre solutions.

2° $h = AS$. Le cercle (A) et la parabole (P) sont tangents en S, la tangente en ce point donne une solution. Le point S est identique à R, et le point R′ est le conjugué de S par rapport à AA′, comme AS est plus petit que A′S le point R′ est sur le prolongement SA de l'axe de la parabole et les tangentes menées de ce point sont réelles, ce qui donne deux solutions réelles.

3° $h > AS$. Le triangle EFG est imaginaire; le cercle (A) et la parabole (P) ont deux tangentes communes réelles et deux imaginaires. Le problème a donc deux solutions réelles et deux imaginaires.

4. Les mêmes considérations donnent la solution du problème: *construire un triangle, connaissant un angle, la hauteur abaissée du sommet de l'angle sur le côté opposé et le produit k^2 des deux autres côtés.*

On porte sur les côtés de l'angle les longueurs $AB_1 = \frac{k}{2}$, $AC_1 = 2k$, la droite B_1C_1 coupe la bissectrice de l'angle en un point D. On joint le pôle de B_1C_1 par rapport au cercle (A) au milieu de B_1C_1, la droite obtenue coupe AD au point D′. On construit les points R et R′ équidistants de A et conjugués par rapport à DD′. Les tangentes issues de ces points, au cercle (A) donnent les solutions du problème proposé.

5. On traiterait de même le problème plus général : *Construire un triangle connaissant un angle, la hauteur abaissée du sommet de l'angle*

sur le côté opposé, les deux autres côtés b et c étant liés par la relation :

$$bc + \alpha(b + c) + \beta^2 = 0$$

α et β étant deux longueurs données.

M. Verheugen (Gand) a donné une bonne solution synthétique qui, si nous ne nous trompons, a été déduite de la valeur de a trouvée analytiquement.

M. H. Lez nous fait savoir que le problème 1471 se trouve résolu dans l'ouvrage de Desboves : *Questions de Géométrie élémentaire*, 2e édition, 1875, p. 318.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1199. Pour que les équations

$$\operatorname{tg} x = a \operatorname{tg}(y - z), \quad \operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(z - x), \quad \operatorname{btg} z = c \operatorname{tg}(x - y)$$

soient compatibles, on doit avoir

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} = 0.$$

La première équation peut s'écrire successivement

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(y - z)} = \frac{a}{1}, \quad \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(y - z)}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(y - z)} = \frac{a + 1}{a - 1}$$

$$\frac{\sin(x + y - z)}{\sin(x - y + z)} = \frac{a + 1}{a - 1}.$$

Transformant de même les autres équations on trouve

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) = (a - 1)(b - 1)(c - 1).$$

1200. Démontrer qu'à partir de $n = 3$,

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n + 1}.$$

Cette inégalité se transforme en

$$n^{n+1} > (n + 1)^n \text{ ou } = 2n^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} n^{n-2} + \cdots;$$

Or, le second membre est inférieur à

$$n^n \left[2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3.} + \cdots + \frac{1}{1.2.3.. n}\right]$$

lui même plus petit que

$$n^n \left[2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

et à fortiori, à $3n^n$. Donc si n est ≥ 3, l'inégalité annoncée subsiste.

1201. Résolution algébrique de l'équation $x^{10} - 1 = 0$.

(*Fac. des Sciences de Bucarest*, 1904).

1262. Un banquier change à un client 100 florins d'Autriche contre 170 marcs et à un autre client 100 marcs contre 58 florins. Calculer le taux de l'agio. (Haag).

Si, d'après le cours, un florin $= x$ marcs, l'agio sur les 100 florins a été $(100x - 170)$ marcs $= \frac{100x - 170}{x}$ florins, et l'agio sur 100 marcs a été $(100 - 58x)$ marks. D'où l'équation du problème.

$$\frac{100x - 170}{x} = 100 - 58x.$$

On trouve $x = 1{,}712$, d'où l'on déduit que l'agio est $100 - 58.1{,}712 = 0{,}7$ pour cent.

1263. Dans un triangle ABC on donne $A = 60°$, $\frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = m$; calculer sin B et sin C.

De $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A$, on déduit que sin B et sin C sont racines de l'équation

$$4x^2 - 2m\sqrt{3}.x + m^2 - 1 = 0,$$

m doit être compris entre 1 et 2.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1511. Soient M, M′ les extrémités de deux demi-diamètres conjugués OM, OM′ d'une ellipse donnée, et soit P la projection de M′ sur la tangente en M. Le point P décrit une ovale du 4e degré dont l'aire est $\frac{1}{2}\pi(a+b)^2$. On suppose que les points M, M′ parcourent simultanément l'ellipse d'un mouvement continu. (E. N. Barisien).

1512. On donne, dans un même plan, deux courbes C, C′. La tangente en un point quelconque M de C rencontre C′ au point M′; les normales en M à C et en M′ à C′ se coupent au point I. Cela posé, construire la tangente et le centre de courbure en I à la trajectoire de ce point. (Abramescu).

1513. ABCD étant un tétraèdre quelconque, si un point M est tel que les plans MAB et MCD sont perpendiculaires ainsi que les plans MAC et MBD, les plans MAD et MBC seront également perpendiculaires. Trouver le lieu géométrique du point M. (J. Neuberg).

×**1514.** Si n est un nombre entier supérieur à 1, le nombre

$$m^n - (m-1)\,n - 1$$

est divisible par $(m-1)^2$ et le nombre

$$m^n+(m+1)n-1$$

par $(m+1)^2$. (E. Barbette).

×1515. Soient d, d_a, d_b, d_c les distances d'un point quelconque M du plan d'un triangle ABC aux centres I, I_a, I_b, I_c des cercles tritangents. Démontrer la relation

$$\frac{d_a^2}{r_a}+\frac{d_b^2}{r_b}+\frac{d_c^2}{r_c}-\frac{d^2}{r}=8R,$$

R désignant le rayon du cercle circonscrit et r, r_a, r_b, r_c les rayons des cercles tritangents. (Verraart).

QUESTIONS POSÉES AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE MILITAIRE DE BRUXELLES, EN 1904(*).

I. Section de l'artillerie et du génie. Mathématiques.

Arithmétique. 1. Dans quel cas une fraction ordinaire irréductible, convertie en fraction décimale, donne-t-elle naissance : 1° à une fraction décimale d'un nombre limité de chiffres; 2° à une fraction décimale périodique simple; 3° à une fraction décimale périodique mixte? Démontrez.

2 (S). Etant donné le nombre $p=a^6b^{10}c^{13}$, où a, b, c désignent des nombres premiers, déterminer tous les nombres q tels que les carrés p^2 et q^2 soient respectivement divisibles par q et par p. Combien y a-t-il de nombres q répondant à la question?

Algèbre. 1. Discutez le système suivant de deux équations linéaires à deux inconnues :

$$ax+by=c,\quad a'x+b'y=c'.$$

2 (S). Etant données les équations

$$x+y+z=2p,\quad \frac{xy}{(x+y)z}=m,\quad x^2+y^2=z^2,$$

dans lesquelles p et m sont des quantités données réelles et positives, on demande 1° de résoudre le système; 2° de déterminer pour quelles valeurs de m, il admet un système de solutions réelles et positives.

(*) *Mathesis* publiera volontiers des réponses questions marquées de la lettre (S). (*Rédaction*).

Géométrie. 1. A. Qu'est qu'un polyèdre régulier? B. Démontrer 1° qu'il ne peut y avoir que cinq polyèdres réguliers; 2° que tout polyèdre régulier peut être inscrit dans une sphère et peut être circonscrit à une autre. C. Connaissant le côté d'un polyèdre régulier et l'inclinaison de deux faces adjacentes, trouver les rayons des sphères inscrite et circonscrite.

2 (S). On marque sur une circonférence (O) de rayon R un point A et dans le plan de cette circonférence un point P. Inscrire dans la circonférence un triangle ABC tel que le côté BC passe par le point P et que le produit des côtés AB et AC soit égal à un carré donné k^2.

La circonférence (O) et le point A étant fixés, on fait varier k de 0 à l'infini et l'on demande quelles sont, pour chaque valeur de k, les positions que le point P doit occuper pour que le problème comporte soit deux solutions, soit une solution, ou qu'il n'en ait aucune.

Trigonométrie. 1. Démontrer la relation

$$\frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\frac{c}{2}}$$

A, B, C et a, b, c étant respectivement les angles et les côtés opposés d'un triangle sphérique quelconque.

2 (S). Résoudre et discuter l'équation :

$$\sin 3x + \sin 2x = m \sin x.$$

Géométrie analytique. 1. Cherchez l'équation de l'ellipse, rapportée à ses diamètres conjugués égaux, connaissant l'équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

de cette courbe, rapportée à ses axes de symétrie.

2 (S). Etant donnés deux axes Ox, Oy faisant entre eux l'angle θ, on marque sur Ox un point fixe A d'abscisse a. Il y a une infinité d'hyperboles équilatères tangentes à l'axe Ox en ce point et rencontrant l'axe Oy en deux points dont le produit des ordonnées est constant et égal à b^2. 1° Démontrer que l'équation générale de ces hyperboles est

$$x^2 + 2mxy + \frac{a^2}{b^2}y^2 - 2ax + 2\lambda y + a^2 = 0,$$

ou

$$m = \frac{a^2 + b^2}{2b^2 \cos\theta}.$$

2° Montrer que ces hyperboles ont mêmes directions asymptotiques. 3° Déterminer le lieu de leurs centres. 4° Ce lieu est une droite : déterminer l'angle θ de manière que cette droite soit perpendiculaire à l'axe Ox. Ce problème est-il toujours possible?

Calcul logarithmique. Calculer le plus petit arc positif x satisfaisant à l'équation

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin(\varphi + 30^\circ)}{\cos^2 5\varphi}$$

sachant que φ est un arc compris entre 0° et 90° et que son sinus égale $\frac{1}{7}$.

On exprimera le résultat en degrés, minutes et secondes.

Géométrie descriptive. On donne 1° une droite a et un point O sur cette droite; 2° la projection verticale d'un point A. On demande 1° de mener par le point O, un plan L perpendiculaire à la droite d; 2° de déterminer la projection horizontale du point A considéré comme appartenant à ce plan; 3° de construire dans α un carré ABCD dont le point O serait le centre et le point A un des sommets; 4° de construire un cube situé au-dessus du plan α et dont l'une des faces serait le carré ABCD; 5° de représenter ce cube en le considérant comme un corps plein et opaque.

II. Section d'infanterie et de cavalerie. Mathématiques.

Calcul logarithmique. Calculer les valeurs de x comprises entre 0° et 90° données par l'équation

$$\sin 2x = \operatorname{tg}^2(223^\circ 12' 21'') \cos^2(315^\circ 46' 51'').$$

On exprimera le résultat en degrés, minutes et secondes.

[illegible] 1. Exposer, en les justifiant, deux méthodes de recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres. Appliquez ces deux méthodes aux nombres 990 et 726.

2. 3. Démontrer qu'il n'existe aucune fraction ordinaire telle qu'en ajoutant 33 au numérateur et $\frac{1}{4}$ au dénominateur on obtienne un résultat égal à $\frac{1}{11}$.

[illegible] 4. Démontrer que le reste de la division d'un polynôme rationnel et entier en x par le binôme $x - a$ s'obtient en remplaçant x par a dans ce polynôme.

Établissez la règle à suivre pour reconnaître si un polynôme rationnel [illegible] est exactement divisible par le binôme $x - a$.

c) Etablissez la loi de formation du quotient et du reste de la division du polynôme.

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \cdots + \cdots A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m$$

par $x - a$.

2 (S). Si m est un nombre réel donné, déterminer les nombres a, b, c de manière que le polynôme

$$x^2(a^3 + b^3 + a + b + c) - 2x(a^3 + b^3 - a - b) + a^3 + b^3 + a + b - c$$

soit carré parfait et prenne pour $x = -1$ la valeur 2 et pour $x = +1$ la valeur m. Pour quelles valeurs de m les nombres a, b, c sont-ils réels?

Géometrie. 1. Enoncer et démontrer le théorème concernant le volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe situé dans son plan et passant par un de ses sommets.

Déduisez de là l'expression du volume de la sphère en fonction de son rayon.

2 (S). Etant donnés une circonférence (C) de rayon R et un point P pris sur celle-ci, on mène par ce point demi-droites PX, PY faisant entre elles un triangle de 18° et rencontrant la circonférence (C) respectivement aux points A et B.

1° Démontrer que lorsque l'angle XPY tourne autour de son sommet en conservant sa grandeur, la corde AB reste constamment tangente à une circonférence (C'). Calculer le rayon de cette circonférence.

2° Démontrer que le lieu du point de contact M de la corde AB avec la circonférence (C') se compose seulement d'une partie de cette circonférence. Indiquer quelle est cette partie et le nombre de degrés qu'elle renferme.

3° Démontrer que si la tangente à la circonférence (C') en un point quelconque M', pris sur la partie qui n'appartient pas au lieu, rencontre la circonférence (C) aux points A' et B', l'angle A'PB' aura une grandeur constante. Quelle est cette grandeur?

Trigonométrie. 1. Démontrer les deux formules suivantes :

$$c = \frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}; \quad \sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

a, b, c, p, A, B, C représentant respectivement les côtés, le demi-périmètre et les angles d'un triangle rectiligne quelconque.

2 (S). *a*) Etant donné l'équation

$$\sin(x - a)\cos x - m\sin^2 x + 2 = 0,$$

calculer tg x.

b) Démontrer que le nombre a étant donné, le problème ne sera possible que si m est supérieur ou égal à une certaine limite.

c) Déterminer a de manière que cette limite soit égale à $\frac{3}{5}$.

III. Épreuve littéraire.

Théorie. 1. Qu'est ce qu'un syllogisme régulier? De quelles parties se compose-t-il? Donnez un exemple.

2. Montrez que la comparaison est le fondement de tous les tropes.

3. Définissez l'éloquence parlementaire et citez quelques-uns de ses plus illustres représentants.

Composition. « Il est une créancière envers laquelle tout homme demeure insolvable : C'est sa mère. »

Analyse. « L'amour de la nature » par Taine.

Histoire. 1. Par quel traité l'Angleterre a-t-elle acquis : l'île de Terre-Neuve, le Canada, l'Hindoustan, la colonie du Cap? A quelles guerres ces traités mettaient-ils fin? A quels états ces quatre possessions appartenaient-elles, en tout ou en partie, avant ces guerres?

2. Exposez les causes de la guerre de Crimée. Quelle puissance prit l'initiative des propositions de paix? Donnez les clauses principales du traité de paix.

3. Qu'est-ce que le traité dit de « la Barrière » (date, clauses, but)? Nommez le souverain qui supprima « la Barrière ». A quelle époque et de quelle manière se fit cette suppression?

Géographie 1. Faites une carte de la région de l'Europe, dite « Péninsule des Balkans », au Sud du Danube inférieur et de la Save en indiquant seulement : ces deux cours d'eau, les mers et les parties de mer baignant cette région ; le tracé général des frontières des états balkaniques ; le nom et la position de leurs capitales.

2 Où est situé l'Afghanistan? Indiquez les Etats qui l'entourent, avec leur situation par rapport à l'Afghanistan. Dans quelle ville se trouve le siège du gouvernement? Sur quel cours d'eau cette ville est-elle située?

3. Faites une carte de la partie de la Belgique située entre l'Escaut et la Meuse, en indiquant seulement *a*) les limites d'Etats ; *b*) les cours des deux fleuves, ainsi que les cours d'eau sur lesquels sont situées les localités suivantes : Alost, Boom, Chimay, Genappe, Hal, Hasselt, Thuin, Walcourt ; indiquer les noms des cours d'eau ; *c*) l'emplacement de ces diverses localités ; *d*) la ligne de partage des eaux des bassins de la Meuse et de l'Escaut.

MÉMORIAL MATHÉMATIQUE

Avril.

1. **1863**. Mort de *J. Steiner*, à Berne.
2. **1867**. Naissance de *P. Günther*, à Bernburg.
3. **1900**. Mort de *J. Bertrand*, à Paris.
4. **1859**. Mort de *J. Gergonne*, à Montpellier.
   1843. Naissance de *Éd. Lucas*, à Amiens.
5. **1622**. Naissance de *V. Viviani*, à Florence.
6. **1829**. Mort d'*Abel*, à Froland, près d'Arendal (Norvège).
7. **1823**. Naissance de *J. Hoüel*, à Thaon (Calvados).
8. **1803**. Mort de *L. Arbogast*, à Strasbourg.
9. **1824**. Naissance de *E. Laguerre*, à Bar-le-Duc.
10. **1813**. Mort de *Lagrange*, à Paris.
11. **1873**. Mort de *Chr. Hansteen*, à Christiania.
12. **1852**. Naissance de *F. Lindemann*, à Hanovre,
13. **1824**. Mort de *B. Boncompagni*, à Rome.
14. **1629**. Naissance de *Chr. Huygens*, à La Haye.
15. **1707**. Naissance d'*Euler*, à Bâle.
    1809. Naissance de *H. G. Grassmann*, à Stettin.
16. **1820**. Naissance de *V. Puiseux*, à Argenteuil.
    1823. Naissance de *Fr. Eisenstein*, à Berlin.
17. **1486**. Naissance de *Stifel*, à Esslingen.
    1567. Sa mort à Iena.
20. **1804**. Naissance de *Moigno*, à Guéméné (Morbihan).
21. **1825**. Mort de *J. Fr. Paff*, à Halle.
22. **1811**. Naissance de *O. Hesse*, à Königsberg.
25. **1840**. Mort de *Poisson*, à Paris.
    1849. Naissance de *F. Klein*, à Dusseldorf.
26. **1902**. Mort de *L. Fuchs*, à Berlin.
27. **1843**. Naissance de *F. Müller* (auteur du Mémorial) à Berlin.
28. **1903**. Mort de *J. W. Gibbs*, à New Haven (Connecticut.
29. **1854**. Naissance de *H. Poincaré*, à Nancy.
    1872. Mort de *J. Duhamel*, à Paris.
30. **1777**. Naissance de *Gauss*, à Brunswick.

QUELQUES THÉORÈMES DE STEINER.

par M. Cl. Servais.

1. La polaire trilinéaire q d'un point Q par rapport à un triangle ABC coupe les côtés BC, CA, AB respectivement en Q_1, Q_2, Q_3; les droites AQ_1, BQ_2, CQ_3 sont tangentes aux points A, B, C à une conique (Q) que nous appellerons la *conique circonscrite relative au point* Q. Le point Q est le pôle de la droite q relativement à la conique (Q) et cette courbe passe par les points doubles E, F de la projectivité cyclique déterminée par le terne $Q_1Q_2Q_3$ sur la droite q.

2. *La conique circonscrite* (Q) *relative au point* Q *est le lieu des pôles* M *par rapport au triangle* ABC *des droites m issues du point* Q. En effet, si M_1, M_2, M_3 désignent les points (m, BC), (m, CA), (m, AB), M'_1, M'_2, M'_3 leurs conjugués respectifs sur les segments BC, CA, AB, les droites AM'_1, BM'_2, CM'_3 se coupent au pôle M de la droite m par rapport au triangle ABC. Si la droite m pivote autour du point Q, les ponctuelles (M_1), (M_2), (M_3), (M'_1), (M'_2), (M'_3) sont projectives entre elles et les rayons AM'_1, BM'_2, CM'_3 sont homologues dans trois faisceaux projectifs. Le point M décrit donc une conique circonscrite au triangle ABC. Les positions particulières QA, QB, QC de la droite mobile m montrent que cette conique est tangente en A, B, C, respectivement aux droites AQ_1, BQ_2, CQ_3. Le lieu des points M est donc la conique (Q).

3. Le point Q est projeté des sommets A, B, C sur les côtés opposés BC, CA, AB aux points A', B', C'. Les côtés BC, CA, AB sont tangents respectivement en A', B', C' à une conique [Q] que nous appellerons *la conique inscrite relative au point* Q. La polaire trilinéaire q du point Q par rapport au triangle ABC est la polaire du même point relativement à la conique [Q]. Cette courbe passe par les points E, F.

4. *La conique inscrite* [Q] *relative au point* Q *est l'enveloppe des polaires g des points G de la droite q, relativement au triangle* ABC.

La démonstration est la corrélative de la précédente (2).

5. *Les coniques circonscrite* (Q) *et inscrite* [Q] *relatives au point* Q *sont homologiques.* Le point Q et la droite q sont respectivement le centre et l'axe d'homologie, car ces deux courbes sont tangentes aux points E et F.

On peut déterminer le coefficient d'homologie, en fixant l'homologie par le couple de points homologues A, A'. Si l'on désigne par H et D

respectivement les points (q, AA'), $(B'C', AA')$, on a les égalités :

$$(AA'HD) = -1, \quad (AQA'D) = -1$$

déduites des quadrilatères $AQ_2A'Q_3$, ACQB, par suite

$$(AA'QH) = -2.$$

Ainsi *le coefficient d'homologie est égal à* — 2.

6. Soient donnés la conique [Q], le point Q et sa polaire q. Sur cette courbe tout point A' est l'origine d'un terne A'B'C' de la projectivité cyclique dont les éléments doubles sont les points d'intersection E, F de la conique [Q] avec la droite q. Les tangentes aux points A', B', C' forment un triangle ABC, pour lequel la conique [Q] est la conique inscrite relative au point Q. Tous les triangles ABC satisfaisant à cette condition sont inscrits à la conique (Q), correspondant à la courbe [Q] dans l'homologie qui a pour centre le point Q, pour axe la droite q et pour coefficient — 2 (5).

7. Le pôle G par rapport à l'un quelconque de ces triangles ABC, d'une tangente choisie g de la conique [Q] est situé sur la droite q (4); donc : *Le pôle* G *d'une tangente* g *à la conique* [Q] *relativement au triangle variable* ABC *décrit la droite fixe* q.

Le point G étant situé sur la droite q, *la conique circonscrite* (G) (1) *passe par le point fixe* Q, *quand le triangle* ABC *varie.* (2).

8. Les côtés du triangle ABC déterminent sur la tangente g le terne $G_1G_2G_3$ définissant une projectivité cyclique dont les éléments doubles G', G'' appartiennent à la conique circonscrite (G) (1). Les points G_1, G_2, G_3 étant sur les tangentes aux points A', B', C' de la conique [Q], les points G', G'' appartiennent aux tangentes aux points doubles EF de la projectivité cyclique (A'B'C').

Ces points G' et G'' ne varient donc pas avec le triangle ABC. Ainsi : *La conique circonscrite* (G) *passe par deux points fixes de la tangente* g, *quand le triangle* ABC *varie.*

9. Si la conique [Q] est une parabole, on peut prendre pour tangente g, la droite à l'infini du plan, le point G est alors le centre de gravité du triangle variable ABC, et la conique circonscrite (G) est l'ellipse circonscrite au triangle ABC ayant pour centre, le centre de gravité du triangle ABC. Les développements précédents donnent le théorème : *Les tangentes aux points* A', B', C' *d'une parabole* [Q] *forment un nouveau triangle* ABC, *soit* Q *le point de concours des droites* AA', BB', CC'.

Lorsque le point Q *est fixe, le centre de gravité* G *du triangle* ABC *décrit une droite et l'ellipse qui est circonscrite au triangle* ABC *et a pour centre* G *passe constamment par* Q *et reste homothétique à elle-même.* (*Mathesis*, question 1487, (3) IV, p. 216; STEINER'S *Gesammelte Werke*, I, p. 208).

10. Lorsque le point Q est le centre de la conique [Q], cette dernière est l'ellipse de Steiner du triangle ABC et la droite q est à l'infini. Les tangentes menées d'un point quelconque S à cette ellipse sont les polaires par rapport au triangle ABC de deux points S_1 et S_2 de la droite à l'infini q (**4**). La conique circonscrite (S) (**1**) passe par les points S_1 et S_2 (**2**). Donc : *Etant donné un triangle* ABC, *la conique circonscrite* (S) *relative à un point* S *est une ellipse, une hyperbole, ou une parabole selon que le point* S *est à l'intérieur, à l'extérieur, ou sur le périmètre de l'ellipse de Steiner du triangle* ABC(*).

11. Soient (M_1M_2, N_1N_2,...) l'involution sur la droite q à l'infini, ayant pour éléments doubles les points cycliques I_1I_2; m_1, m_2, n_1, n_2,... i_1, i_2 les polaires trilinéaires des points M_1, M_2, N_1, N_2,... I_1. I_2 relativement au triangle ABC; M, N,... I les points (m_1m_2), (n_1n_2),... (i_1i_2). Les couples de tangentes m_1m_2, n_1n_2,... à l'ellipse de Steiner du triangle ABC forment une involution dont les éléments doubles sont les tangentes i_1, i_2; par suite le point I est le pôle de la droite MN..., relativement à l'ellipse de Steiner. La conique circonscrite (M) relative au point M passe par les points à l'infini M_1M_2 (**2**) et est une hyperbole équilatère. La conique circonscrite (I) relative au point I passe par les points cycliques I_1, I_2 (**2**) et est le cercle circonscrit au triangle ABC. Ainsi : *Le cercle circonscrit au triangle* ABC *est la conique circonscrite* (I) *relative à un point* I *du plan de ce triangle. La polaire de ce point par rapport à l'ellipse de Steiner du triangle* ABC, *est le lieu des points* M *pour lesquels les coniques circonscrites* (M) *sont des hyperboles équilatères.*

12. Les hyperboles équilatères (M) circonscrites au triangle ABC passent par l'orthocentre H_1 du triangle ABC, par suite les points M, N,,... sont sur la polaire trilinéaire de l'orthocentre H_1 relativement au triangle ABC (**2**). Ainsi : *La polaire trilinéaire de l'orthocentre du triangle* ABC *est la polaire par rapport à l'ellipse de Steiner de ce triangle, du point* I *relatif au cercle circonscrit.*

(*) Cas particulier d'un théorème sur les coniques polaires dans les cubiques planes (C. S.),

13. Soit (G) la conique circonscrite relative au centre de gravité G du triangle ABC. La conique inscrite [Q] relative à un point Q de la conique (G) est une parabole (**9**). On reconnaît aisément la nature de la conique inscrite $[Q_1]$ relative à un point Q_1 de la droite AQ. Les coniques [Q] et $[Q_1]$ se correspondent dans une homologie déterminée par le centre A, l'axe BC et le couple de points homologues Q, Q_1. La parallèle menée par le point A à la droite BQ_1 coupe BQ en un point I de la droite limite de la première figure. Cette droite est parallèle à l'axe d'homologie BC; et on a en grandeur et en signe :

$$AQ_1 : Q_1Q = IB : BQ;$$

par suite le point I est sur le prolongement du segment QB ou sur l'autre partie indéfinie de la droite QB selon que le point Q_1 est intérieur ou extérieur au segment AQ. Dans le premier cas, la droite limite coupe la conique [Q] en deux points imaginaires et la courbe $[Q_1]$ est une ellipse ; dans le second la droite limite coupe la conique [Q] en deux points réels et la conique $[Q_1]$ est une hyperbole. Donc : *Si par un point quelconque* Q *du plan d'un triangle quelconque* ABC *et par ses sommets on mène les droites* AQ, BQ, CQ *rencontrant les directions des côtés respectivement opposés en* A', B', C', *la conique qui touchera les trois côtés du triangle en ces trois points, sera une ellipse, une hyperbole, ou une parabole suivant que le point* Q *sera intérieur à la plus petite ellipse circonscrite au triangle* ABC, *extérieur à cette ellipse ou sur son périmètre.* (STEINER, loc cit., p. 200). (*A continuer*).

×NOTES MATHÉMATIQUES.

8. *Exercices de trigonométrie sphérique, par* E. BARBETTE. 1° *Si les côtés b et c d'un triangle sphérique sont complémentaires, on a les relations :*

$$\operatorname{tg} p = \operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2} \quad \text{et} \quad \cos 2p = -\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}.$$

2° *Si le côté a d'un triangle sphérique est droit, on a les relations :*

$$\operatorname{tg} p = -\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2} \quad \text{et} \quad \cos 2p = -\frac{\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}.$$

1° Ayant $b+c=90°$, $a=2p-90°$, la formule de Néper

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}\operatorname{tg}\frac{b+c}{2},$$

donne

$$\frac{(1+\operatorname{tg}p)+(\operatorname{tg}p-1)}{(1+\operatorname{tg}p)-(\operatorname{tg}p-1)}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}},\quad \text{etc.}$$

Les analogies de Delambre

$$\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}},\qquad \frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

se transforment en les égalités suivantes :

$$\sin p-\cos p=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}},\qquad \cos p+\sin p=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}$$

d'où, par voie de multiplication, la seconde formule.

2° Même démonstration.

3° *Si les côtés b et c d'un triangle sphérique sont supplémentaires, l*
angles B *et* C *le sont aussi; et réciproquement. Démontrer que, pour*
tel triangle, on a

$$\cos(180°-p)=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin B},\qquad \cos E=\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin b};$$

2p représentant le périmètre et 2E *l'excès sphérique.*

Les analogies de Delambre

$$\cos\frac{B+C}{2}=\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\sin\frac{A}{2}\quad\text{et}\quad\cos\frac{b+c}{2}=\frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\cos\frac{a}{2}$$

donnent, en supposant respectivement $b+c=180°$ et $B+C=180°$:

$$\cos\frac{B+C}{2}=0\quad\text{et}\quad\cos\frac{b+c}{2}=0,\quad\text{etc.}$$

Les autres analogies

$$\sin\frac{a}{2}=\frac{\sin\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{B-C}{2}}\sin\frac{b+c}{2},\qquad \cos\frac{A}{2}=\frac{\cos\dfrac{a}{2}}{\cos\dfrac{b-c}{2}}\sin\frac{B+C}{2},$$

conduisent aux formules proposées si l'on fait $a=2p-180^\circ$, $A=2E$.

4. *Sur la question* 1428 (*Mathesis*, 1904, p. 73) M. Déprez nous a envoyé tardivement une solution de cette question qui se rapproche beaucoup de celle donnée par M. Emmerich. Il examine un grand nombre de cas particuliers ; K désignant le rapport des volumes des tétraèdres $O_aO_bO_cO_e$, ABCD, il trouve :

1° Si O_a est le centre du cercle inscrit à BCD,

$$K=-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}A\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}B\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}C.$$

2° Si O_a est le centre du cercle des neuf points de BCD,

$$K=\frac{\cos A\cos B\cos C}{8\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}.$$

3° Si O_a est le point de Lemoine de BCD,

$$K=-\frac{\cot A\cot B\cot C}{\cot^2\omega}.$$

4° Si O_a est l'orthocentre de BCD,

$$K=8\cot^2 A\cot^2 B\cot^2 C-4\cot A\cot B\cot C\cot\omega+1.$$

5° Si O_a est le pied de la hauteur issue de A dans le tétraèdre ABCD,

$$K=-64\cot^2 A\cot^2 B\cot^2 C+16\cot A\cot B\cot C\cot\omega-3.$$

O_a est alors le centre du cercle de Longchamps de la face BCD.

K conserve une valeur constante pour tous les points O_a d'une certaine cubique du plan BCD.

5. *Rectification.* Un *lapsus* s'est glissé dans une formule que nous avons indiquée dans *Mathesis* (1900, p. 16, dernière ligne). Au lieu de

$$\sin x+C_{m,1}\sin(x+h)+C_{m,2}\sin(x+2h)+\cdots+\sin(x+mh)$$
$$=2^m\sin^m\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{m}{2}h\right),$$

il faut lire

$$\sin x + C_{m,1}\sin(x+h) + C_{m,2}\sin(x+2h) + \cdots + \sin(x+mh)$$
$$= 2^m \cos^m \frac{h}{2} \sin\left(x + \frac{m}{2}h\right),$$

comme on s'en assure aisément en faisant le calcul indiqué dans le texte.

Le cas particulier, où $x = 2k\pi$, doit aussi être corrigé et doit s'écrire

$$C_{m,1}\sin h + C_{m,2}\sin 2h + \cdots + C_{m,m}\sin mh = 2^m \cos^m \frac{h}{2} \sin \frac{m}{2}h.$$

Cette erreur a été signalée par M. PLAKHOVO. (M. STUYVAERT).

6. *Sur un article de M. Krahé.* Depuis la publication de l'article de M. Krahé dans *Mathesis*, M. E. Cesàro nous a communiqué les renseignements bibliographiques suivants :

BELTRAMI, *Ricerche sulla Geometria delle forme binarie cubiche* (Memorie dell' Academia di Bologna, 1870).

JAN DE VRIES, *Involutions cubiques dans le plan complexe* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1901).

E. CESÀRO, *Lehrbuch der Analysis*, pp. 356-357, 416-417, où l'on trouve l'interprétation des racines du hessien d'une binaire cubique et une foule de développements fort intéressants sur des questions analogues.

M. Cesàro croit que ce genre de recherches a été inauguré par Beltrami. (J. N.).

7. *Sur la question* 1471, (*Mathesis*, p. 73). Elle a été étudiée dans le *Journal de Vuibert*, 1e année, p. 36, par M. W. DE TANNENBERG, qui ramène le problème à celui de Pappus. (COUVERT).

BIBLIOGRAPHIE.

B. Riemann's gesammelte Mathematische Werke. Nachträge herausgegeben von M. NOETHER und W. WIRTINGER. Leipzig, Teubner, 1902 (In-8° de VIII-116 pp.; 9 fig. dans le texte). Prix : 6 marcs.

Extraits des manuscrits de l'auteur qui prouvent que ses leçons à Göttingen étaient en avance sur ses publications, dans la théorie des abéliennes, des fonctions modulaires et de la série hypergeométrique.

Wahscheinlichkertsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung von E. Czuber, Professor an der technischen Hochschule in Wien. Leipzig, Teubner, 1902-1903 (In-8° de XV-594 pp.). Prix : 24 marcs.

M. Czuber a publié en 1879 la traduction du *Cours de calcul des probabilités* de Meyer édité par Folie en 1874; il est l'auteur d'une monographie (1884) *sur les probabilités géométriques* que M. le capitaine Schuermans a traduite en français (Paris, Hermann, 1902); on lui doit ensuite une autre monographie sur la théorie des erreurs d'observations (1891) et une histoire complète du calcul des probabilités (1899). Il est donc à l'heure qu'il est, le représentant le plus compétent de cette science difficile. Aussi le manuel qu'il a fait paraître, il y a deux ans, chez Teubner, est-il le meilleur que l'on possède actuellement sur le calcul des probabilités.

Il se divise en quatre parties : 1. Principes généraux avec les applications au jeu. 2. Théorie des erreurs d'observation. 3. La statistique mathématique. 4. Les assurances sur la vie. L'ouvrage contient en outre des tables numériques : table de la célèbre intégrale de Laplace, tables de mortalités, etc.

Aufgaben aus der niederen Geometrie, nach Lösungsmethoden geordnet und zu einem Uebungsbuche zusammengestellt von I. Alexandroff, Professor der Mathematik am Kaiserlichen russischen Gymnasium zu Tambow, mit einem Vorwort von Dr. M. Schuster, Professor an der Oberrealschule zu Oldenburg. Leipzig und Berlin, Teubner, 1903 (In-8° cartonné de VI-113 pp. avec 100 fig. dans le texte). Prix : 3 marcs.

Traduction allemande de ce bon recueil de problèmes de géométrie où les problèmes sont classés d'après les méthodes de solution. Voir dans *Mathesis*, 1899, pp. 69-70, une appréciation de la traduction française de ce livre.

Cours de trigonométrie à l'usage des candidats aux écoles spéciales par E. Barbette, Docteur en sciences physiques et mathématiques. Gand, Hoste, 1904 (vol. de VII-259 p. in-8° avec figures dans le texte). Prix : 5 francs.

Sommaire. *Notions préliminaires* (pp. 1-19). Des vecteurs, des arcs et des angles. I. *Des fonctions trigonométriques et de leurs relations* (pp. 20-74). Définitions géométriques des six fonctions trigonométriques et étude détaillée de leurs variations. — Relations entre les fonctions trigonométriques : 1° d'un même arc, 2° de sommes ou de différences d'arcs, 3° de multiples ou de sous multiples d'arcs. — Relations servant au calcul logarithmique.

Dans ce dernier paragraphe, sont exposés des procédés et des formules permettant de ramener à la forme monôme quelques expressions non calculables par logarithmes. L'auteur n'aurait-il pas pu y traiter le cas des racines de l'équation du second degré?

II. *Construction des tables; résolution des équations trigonométriques; maxima et minima* (pp. 75-138). Ces trois chapitres sont très développés. De nombreux procédés, qui ne nous paraissent pas toujours bien choisis, sont donnés pour résoudre les équations. L'auteur semble oublier, en effet, que les substitutions

irrationnelles conduisent toujours à des équations plus générales que les proposées, et qu'alors il y a un choix à faire parmi les solutions. Même observation en ce qui concerne la recherche des maxima et minima. Ce dernier paragraphe, par l'abondance et la variété des matières traitées, mérite cependant de fixer l'attention. Les questions relatives aux maxima de produits ou de sommes de sinus, de cosinus ou de tangentes d'arcs dont la somme est constante y sont très bien résolues.

III. *Trigonométrie plane* (pp. 139-170). Résolution des triangles rectangles et obliquangles. — Formules donnant la surface du triangle et les rayons des cercles inscrit, ex-inscrits et circonscrit. — Quadrilatère inscrit.

Les exercices résolus sont trop peu nombreux.

IV. *Trigonométrie sphérique* (pp. 171-216). Les formules généralement employées en trigonométrie sphérique sont déduites à peu près comme d'ordinaire analytiquement de la formule fondamentale (entre les côtés et un angle) trouvée géométriquement. Sauf en ce qui concerne la démonstration de cette dernière formule, dont la généralité s'aperçoit difficilement, les autres ne diffèrent guère de celles que l'on rencontre ordinairement dans les auteurs(*).

(H. Mandart.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1160.

(Voir *Mathesis*, (2) VIII, p. 56 et (3) I, p. 78)

[illegible] A', B', C' [illegible] A₁, B₁, C₁ *les milieux des* [illegible] ABC. [illegible] *des deux triangles* A'B'C', A₁B₁C₁ [illegible] *pour foyer le* [illegible] ABC. (Droz Farny).

1. M étant un point quelconque de la circonférence circonscrite à un triangle ABC, soient X, Y, Z ses projections sur BC, CA, AB. Le quadrilatère MYAZ est inscriptible, donc les angles BAM, MYZ sont égaux. [illegible] AM par rapport à la bissectrice de l'angle BAC [illegible] de AM. L'angle MAC [illegible] MYZ [illegible] AY, MY sont perpendiculaires. [illegible] M [illegible] AM [illegible] BAC [illegible].

(*) [illegible] l'Institut qui a été [illegible] questions [illegible] (P. Mansion.)

Il résulte de là que *la droite* A_1M *et la droite de Simson de* M *ont des vitesses égales et de sens contraires, lorsque* M *parcourt la circonféreuce.*

2. Appelons s_1 la droite XYZ et s' la droite de Simson de M par rapport à un second triangle A'B'C' inscrit à la même circonférence que $A_1B_1C_1$. Lorsque M parcourt cette circonférence, les droites A_1M, A'M tournent avec la même vitesse dans le même sens; leurs droites de Simson tournent avec la même vitesse que A_1M et A'M, mais dans le sens opposé. On déduit de là que si deux triangles sont inscrits à une même circonférence, *les droites de Simson d'un point quelconque de cette courbe par rapport à ces triangles font entre elles un angle constant.*

3. En particulier, *si les droites de Simson d'un point de la circonférence circonscrite aux deux triangles* $A_1B_1C_1$, A'B'C' *sont parallèles entre elles, tout point de la circonférence jouit de la même propriété; et il existe un point qui a la même droite de Simson dans les deux triangles.*

La première partie de ce théorème résulte du § 2. Pour établir la seconde, appelons B_2, C_2 les points de rencontre de la droite B'C' avec les lignes A_1B_1, A_1C_1. La circonférence $A_1B_2C_2$ rencontre la circonférence $A_1B_1C_1$ en un point P autre que A_1. Les projections de P sur A_1B_1, A_1C_1, B'C' seront sur une même droite *p*, et comme les droites de Simson de P dans les deux triangles $A_1B_1C_1$, A'B'C' ont la même direction et un point commun sur B'C', elles coïncident.

Il résulte de là que *les deux triangles* $A_1B_1C_1$, A'B'C' *sont circonscrits à une même parabole ayant* P *pour foyer et p pour tangente au sommet.*

4. *Si* $A_1B_1C_1$, A'B'C' *sont les triangles déterminés par les milieux des côtés et les pieds des hauteurs d'un triangle* ABC, *leurs droites de Simson relatives à un point quelconque du cercle des neuf points de* ABC *sont parallèles.*

Il suffit de constater cette propriété pour le point A_1. La droite de Simson par rapport à $A_1B_1C_1$ est la hauteur A_1O; A_1 étant sur la bissectrice extérieure de l'angle A' du triangle A'B'C', la droite de Simson par rapport à A'B'C' a la même direction que A_1O(*).

5. Désignons par α_1, β_1, γ_1 les points d'intersection des côtés homologues des deux triangles $A_1B_1C_1$, A'B'C'.

Ces triangles, d'après ce qui précède, sont circonscrits à une même

(*) Ce qui précède, se trouve démontré d'une autre manière dans une note sur la question 1160 qui nous a été adressée par M. Barisien. C'est cette note qui nous a suggéré la solution actuelle.

parabole dont le foyer P est à l'intersection des circonférences circonscrites aux triangles $A_1B_1C_1$, $A_1B_2C_2$. Le quadrilatère $B_1C_1C_2B_2$ étant inscriptible, on sait que P se trouve aussi sur la troisième diagonale $A_1\alpha_1$.

Donc, les droites $A_1\alpha_1$, $B_1\beta_1$, $C_1\gamma_1$ concourent au point P.

6. Pour trouver les coordonnées baryeentriques de P par rapport au triangle, cherchons le rapport $\alpha_1B_1 : \alpha_1C_1$ en considérant le triangle AB_1C_1 coupé par la sécante B'C'. On a

$$\frac{\alpha_1B_1}{\alpha_1C_1}\cdot\frac{B'A}{B'B_1}\cdot\frac{C'C_1}{C'A}=-1,\quad \frac{B'A}{C'A}=\frac{c}{b},$$

$$a^2-b^2=BC'^2-\overline{AC'}^2=2c.C_1C',$$

$$a^2-c^2=\overline{CB'}^2-\overline{AB'}^2=2b.B_1B',$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\alpha_1B_1}{\alpha_1C_1}=\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}.$$

Par conséquent, les coordonnées de P sont

$$\frac{1}{b^2-c^2},\ \frac{1}{c^2-a^2},\ \frac{1}{a^2-b^2}.$$

Mais telles sont aussi les coordonnées du point de Steiner du triangle $A_1B_1C_1$.

Les deux triangles A'B'C', $A_1B_1C_1$ étant inscrits à une même conique sont autopolaires par rapport à une autre conique. Cette nouvelle courbe est l'hyperbole de Kiepert du triangle ABC; car A'B'C', $A_1B_1C_1$ sont les triangles diagonaux des quadrangles inscrits ABCH, ABCG.

(J. Neuberg).

Question 1420.

(Voir *Mathesis*, (3); II, p. 128).

Trouver des solutions entières de l'équation

$$x^2=y^2(1+2z+z^2+z^3).$$

(Paulmier).

Solution par M. Plakhovo. D'après le théorème de M. Rouché (NAM, 1860, p. 247; *Mathesis*, (3), III, p. 119), l'expression $1+2z+z^2+z^3$ qui, dans le système à base z, s'écrit 1121, n'est un

carré parfait que pour $z = 0$. L'équation proposée admet donc la seule solution $z = 0$, $x = \pm y$.

La solution de cette question est contenue dans celles de la question 1385 (*Mathesis*, (3) III, p. 118).

Questions 1490.

(Voir *Mathesis*, (3), IV, p. 240 et (3) V, p. 28 et 67).

On considère un triangle sphérique ABC *dans lequel une médiane* m_a *est le supplément de la moitié du côté correspondant* a : 1° *La surface de ce triangle est égale à celle du fuseau droit ;* 2° *établir la relation*

$$\cot R = \cot \tfrac{1}{2} a \cot \tfrac{1}{2} b \cot \tfrac{1}{2} c.$$

(*Concours de l'enseignement moyen, en* 1904).

Solution par M. E. Lienard. La démonstration suivante peut présenter quelque intérêt après celles qui ont déjà paru dans *Mathesis*.

I. Voici d'abord quatre propositions qui s'enchaînent étroitement :

1° Dans tout triangle rectangle ABC, le médiane issue du sommet de l'angle droit est moitié de l'hypoténuse et réciproquement.

2° On donne un tétraèdre SABC tel que SA = BC, SB = AC, SC = AB (tétraèdre dit *équifacial* ou *isoscèle*). On mène par A, B, C des parallèles à BC, CA, AB; soit A'B'C' le triangle ainsi obtenu. *La somme des angles* ASB, BSC, CSA *est égale à deux droits et le trièdre* SA'B'C' *est trirectangle.*

3° Un plan coupe les arêtes d'un trièdre trirectangle OABC aux points A, B, C. Soient A', B', C' les milieux des droites BC, CA, AB. Le tétraèdre OA'B'C' est *équifacial* et, par suite, la somme des faces du trièdre OA'B'C' est égale à deux droits.

4° Plus généralement, un tétraèdre OABC étant trirectangle en O, si les droites joignant A, B, C à un point quelconque M du plan ABC rencontrent BC, CA, AB en A', B', C', la somme des faces du trièdre OA'B'C' est égale à deux droits.

Ce cas se ramène au précédent : On peut mener par A' une droite telle que le segment B_1C_1 intercepté par l'angle BOC ait son milieu en A'; puis par B_1, dans le plan BOA, une droite A_1B_1 rencontrant OA en A_1 et ayant son milieu sur OC'; alors A_1C_1 sera divisée en parties égales par OB',

II. Prenons sur les arêtes d'un angle trièdre OABC trois longueurs égales $OA = OB = OC$. Soient A', B', C' les milieux des côtés du triangle ABC; A'', B'', C'' les milieux des côtés du triangle A'B'C'.

Pour que les angles AOA' et A'OB soient supplémentaires, il est nécessaire et suffisant que la projection OP de OA sur OA' soit égale à $-OA'$, c'est-à-dire que l'angle A'OA'' soit droit; car les triangles rectangles AOP, OBA' sont alors égaux. Or, la droite OA', perpendiculaire à la fois à B'C' et à OA'', est perpendiculaire au plan B'OC'. Il en résulte que le trièdre OA'B'C' est trirectangle. Donc *si un triangle sphérique* ABC *est tel qu'une médiane est le supplément de la moitié du côté correspondant, les arcs qui joignent les milieux des côtés sont des quadrants.*

III. Le trièdre supplémentaire du trièdre OABC est défini par les demi-droites issues de O et perpendiculaires sur les côtés du triangle A'B'C'. D'après le § 1, *d*, la somme des faces de ce nouveau trièdre est égale à deux droits. Donc la surface du triangle sphérique ABC est égale à celle du fuseau droit.

IV. En désignant par H l'orthocentre du triangle A'B'C' et observant que H est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, on pourra écrire successivement :

$$\cot R = \frac{OH}{HA} = \frac{4OH \cdot \text{Surf. ABC}}{AB \cdot BC \cdot CA}$$

$$= \frac{16OH \cdot \text{Surf. A'B'C'}}{8CA' \cdot AB' \cdot BC'} = \frac{6 \text{ vol. OA'B'C'}}{CA' \cdot AB' \cdot BC'}$$

$$= \frac{OA' \cdot OB' \cdot OC'}{CA' \cdot AB' \cdot BC'} = \frac{OA'}{CA'} \times \frac{OB'}{AB'} \times \frac{OC'}{BC'}$$

$$= \operatorname{cotg}\frac{a}{2} \operatorname{cotg}\frac{b}{2} \operatorname{cotg}\frac{c}{2}.$$

Question 1491.

(Voir *Mathesis*, (3) IV; p. 240)

On considère une ellipse, un foyer F, *un point variable* M *sur l'ellipse, le cercle décrit sur* MF *comme diamètre, et un cercle concentrique à l'ellipse, de rayon* R. *Le lieu des centres de similitude des deux cercles se compose de deux coniques. Quel doit être le rayon* R *pour que chacune de*

ces coniques soit : 1° *un cercle,* 2° *une parabole,* 3° *une hyperbole équilatère,* 4° *deux droites.*

Traiter la question analogue avec le cercle de centre M *et de rayon* MF.

(E. N. Barisien).

Solution par M. H. Lez. I. Considérons le cercle décrit sur le rayon vecteur FM comme diamètre. Si x', y' sont les coordonnées du point M, le rayon vecteur FM égalera $a - ex'$ et l'équation du cercle sera

$$\left(x - \frac{c + x'}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y'}{2}\right)^2 = \left(\frac{a - ex'}{2}\right)^2;$$

celle du cercle fixe concentrique à l'ellipse est d'ailleurs

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

On trouve facilement pour les coordonnées des centres de similitude extérieur et intérieur :

$$x = \frac{R(c - x')}{2R - (a - ex')}, \quad y = \frac{Ry'}{2R - (a - ex')}; \tag{1}$$

$$x = \frac{R(c + x')}{2R + a - ex'}, \quad y = \frac{Ry'}{2R + a - ex'}. \tag{2}$$

Des deux premières égalités, puis des deux dernières, on tire

$$x' = \frac{(2R - a)x - cR}{R - ex}, \quad y' = \frac{(2R - a - ce)y}{R - ex}, \tag{3}$$

$$x' = \frac{(2R + a)x - cR}{R + ex}, \quad y' = \frac{(2R + a + ce)y}{R + ex}. \tag{4}$$

Portant ces valeurs dans la relation $b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2$, on trouve les deux coniques :

$$b^2(4R^2 - 4aR + b^2)x^2 + (2aR - 2a^2 + b^2)^2y^2 - 4Rb^2c(R - a)x - b^4R^2 = 0, \tag{5}$$

$$b^2(4R^2 + 4aR + b^2)x^2 + (2aR + 2a^2 - b^2)^2y^2 - 4Rb^2c(R + a)x - b^4R^2 = 0. \tag{6}$$

Examinons ce que deviennent ces courbes suivant la valeur du rayon R.

Pour la conique (5), le binôme caractéristique est

$$-4b^2(4R^2 - 4aR + b^2)(2aR - 2a^2 + b^2)^2.$$

Si $4R^2 - 4aR + b^2 = 0$, ou $R = \frac{a \pm c}{2}$, la conique devient une des paraboles

$$4c^2(a \pm c)^2y^2 + 4b^2c(a^2 - c^2)x - b^4(a \mp c)^2 = 0.$$

Pour $2aR - 2a^2 + b^2 = 0$, ou $R = \frac{2a^2 - b^2}{2a}$, la conique se transforme en une droite $x = \frac{2a^2 - b^2}{2c}$.

Si $R = 0$, on a deux droites imaginaires $b^4x^2 + (b^2 - 2a^2)^2y^2 = 0$, qui se coupent au centre de l'ellipse; mais les formules (1) et (2) donnent $x = y = 0$.

Quand on a

$$b^2(4R^2 - 4aR + b^2) - (2aR - 2a^2 + b^2)^2 = 0,$$

d'où $R = a$, le lieu se confond avec le cercle principal de l'ellipse, ce qui s'explique aisément : le cercle décrit sur MF comme diamètre touche le cercle principal.

Pour avoir une hyperbole équilatère, il faut poser

$$b^2(4R^2 + 4aR + b^2) + (2aR - 2a^2 + b^2)^2 = 0,$$

d'où

$$R = \frac{2a^2 \pm b^2c\sqrt{2}}{2(a^2 + b^2)};$$

l'équation (5) devient

$$2c^2(y^2 - x^2) + 4c(a^2 + c^2 \pm ac\sqrt{2})x - (a^2 + c^2 \pm ac\sqrt{2})^2 = 0,$$

on peut la ramener à la forme $2c^2(x^2 - y^2) = (a^2 + c^2 \pm ac\sqrt{2})^2$.

Appliquant le même raisonnement à l'équation (6), ou y changeant simplement R en — R on obtient des résultats semblables.

Le cercle décrit du point M avec le rayon MF a pour équation

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = (a - ex')^2;$$

l'équation du cercle fixe étant $x^2 + y^2 = R^2$, les coordonnées des centres de similitude extérieur et intérieur sont

$$x = \frac{Rx'}{R - a - ex'}, \quad y = \frac{Ry'}{R - a + ex'},$$

$$x = \frac{Rx'}{R + a - ex'}, \quad y = \frac{Ry'}{R + a - ex'}.$$

Des deux premières égalités, puis des deux dernières, on tire

$$x' = \frac{(R - a)x}{R - ex}, \quad y' = \frac{(R - a)y}{R - ex};$$

$$x' = \frac{(R + a)x}{R + ex}, \quad y' = \frac{(R + a)y}{R + ex}.$$

Portant ces valeurs dans la relation $b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2$, on trouve encore deux coniques :

$$b^2(R^2 - 2aR + b^2)x^2 + a^2(R - a)^2y^2 + 2ab^2cRx - a^2b^2R^2 = 0, \quad (7)$$

$$b^2(R^2 + 2aR + b^2)x^2 + a^2(R + a)^2y^2 - 2ab^2cRx - a^2b^2R^2 = 0. \quad (8)$$

Considérons l'équation (7); elle représentera :

1° un cercle, si

$$b^2(R^2 - 2aR + b^2) - a^2(R - a)^2 = 0, \quad \text{soit} \quad R = a \pm b\sqrt{-1},$$

valeur imaginaire;

2° Une parabole, si

$$R^2 - 2aR + b^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad R = a \pm c;$$

3° Une hyperbole équilatère, si

$$b^2(R^2 - 2aR + b^2) + a^2(R - a)^2 = 0 \quad \text{d'où} \quad R = a \pm b\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}};$$

4° des droites, si le discriminant

$$-a^2b^2R^2(R - a)^2(R^2 - 2aR + a^2) = 0.$$

Pour $R = a$, on trouve une droite $cx - a^2 = 0$, directrice de l'ellipse donnée.

Le même raisonnement appliqué à l'équation (8) conduit à des résultats analogues.

Solution analogue par M. Rose et M. Dupont. M. Bastin réunit les questions 1486 (*Mathesis*, 1904, p. 277) et 1491. M. Abramescu part de l'équation polaire de l'ellipse.

Question 1497.

(Voir *Mathesis*, (3); IV, p. 280.)

On considère les ellipses semblables qui ont un sommet commun A *et passent par un même point* M. *Trouver le lieu des autres sommets* A', B, B', *ainsi que l'enveloppe de l'axe* BB'. (J Neuberg).

Solution par M. P. Bastin. 1° Prenons pour axe des X la droite AM et pour axe des Y la perpendiculaire menée en A; soient $BB' = 2b$, $AA' = 2kb$ les axes d'une des ellipses considérées, α l'angle que fait AA' avec AM, p la longueur AM.

Les droites AM et A'M sont deux cordes supplémentaires et l'on a la relation $k^2 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} AA'M - 1 = 0$. Or, $\operatorname{tg} AA'M = \dfrac{p \sin\alpha}{2kb - \cos\alpha}$; si l'on

porte cette valeur dans la relation précédente, celle-ci devient :

$$p(k^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 2kb \cos \alpha = 0.$$

Le sommet A′ a pour coordonnées :

$$x = 2kb \cos \alpha, \quad y = 2kb \sin \alpha.$$

L'élimination des variables b et α entre les équations (Δ) et (S) duit à l'équation du lieu de (A′). On trouve

$$y^2 = \frac{x^2 (x - p)}{k^2 p - x}.$$

Symétrique par rapport à l'axe des X, la cubique φ est entière comprise entre les parallèles $x = p$ et $x = k^2 p$, tangente en M première droite et asymptote à la seconde.

Le sommet A est un point double isolé de la courbe, mais c'est point parasite correspondant à $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{i}{k}$.

2° Le triangle variable ABA′ reste semblable à lui-même; il résulte que les sommets B et A′ décrivent des courbes semblables rapport de similitude étant $\frac{AB}{AA'} = \frac{\sqrt{1 + k^2}}{2k}$. Si l'on fait tourner axes coordonnés d'un angle $\omega = A'AB$ et si l'on pose $\frac{p\sqrt{1 + k^2}}{2k} =$ on trouve pour équation du lieu de B :

$$y^2 = \frac{x^2 (x - p')}{k^2 p' - x}.$$

La même équation représenterait le lieu du sommet B′, si l'on fai tourner les axes de l'angle — ω. On voit que les deux lieux sont sy triques par rapport à AX.

3° L'axe BB′ a pour équation $y \sin \alpha + x \cos \alpha - kb = 0$; cette d nière devient, si l'on tient compte de la relation (Δ),

$$2y \sin \alpha \cos \alpha + 2x \cos^2 \alpha - pk^2 \sin^2 \alpha - p \cos^2 \alpha = 0,$$

ou bien si l'on pose $\operatorname{tg} \alpha = t$:

$$k^2 pt^2 - 2ty + (p - 2x) = 0.$$

L'enveloppe de BB′ aura conséquemment pour équation

$$y^2 = k^2 p (p - 2x);$$

c'est une parabole dont l'axe est la droite AM et le sommet le point milieu du segment AM.

Dans l'hypothèse $k = 1$, c'est-à-dire quand les ellipses considérées sont des cercles, les trois lieux obtenus dégénèrent en trois droites passant par M, la première parallèle à l'axe des y et les deux autres parallèles aux bissectrices des axes; la parabole enveloppe du diamètre BB′ a pour foyer le point A.

En admettant que le sommet donné A soit l'extrémité du grand axe, le centre O de l'ellipse et les foyers F, F′ décrivent trois cubiques homothétiques à φ; le centre d'homothétie est A et les rapports d'homothétie sont respectivement $\frac{1}{2}$, $\frac{k-\sqrt{k^2-1}}{2k}$, $\frac{k+\sqrt{k^2-1}}{2k}$. Si A était à l'extrémité du petit axe, les foyers décriraient deux cubiques égales, symétriques par rapport à l'axe des x et semblables à φ; le rapport de similitude serait $\frac{1}{2k}$ et l'axe de chacune de ces courbes ferait avec celui de φ un angle ω' tel que

$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}.$$

D'une manière générale, si P est un point invariablement lié à l'ellipse, le triangle APA′ reste semblable à lui-même et le lieu de P est semblable à φ.

De même, toute droite liée à l'ellipse enveloppe une parabole. En effet, si Q est le point où une telle droite rencontre l'axe AA′ et AR la distance du sommet A à la droite, on a

$$\text{angle RAO} = \frac{\pi}{2} - \text{AQR} = \text{constante}, \quad \frac{\text{AR}}{\text{AO}} = \frac{\text{AQ}}{\text{AO}} \sin \text{AQR} = \text{constante};$$

les droites QR et BB′ enveloppent donc des courbes semblables.

Autres bonnes solutions par MM. Barisien, H. Lez et Orasanu (Bukarest), qui partent de l'équation $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ou $x^2 + k^2y^2 - 2kbx = 0$ et emploient une transformation de coordonnées.

Note. I. Partons de l'équation

$$y^2 = k^2(2ax - x^2), \tag{1}$$

où k désigne le rapport constant des axes.

Si l'on fait $\text{AM} = p$, angle $\text{MAA}' = \theta$, les coordonnées de M sont

$p\cos\theta$, $p\sin\theta$. Substitutions ces valeurs dans l'équation (1):

$$p\sin^2\theta = k^2(2a\cos\theta - p\cos^2\theta).$$

Or, a et θ sont les coordonnées polaires du centre O de l'ellipse variable, lorsqu'on prend pour axe polaire AM. Donc si l'on écrit r pour a, on a pour l'équation du lieu (O) en coordonnées polaires

$$p\sin^2\theta = k^2(2r\cos\theta - p\cos^2\theta),$$

et, en coordonnées rectangulaires,

$$\frac{py^2}{x^2+y^2} = k^2\left(2x - p\frac{x^2}{x^2+y^2}\right), \quad \text{etc.}$$

(F. Dupont).

II. Voici une solution géométrique due à M. Barrau et qui a paru dans les *Wiskundige Opgaven* (1905, p. 240) où nous avions proposé la même question.

Appelons E une ellipse quelconque AMA′ de la question et E′ l'ellipse semblable construite sur AM comme grand axe. Si E′ coupe AA′ en N, AA′ et AM, AM et AN, MA′ et NM sont des lignes homologues des deux courbes semblables E, E′; il en résulte

$$\overline{AM}^2 = AN.\,AA'.$$

Par conséquent, les points A′ et N se correspondent dans une inversion ayant pour cercle d'inversion le cercle (A, AM). Le lieu de A′ est donc une courbe du troisième ordre.

Le perpendiculaire en A′ sur AN est la polaire de N par rapport au cercle (A, AM); par suite, l'enveloppe de cette droite est la polaire réciproque de E′ par rapport au cercle (A, AM), courbe qui est ici une parabole parce que le centre B du cercle est sur E′. (J. N.).

III. M. Barisien observe que le lieu du point A′ est une cubique, genre cissoïde, avec un point isolé en A. et que l'aire comprise entre la courbe et son asymptote est finie, ayant pour expression

$$\frac{\pi a^2}{16k^4}(1-k^2)(3+k^2).$$

IV. M. Abramescu esquisse la solution suivante :

Soit Ax une droite quelconque menée par A et choisie pour axe d'une ellipse de la question. Menons sur Ax la perpendiculaire MP, puis déterminons sur MP le segment Pm tel que Pm : PM $= a : b = k$. Le point m appartenant au cercle principal de l'ellipse considérée, la perpendiculaire en m sur Am coupera Ax au sommet A′ de cette courbe.

V. Le point P décrit la circonférence de diamètre AM. Le rapport MP : Mm étant constant, le point m parcourt également une circonférence ayant son centre sur AM; la droite auxiliaire mA′ a donc pour enveloppe une ellipse de foyer A. (J. N.).

QUESTIONS D'EXAMEN.

1204. Vérifier que les sommes

$$1^2.2^3+2^2.3^3+3^2.4^3+\cdots+(n-1)^2.n^3$$
$$1^3.2^2+2^3.3^2+3^3.4^2+\cdots+(n-1)^3.n^2,$$
$$1^3.2^3+2^3.3^3+3^3.4^3+\cdots+(n-1)^3.n^3$$

ont respectivement pour expression

$$\tfrac{1}{30}\,n(n^2-1)[(5n+3)(n^2-1)+1],$$
$$\tfrac{1}{30}\,n(n^2-1)[(5n-3)(n^2-1)-1],$$
$$\tfrac{1}{105}\,n(n^2-1)[(5n^2-2)(3n^2-4)-n^2]. \qquad \text{(Ruff).}$$

1205. Chercher les coordonnées du sommet de la parabole

$$4x^2-4xy+y^2-x+2y=0. \qquad \text{(Haag).}$$

La direction des diamètres est déterminée par $4-4m+m^2=0$, d'où $m=2$. L'équation de la tangente au sommet est de la forme $y=-\frac{1}{2}x+K$. En exprimant que cette droite rencontre la parabole en deux points confondus, on trouve $K=\frac{2}{15}$, $x=\frac{16}{75}$, $y=\frac{2}{75}$.

1206. Soit ABC un triangle rectangle en A et tel que la hauteur AD partage l'hypoténuse BC en moyenne et extrême raison ($\overline{BD}^2=BC.DC$). Démontrer que AC = BD, que AD est une moyenne proportionnelle entre DC et CA, que AB est une moyenne proportionnelle entre BC et CA. Si l'on projette D en E sur AB, en F sur AC, on a

$$DE=DC,\quad AD=BE,\quad AF=DC. \qquad \text{(Janisch).}$$

1207. Si un nombre de deux chiffres se termine par 5, on obtient son carré en écrivant le nombre 25 à la suite du produit de son premier chiffre par le chiffre suivant.

Exemple : $85^2=8\times9\times100+25=7225$.

1208. Si le premier chiffre est 5 et le second quelconque, on forme le carré du nombre en écrivant le carré du dernier chiffre à la suite de la somme obtenue en ajoutant à 25 le chiffre des unités.

Exemple : $53^2=(25+3)\times100+9=2809$.

1209. L'hypoténuse BC d'un triangle rectangle ABC est fixe. Soient ABEF, ACHK les carrés construits extérieurement sur les côtés de l'angle droit, et M le point d'intersection des droites EF, HK. Démontrer que les centres des deux carrés, les sommets E, F, H, K et le point M décrivent des circonférences quand A se déplace.

Il faut remarquer que le droite AM est égale et perpendiculaire à BC.

1210. Si $D_1D_2D_3D_4$ est un rectangle quelconque, le lieu d'un point M tel que le faisceau $M(D_1D_2D_3D_4)$ soit harmonique est l'hyperbole équilatère circonscrite au rectangle. (EDM. DE PUYDT).

Les axes coordonnés étant les parallèles menées par le centre du rectangle, les coefficients angulaires des rayons des faisceaux sont

$$m_1=\frac{y-\beta}{x-\alpha},\quad m_2=\frac{y-\beta}{x+\alpha},\quad m_3=\frac{y+\beta}{x+\alpha},\quad m_4=\frac{y+\beta}{x-\alpha},$$

et l'on doit avoir

$$2(m_1m_2+m_3m_4)=(m_1+m_2)(m_3+m_4),\ \text{etc.}$$

1211. La polaire d'un point P par rapport à une ellipse (E) de centre O, coupe les axes en A et B; soient C le quatrième sommet du rectangle AOBC et (H) l'hyperbole d'Apollonius relative à P. Démontrer que la polaire du centre de cette hyperbole par rapport à (E) coupe la polaire de P par rapport au cercle de Monge (M) au point C.

(J. Ross).

Vérification analytique facile

1212. Une sécante coupe les côtés AB, AC d'un triangle aux points P, Q; soient P′, Q′ les symétriques de P, Q respectivement par rapport à B, C. Trouver le lieu du point de rencontre des droites PQ, P′Q′ lorsque la sécante PQ se meut parallèlement à elle-même ou qu'elle passe par un point fixe R.

Prendre pour axes coordonnés AB, AC.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1514** (rectifié). Pour toute valeur entière de n, le nombre

$$m^n-(m-1)n-1$$

est divisible par $(m-1)^2$, le nombre

$$m^n+(m+1)n-1$$

si n est pair ou le nombre

$$m^n - (m+1)n + 1,$$

si n est impair, par $(m+1)^2$. (E. Barbette).

×**1516**. 1° Dans un triangle sphérique, que l'angle A soit droit ou que les angles B et C soient complémentaires, on a la relation

$$\operatorname{tg} E = \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2}.$$

En déduire que la surface d'un triangle plan rectangle est donnée par la formule $S = \frac{1}{2} bc$.

2° Selon que dans un triangle sphérique, l'angle A est droit ou les angles B et C sont complémentaires, la médiane m_a est donnée par l'une des relations :

$$\cos m_a = \cos \frac{a}{2} \cos 2E, \quad \text{ou} \quad \cos m_a = \frac{\cos \frac{a}{2}}{\cos 2E}.$$

(E. Barbette).

×**1517**. Démontrer géométriquement les théorèmes suivants :

1° La circonférence des neuf points d'un triangle est le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances aux sommets, diminuée de leur puissance par rapport au cercle circonscrit est égale à $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

2° H et O étant l'orthocentre d'un triangle ABC et le centre du cercle circonscrit, pour tout point M de la circonférence de diamètre HO, on a

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - \overline{MD}^2 = 3R^2.$$

(Edm. De Puydt).

1518. Etant donnés deux trièdres SABC, S'A'B'C', appelons M, N, P les points de rencontre des arêtes SA, SB, SC du premier trièdre respectivement avec les faces opposées S'B'C', S'C'A', S'A'B' du second, et soient M', N', P' les points de rencontre du second trièdre avec les faces opposées du premier. Cela posé :

1° Si les points S', M, N, P sont situés dans un même plan, il en sera de même des points S, M', N', P'.

2° Si les plans S'A'M, S'B'N, S'C'P se coupent suivant une même droite, il en sera de même des plans SAM', SBN', SCP'.

(Deguelbre).

1519. On projette un point quelconque M du plan d'une ellipse en D et E sur les diamètres conjugués égaux; les projetantes MD, ME rencontrent respectivement les diamètres OE, OD aux points D_1, E_1. D'après un théorème connu, ces points D_1, E_1 appartiennent à l'hyperbole d'Apollonius relative à M. Cela posé, le centre de cette hyperbole est le milieu M′ de la droite D_1E_1 et aussi le pôle de la corde ED du cercle ODE; la tangente en O à l'hyperbole passe au milieu de la droite ED, et les tangentes en D_1 et E_1 sont parallèles à ED. Pour tout point P de l'hyperbole, les angles PD_1O, PE_1O sont égaux entre eux. (Dépaix).

1520. Si ρ, n, d désignent respectivement le rayon de courbure, la corde normale en un point M d'une conique et la distance de M au point de Fregier, on a la relation

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{n}.$$

(J. Rose).

QUESTIONS NON RÉSOLUES DES DEUX PREMIÈRES SÉRIES.
(Additions et rectifications).

×**1123** (XVII, p. 150). Résoudre ou construire un triangle sphérique connaissant *a*) les trois hauteurs; *b*) les trois médianes; *c*) les rayons de trois cercles tritangents.

On demande une solution ou au moins l'examen de ces problèmes.

1144 (XVII, p. 261). Si cinq droites sont tangentes à une même hypocycloïde à trois rebroussements : 1° Les foyers des cinq paraboles inscrites aux quadrilatères obtenus en prenant ces droites quatre à quatre sont en ligne droite; 2° Les perpendiculaires menées par le centre du cercle des neuf points sur la droite d'Euler de chacun des dix triangles obtenus en prenant les droites trois à trois concourent au point central de l'hypocycloïde. (A. Gob).

1147 (XVII, p. 279). Contrairement à ce que nous avons dit p. 31, cette question a été résolue, t. XVIII, pp. 52 et 112.

Rectifications. Page 29, question 1513, supprimer à la fin les mots : ou $A_2B_2C_2$, $A_1B_1C_1$. — Page 56, ligne 8, au lieu de *à TT′ par N* lire *à TT′ par N′*. — Page 68, ligne 4, au lieu de *l'unité de longueur*, lire *la longueur concrète*; ligne 6 en remontant, lire ainsi la note : *En géométrie plane et indépendamment du Postulat d'Euclide.*

MÉMORIAL MATHÉMATIQUE.

Mai.

1. **1870.** Mort de *G. Lamé*, à Paris.
2. **1821.** Naissance de *F. Tchebychef*, à Okatovo, près de Borofsk.
3. **1822.** Naissance de *D. Bierens de Haan*, à Amsterdam.
4. **1845.** Naissance de *W. Clifford*, à Exeter.
5. **1833.** Naissance de *L. Fuchs*, à Moschin près de Posen.
   1859. Mort de *Dirichlet*, à Goettingue.
6. **1863.** Mort d'*O. Terquem*, à Paris.
7. **1832.** Naissance de *Karl Neumann*, à Königsberg.
8. **1879.** Mort de *Ph. Kelland*, à Edimbourg.
10. **1746.** Naissance de *Monge*, à Beaune.
    1821. Naissance de *B. Boncompagni*, à Rome.
11. **1871.** Mort de *John Herschell*, à Collingwood (Kent).
12. **1003.** Mort de *Gerbert* (Sylvestre II), à Rome.
    1820. Naissance de *J. Casey*, à Michelstown, Cork.
13. **1753.** Naissance de *L. Carnot*, à Noley, en Bourgogne.
    1845. Naissance de *H. Brocard*, à Vignot (Meuse, France).
    1868. Mort de *J. B. Brasseur*, à Liége.
14. **1832.** Naissance de *R. Lipschitz*, à Königsberg.
    1893. Mort de *E. Kummer*, à Berlin.
15. **1618.** *Képler* trouve la troisième de ses lois.
16. **1718.** Naissance de *Maria Agnesi*, à Milan.
    1830. Mort de *J. B. Fourier*, à Paris.
17. **1765.** Mort de *A. C. Clairaut*, à Paris.
18. **1766** Mort de *Fagnano*, à Sinagaglia.
19. **1832** Naissance de *E. Bour*, à Gray.
21. **129** a. C. Naissance de *Platon*, à Athènes.
    348 a C. Mort de *Platon*, à Athènes.
22. **1868.** Mort de *J. Plücker*, à Bonn.
23. **1857.** Mort de *Cauchy*, à Sceaux.
24. **1543.** Mort de *Copernic*, à Frauenburg.
25. **1843.** Mort de *S. F. Lacroix*, à Paris.
26. **1667.** Naissance de *A. Moivre*, à Vitry.
27. **1666.** Naissance de *C. A. Bretschneider*, à Schneeberg, en Silésie.

28. 1670. Naissance de *J. Riccati*, à Venise.
29. 1841. Naissance de *H. Gylden*, à Helsingfors.
30. 1814. Naissance de *E. Catalan*, à Bruges.
1832. Mort de *E. Galois*, à Paris.
31. 1875. Mort de *G. Friedlein*, à Hof.

QUELQUES THÉORÈMES DE STEINER.

par M. Cl. Servais,

(*Suite et fin;* voir p. 90).

14. Soient (S) une conique circonscrite au triangle ABC et relative à un point donné S; D un point mobile sur cette courbe; a_1, b_1, c_1, d_1, les tangentes à la courbe (S) aux points A, B, C, D; A′, B′, C′ les points diagonaux (AD, BC), (BD, AC), (CD, AB) du quadrangle inscrit ABCD. Les côtés du triangle A′B′C′ sont les droites diagonales du quadrilatère circonscrit $a_1b_1c_1d_1$ et passent respectivement par les points $A_1 \equiv (b_1c_1)$, $B_1 \equiv (c_1a_1)$, $C_1 \equiv (a_1b_1)$, fixes quand D se déplace sur (S). L'axe d'homologie des triangles ABC et A′B′C′ est la polaire trilinéaire d du point D par rapport au triangle ABC; le point D étant situé sur (S), cet axe d'homologie passe par le point fixe S (2).

15. Lorsque D se meut sur la conique (S), les côtés $a' \equiv B'C'$, $b' \equiv C'A'$, $c' \equiv A'B'$ du triangle A′B′C′ décrivent autour des points fixes A_1, B_1, C_1 trois faisceaux (a'), (b'), (c') projectifs entre eux.

Si A_2', B_2', C_2' désignent les points à l'infini des côtés B′C′, C′A′, A′B′, et A_2, B_2, C_2 leurs milieux, on a :

$$(a') \overline{\wedge} A(A_2'), \qquad (b') \overline{\wedge} B(B_2'), \qquad (c') \overline{\wedge} C(C_2')$$
$$A(A_2') \overline{\wedge} A(A_2), \quad B(B_2') \overline{\wedge} B(B_2), \quad C(C_2') \overline{\wedge} C(C_2)$$

par suite les faisceaux $A(A_2)$, $B(B_2)$, $C(C_2)$ sont projectifs.

On remarquera que si les points A et A_2 coïncidaient, le rayon AA_2 resterait déterminé, car il est toujours le conjugué harmonique de AA_2' relativement aux deux côtés AB et AC du triangle fixe ABC. Cela étant, soient s la polaire du point S par rapport à la courbe (S), et S_1, S_2, S_3 les points où elle coupe les côtés BC, CA, AB du triangle ABC; AS_1, BS_2, CS_3 sont les tangentes à (S) aux points A, B, C (1) et pour les positions particulières A, B, C du point mobile D, les ternes correspon-

dants AA_2, BB_2, CC_2 concourent respectivement aux milieux des segments AS_1, BS_2 CS_3. Ces milieux sont sur la médiane du quadrilatère formé par les côtés du triangle ABC et la droite s. De la projectivité des faisceaux $A(A_2)$, $B(B_2)$, $C(C_2)$ résulte qu'un terne AA_2, BB_2, CC_2 correspondant à une position arbitraire du point D sur la conique (S) concourt en un point P de cette médiane.

Les numéros 14 et 15 établissent le théorème suivant dû à Steiner : D *étant un point quelconque d'une conique* (S) *circonscrite au triangle* ABC, *on mène les droites* AD, BD, CD *qui coupent respectivement* BC, CA, AB *aux points* A', B', C'. *Les côtés du triangle* A'B'C' *et l'axe d'homologie des triangles* ABC, A'B'C' *passent par des points fixes, et les droites joignant* A, B, C *respectivement aux milieux* A_2, B_2, C_2 *des droites* B'C', C'A', A'B' *concourent en un point* P *qui parcourt une droite* (*Mathesis*, 1904, p. 264, Question 1493).

16. La polaire du point A_2 situé sur B'C', par rapport à la conique (S), passe par le point A', pôle de B'C' relativement à la même courbe. L'égalité $(B'C'A'_2A_2) = -1$ donne $(b'c'a'_2a_2) = -1$, a'_2 et a_2 étant les polaires des points A'_2 et A_2.

La droite a'_2 étant un diamètre de (S), a_2 est la polaire du centre de la courbe (S) par rapport à l'angle A'. La droite a_2 coupe d'ailleurs la tangente a_1 au pôle de la droite AA_2 par rapport à (S). La droite AA_2 et ses analogues BB_2, CC_2 étant concourantes, on a la propriété :

Les polaires du centre de la conique (S) *par rapport aux angles* A', B', C' *du triangle* A'B'C', *coupent respectivement les tangentes* a_1, b_1, c_1 *menées aux points* A, B, C *en trois points en ligne droite. Cette droite passe par le pôle de la médiane du quadrilatère* ABCs, *relativement à la courbe* (S).

17. Dans le quadrilatère circonscrit $a_1b_1c_1d_1$, variable avec la tangente d_1, les sommets A', B', C' du triangle diagonal décrivent respectivement les droites fixes BC, CA, AB. Le centre d'homologie D_1 des trilatères $a_1b_1c_1$ et $a'b'c'$, figures réciproques par rapport à (S) des triangles ABC et A'B'C', est le pôle relativement à la même courbe, de l'axe d'homologie d de ces derniers triangles. La droite d passant par le point S (**14**), le centre d'homologie D_1 appartient à la droite fixe s.

18. Soient S'_1, S'_2, S'_3 les points $(a's)$, $(b's)$, $(c's)$; on a :

$$(S_2S_1S'_1D_1) = (S_2BA_1C_1).$$

Car ces ponctuelles sont les sections d'un même faisceau de centre C'.

La droite BB_1 étant la polaire du point S_2 par rapport à (S), les tangentes B_1A_1 et B_1C_1 sont séparées harmoniquement par le point S_2 et sa polaire B_1B; donc

$$(S_2S_3S'_1D_1) = (S_2BA_1C_1) = -1.$$

Par suite : *Les côtés des triangles* ABC, A'B'C' *coupent la droite s suivant les ternes de points* (S_1, S_2, S_3), (S'_1, S'_2, S'_3); *le centre d'homologie* D_1 *des trilatères* $a_1b_1c_1$, $a'b'c'$ *est le conjugué harmonique des points* S'_1, S'_2, S'_3 *pris respectivement par rapport aux couples* S_2S_3, S_3S_1, S_1S_2.

1°. La droite AD_1 coupe B'C' au conjugué S''_1 du point S'_1 par rapport au couple B'C', car on a

$$(B'C'S'_1S''_1) = (S_2S_3S'_1D_1) = -1.$$

Ce point S''_1 est donc le pôle de la droite s par rapport au couple de points B'C'. Par suite : *Les droites joignant les sommets* A, B, C *aux pôles de la droite s relativement aux couples* B'C', C'A', A'B' *passent par le centre d'homologie des trilatères* $a_1b_1c_1$, $a'b'c'$.

Corrélativement : *Les polaires du point* S *relativement aux angles* A', B', C' *coupent respectivement les tangentes* a_1, b_1, c_1 *en trois points de l'axe d'homologie des triangles* ABC, A'B'C'.

2°. Soient A_2, B_2, C_2 trois points fixes choisis respectivement sur les côtés a_1, b_1, c_1 du triangle $a_1b_1c_1$ circonscrit à la conique (S) et tels que les droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 soient concourantes; les six points A, B, C, A_2, B_2, C_2 seront situés sur une conique Σ. Lorsque le point D se meut sur la courbe (S), les points A', B', C' décrivent sur BC, CA, AB trois ponctuelles projectives; par suite les faisceaux A_2 (A'), B_2(B'), C_2(C') sont projectifs. Pour les positions particulières A, B, C du point mobile D, les ternes de rayons correspondants A_2A', B_2B', C_2C' concourent respectivement en A, B, C; donc les trois faisceaux projectifs A_2(A'), B_2(B') C_2(C') engendrent la conique Σ, et pour une position quelconque du point D sur la courbe (S), le terne A_2A', B_2B', C_2C' est formé de trois droites concourantes. On a ainsi la propriété : *Soient* $A_1B_1C_1$ *un triangle circonscrit à une conique* (S), A, B, C *les points de contact,* A_2, B_2, C_2 *trois points pris respectivement sur les côtés* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 *et tels que les droites* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *soient concourantes.* D *étant un point mobile sur la courbe* (S), *on mène les droites* AD, BD, CD, *qui coupent respectivement* BC, CA, AB *aux points* A', B', C'. *Les droites* A_2A', B_2B', C_2C' *concourent en un point de la conique* Σ *passant par les six points* A_2, B_2, C_2, A, B, C.

REMARQUE. Si A, B, C sont les milieux des côtés du triangle $A_1B_1C_1$ la conique (S) est l'ellipse de Steiner de ce triangle ; si $A_2B_2C_2$ sont les pieds des hauteurs du triangle $A_1B_1C_1$, la conique Σ est le cercle des neuf points ; on a ainsi une propriété de l'ellipse de Steiner et du cercle des neuf points du triangle $A_1B_1C_1$.

PRO DOMO.

Le point de Kariya.

L'*Enseignement mathématique* de mars 1904 (pp. 130-132) a inséré, sous la signature J. Kariya (Tokio), un article intitulé *Un théorème sur le triangle* et débutant en ces termes :

« Voici un théorème que je crois nouveau ; il comprend comme cas « particulier des théorèmes déjà connus :

« THÉORÈME. Inscrivons un cercle O dans un triangle donné ABC ; « nommons respectivement X, Y, Z les points de contact avec les trois « côtés BC, CA, AB. Si l'on prend sur les droites OX, OY, OZ des points « D, E, F également distants du point O, les trois droites AD, BE, CF « concourent en un même point que je me permettrai d'appeler *Point de « Kariya.* »

L'auteur donne ensuite une démonstration assez compliquée de *son* théorème et fait ressortir les cas particuliers $OD = \infty$, $OD = OX$, $OD = -OX$.

L'*Enseignement mathématique* (1904, pp. 236-239 et 406-411) a également publié plusieurs communications qui lui ont été adressées au sujet du *nouveau théorème* par MM. X (Paris), Cantoni (Viadana), Demoulin (Gand), Harold Hilton (Bangor), Barbarin (Bordeaux), P. Faure (Paris), Francke (Berlin) et Houssais (Roanne). La démonstration de M. Harold Hilton, qui considère les triangles ABC, DEF comme polaires réciproques par rapport à un certain cercle de centre O, me paraît être nouvelle ; nous l'appliquerons à une question plus générale dans l'article *Sur les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle.* Les autres correspondants de l'*Enseignement* s'occupent de la courbe décrite par le point de Kariya lorsque la distance OD varie, et signalent des points analogues relatifs aux cercles exinscrits ou circonscrit.

Fait assez curieux, aucune mention n'a été faite des travaux antérieurs sur la même question et dont une bonne partie a paru dans *Mathesis*. Je vais combler cette lacune.

M. Lemoine (AFAS, Paris, 1889, p. 202) abaisse d'un point quelconque M les perpendiculaires MX, MY, MZ sur les côtés BC, CA, AB du triangle ABC et prend sur ces droites les longueurs MA_1, MB_1, MC_1 inversement proportionnelles à MX, MY, MZ. Il observe que les droites AA_1, BB_1, CC_1 concourent en un point L qui parcourt l'hyperbole équilatère ABCM; que le centre de cette courbe est le point de contact du cercle des neuf points de ABC avec un cercle tritangent lorsque M est le centre I, I', I'', I''' d'un tel cercle. A cause de cette dernière propriété, j'ai proposé la dénomination d'*hyperbole de Feuerbach* pour l'hyperbole équilatère ABCI.

M. Boutin (JMS, 1890, pp. 104 et 128) étudie les hyperboles équilatères ABCI, ABCI', ABCI'', ABCI''' comme transformées isogonales des droites OI, OI', OI'', OI''' et aussi comme lieux des points de Kariya.

Dans un article de *Mathesis* (1893, pp. 81-89) que j'ai rédigé en grande partie d'après une note manuscrite de M. Mandart, l'hyperbole équilatère ABCI est le lieu du centre d'orthologie du triangle ABC et d'un triangle variable $A_2B_2C_2$ qu'on obtient en portant sur les médiatrices OA', OB', OC' du triangle ABC, à partir des milieux A', B', C' des côtés, trois longueurs égales (variables) $A'A_2 = B'B_2 = C'C_2$.

Enfin, M. Speckman (*Mathesis*, 1903, pp. 265-270) part du théorème de M. Kariya et étudie comme MM. Boutin et Mandart, quelques involutions remarquables sur l'hyperbole équilatère ABCI.

(J. N.).

SUR LES HYPERBOLES ÉQUILATÈRES CIRCONSCRITES A UN TRIANGLE,

par J. Neuberg.

1. Proposons-nous de *trouver le lieu du centre d'homologie* L *d'un triangle fixe* ABC *et de son polaire* $A_1B_1C_1$ *par rapport à un cercle de centre fixe* M *et de rayon variable* ρ.

Pour trouver les pôles des côtés de ABC, nous abaissons de M sur

ces côtés les perpendiculaires $MX = \alpha$, $MY = \beta$, $MZ = \gamma$ et nous prenons sur MX, MY, MZ les distances

$$MA_1 = \frac{\rho^2}{\alpha}, \quad MB_1 = \frac{\rho^2}{\beta}, \quad MC_1 = \frac{\rho^2}{\gamma}.$$

Si l'on mène A_1U, A_1V respectivement perpendiculaires à AC, AB et qu'on projette le contour A_1MY sur A_1U, le contour A_1MZ sur A_1V, on voit que les coordonnées normales absolues de A_1 sont

$$\alpha - \frac{\rho^2}{\alpha}, \quad \beta + \frac{\rho^2}{\alpha}\cos C, \quad \gamma + \frac{\rho^2}{\alpha}\cos B;$$

en les multipliant par α on peut prendre pour les coordonnées relatives de A_1 :

$$\lambda_{11} = \alpha^2 - \rho^2, \quad \lambda_{12} = \alpha\beta + \rho^2\cos C, \quad \lambda_{13} = \alpha\gamma + \rho^2\cos B.$$

Par analogie, les coordonnées relatives des points B_1, C_1 sont :

$$\lambda_{21} = \beta\alpha + \rho^2\cos C, \quad \lambda_{22} = \beta^2 - \rho^2, \quad \lambda_{23} = \beta\gamma + \rho^2\cos A,$$
$$\lambda_{31} = \gamma\alpha + \rho^2\cos B, \quad \lambda_{32} = \gamma\beta + \rho^2\cos A, \quad \lambda_{33} = \gamma^2 - \rho^2;$$

on observera que $\lambda_{21} = \lambda_{12}$, $\lambda_{23} = \lambda_{32}$, $\lambda_{13} = \lambda_{31}$.

Les droites AA_1, BB_1, CC_1 ayant pour équations

$$\frac{y}{\lambda_{12}} = \frac{z}{\lambda_{13}}, \quad \frac{z}{\lambda_{23}} = \frac{x}{\lambda_{21}}, \quad \frac{x}{\lambda_{31}} = \frac{y}{\lambda_{32}},$$

les coordonnées de leur point de concours L sont inversement proportionnelles à λ_{23}, λ_{31}, λ_{12}. En les désignant par x, y, z on peut écrire

$$\frac{k}{x} = \lambda_{23} = \beta\gamma + \rho^2\cos A,$$
$$\frac{k}{y} = \lambda_{31} = \gamma\alpha + \rho^2\cos B,$$
$$\frac{k}{z} = \lambda_{12} = \alpha\beta + \rho^2\cos C,$$

k étant un facteur de proportionnalité.

Eliminons k et ρ^2 ; il vient pour l'équation du lieu (L) :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{\alpha} & \cos A \\ \frac{1}{y} & \frac{1}{\beta} & \cos B \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{\gamma} & \cos C \end{vmatrix} = 0.$$

Les solutions (α, β, γ), $\left(\frac{1}{\cos A}, \frac{1}{\cos B}, \frac{1}{\cos C}\right)$ correspondent au point M et à l'orthocentre H de ABC; donc la courbe (L) est l'hyperbole équilatère ABCM.

On peut remarquer le théorème suivant, énoncé un peu différemment par M. Lemoine :

A, B, C, M *étant quatre points quelconques d'une hyperbole équilatère, le centre d'homologie du triangle* ABC *et de son polaire par rapport à un cercle de centre* M *et de rayon quelconque est situé sur l'hyperbole.*

2. Appelons M' l'inverse (conjugué isogonal) de M par rapport au triangle et soient $M'X' = \alpha'$, $M'Y' = \beta'$, $M'Z' = \gamma'$ ses coordonnées normales absolues. Comme on a $\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'$, les droites MA_1, MB_1, MC_1 sont parallèles et proportionnelles à M'X', M'Y', M'Z' et, par suite, le triangle $A_1B_1C_1$ est homothétique à X'Y'Z'; de plus ses côtés sont perpendiculaires à MA, MB, MC.

On peut considérer d'autres séries de triangles conduisant à l'hyperbole équilatère ABCM. En effet, prenons sur les droites M'X', M'Y', M'Z' des longueurs $X'A_2 = \mu.HA$, $Y'B_2 = \mu.HB$, $Z'C_2 = \mu.HC$, μ étant un facteur variable. Les triangles ABC, $A_2B_2C_2$ étant orthologiques, les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 concourent en un même point L_1. Comme elles sont des rayons homologues de trois faisceaux projectifs (*), leur intersection L_1 décrit une conique passant par A, B, C. Le point M est la position de L_1 qui correspond à $\mu = 0$. A l'hypothèse $\mu = \infty$ correspond l'orthocentre H; car lorsque μ augmente indéfiniment, les rapports $M'A_2 : M'B_2$, $M'A_2 : M'C_2$ ont pour limites HA : HB, HA : HC, de sorte que le triangle $A_2B_2C_2$ tend à devenir homothétique à ABC. Il en résulte que la courbe (L_1) se confond avec la courbe (L).

3. Sur les médiatrices OA', OB', OC', à partir des milieux A', B', C' de BC, CA, AB, portons les longueurs $A'A_3 = \nu \cdot M'X'$, $B'B_3 = \nu \cdot M'Y'$, $C'C_3 = \nu \cdot M'Z'$, ν étant un facteur variable. Les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur les droites B_3C_3, C_3A_3, A_3B_3 concourent en un même point L_2. Comme aux hypothèses $\nu = 0$, $\nu = \infty$ correspondent

(*) Une parallèle menée par un point fixe à la droite B_2C_2 qui unit des points homologues de deux ponctuelles semblables, engendre un faisceau qui est projectif avec ces deux ponctuelles.

les positions H et M de L_2, le point L_2 décrit une conique passant par A, B, C, H, M, c'est à-dire la courbe (L).

4. Cherchons encore l'enveloppe de l'axe d'homologie l des triangles ABC, $A_1B_1C_1$ (§ 1). Si nous désignons par L_{11}, L_{12}, ... les mineurs du déterminant des coordonnées des points A_1, B_1, C_1 :

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{vmatrix},$$

les équations des droites B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sont

$$L_{11}x + L_{12}y + L_{13}z = 0,$$
$$L_{21}x + L_{22}y + L_{23}z = 0,$$
$$L_{31}x + L_{32}y + L_{33}z = 0,$$

de sorte que les points de rencontre de ces droites avec BC, CA, AB vérifient les équations

$$\frac{y}{L_{13}} + \frac{z}{L_{12}} = 0, \quad \frac{x}{L_{23}} + \frac{z}{L_{21}} = 0, \quad \frac{x}{L_{31}} + \frac{y}{L_{32}} = 0.$$

Ces points sont situés sur la droite

$$\frac{x}{L_{23}} + \frac{y}{L_{31}} + \frac{z}{L_{12}} = 0.$$

Appelons u, v, w les coordonnées de cette droite et posons

$$-\alpha\cos A + \beta\cos B + \gamma\cos C = \alpha_1, \quad \alpha\cos A - \beta\cos B + \gamma\cos C = \beta_1, \ldots;$$

nous aurons

$$\frac{K}{u} = L_{23} = R^2(\alpha\alpha_1 + \beta\gamma) + R^4 \sin B \sin C, \quad \ldots,$$

K étant un facteur de proportionnalité. On en conclut l'équation de l'enveloppe de la droite l :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{u} & \frac{1}{\sin A} & \alpha\alpha_1 + \beta\gamma \\ \frac{1}{v} & \frac{1}{\sin B} & \beta\beta_1 + \gamma\alpha \\ \frac{1}{w} & \frac{1}{\sin C} & \gamma\gamma_1 + \alpha\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Cette enveloppe est une parabole inscrite au triangle ABC; c'est ce qu'on déduit de l'équation précédente qui admet la solution (sin A, sin B, sin C) caractérisant la droite à l'infini. On arrive à la même conclusion en observant que les droites B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 marquent respectivement sur BC, CA, AB trois ponctuelles semblables.

Il se présente encore plusieurs questions intéressantes, telles que les paraboles enveloppes des côtés des triangles $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$, le lieu du centre d'homothétie des triangles X'Y'Z' et $A_1B_1C_1$, etc. Mais nous arrêtons ici nos développements.

NOTES MATHÉMATIQUES.

8. PROBLÈME DE TRIGONOMÉTRIE. *Trouver l'équation qui donne* $\operatorname{tg}\frac{a}{3}$ *en fonction de* sin a. *Expliquer à priori la nature particulière de cette équation.*

Posons $\sin a = b$, $\operatorname{tg}\frac{a}{3} = x$; en remplaçant dans la formule

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a,$$

sin $3a$ par b, sin a par $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, on trouve

$$(1-b^2)\,x^6 - 3(2+b^2)\,x^4 + 3(3-b^2)\,x^2 - b^2 = 0. \qquad (1)$$

L'équation doit être du sixième degré; car elle doit donner toutes les valeurs de $\operatorname{tg}\frac{a}{3}$ pour toutes les valeurs de a qui correspondent à sin $a = b$ et qui sont $2n\pi + \alpha$, $(2n+1)\pi - \alpha$, α étant le plus petit arc ayant pour sinus b. En faisant $n = 3n' + r$, r ayant les valeurs 0, 1, 2, on trouve les six valeurs distinctes

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}, \quad x_2 = \operatorname{tg}\frac{2\pi+\alpha}{3}, \quad x_3 = \operatorname{tg}\frac{4\pi+\alpha}{3}, \\ x_4 &= \operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{3}, \quad x_5 = \operatorname{tg}\frac{3\pi-\alpha}{3}, \quad x_6 = \operatorname{tg}\frac{5\pi-\alpha}{3}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Les arcs qui entrent dans x_1 et x_3, dans x_2 et x_4 sont supplémentaires; ceux qui entrent dans x_3 et x_6 ont pour somme 3π. Il en résulte que $x_3 = -x_1$, $x_4 = -x_2$, $x_6 = -x_3$, ce qui explique que l'équation (1) ne renferme que des puissances paires de x.

Sur le cercle trigonométrique, les extrémités des arcs qui entrent dans les formules (2), sont les sommets de deux triangles équilatéraux symétriques par rapport au second diamètre BB'.

Le coefficient de x^6 est $1 - b^2$, de manière qu'il s'annule pour $b = \pm 1$. $x = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ et que l'équation (1) admet deux racines infinies

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le tableau (2) donne

$$x_1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -x_5 = -x_2 = x_4, \quad x_3 \text{ et } x_6 = \infty, \tag{3}$$

et l'équation (1) se réduit à

$$-9x^4 + 6x^2 - 1 = 0;$$

on trouve donc un carré parfait, ce qui devait être d'après les résultats (3). On examinerait de même les hypothèses $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$, dont les deux dernières correspondent à $b = 0$. (G. Delahaye).

9. *Sur la question proposée* 1466 (*Mathesis*, p. 18).

Aux relations indiquées on peut ajouter les suivantes :

$$\cos\tfrac{1}{2}(B - C)\sin\tfrac{1}{2}A = \cos^2\tfrac{1}{2}A, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B\cos B = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C\cos C,$$

$$\cos C = \frac{p-a}{p-b}, \quad \cos B = \frac{p-a}{p-c}, \quad \sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{a}{2p}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{2R}{p} = \frac{a}{2R+r}, \quad \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} = \frac{2R-r}{r},$$

$$a = r\operatorname{tg}A, \quad b = r'''\operatorname{tg}B, \quad c = r''\operatorname{tg}C,$$

$$\frac{r}{2R} = \frac{p-a}{p}, \quad \frac{a}{p} = 1 - \frac{r}{2R}, \quad \frac{b+c}{a} = \frac{2R+r}{2R-r},$$

$$a^2 + r^2 = 4R^2, \quad (2R+r)^2 = a(b+c),$$

$$2R + r = r'' + r''', \quad abc = 2p(p-b)(p-c),$$

$$S = 2R(p-a) = \sqrt{\frac{abc(p-a)}{2}}, \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{abc}{2(p-a)}}.$$

(E. N. Barisien).

On a : $abc = 2p(p-b)(p-c)$. Le pied de la symédiane issue de I dans le triangle IBC est aussi le pied de la hauteur AA' du triangle AEC.

(Emmerich).

Des formules :

$$\cos B + \cos C - \cos A = 1$$

$$r = 2R\cos A = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}, \quad r'' = 2R\cos C, \quad r''' = 2R\cos B,$$

on déduit

$$(r'' - r)(r''' - r) = 4R^2(\cos C - \cos A)(\cos B - \cos A)$$

$$= 4R^2(1 - \cos B)(1 - \cos C) = 16R^2\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} = \frac{r^2}{\sin^2\frac{A}{2}} = \overline{AI}^2.$$

La relation

$$\cos\tfrac{1}{2}(B - C)\sin\tfrac{1}{2}A = \cos^2\tfrac{1}{2}A$$

montre que l'on doit avoir

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A < \sin\tfrac{1}{2}A \quad \text{ou} \quad \sin^2\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2} - 1 > 0,$$

donc

$$\sin\frac{A}{2} > \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \quad \text{ou} \quad > 2\sin 18^\circ. \qquad \text{(A. C)}$$

La relation

$$\frac{a}{p - a} = \frac{b}{p - b} + \frac{c}{p - c}$$

se transforme en

$$a^3 + a^2(b + c) - a(b + c)^2 - (b + c)(b - c)^2 = 0.$$

Considérons b et c comme donnés et a comme inconnu. L'équation ayant une seule variation a une seule racine positive. Si l'on remplace a par $b + c$ et par $b - c$, le premier membre prend des valeurs de signes contraires; donc il existe toujours un triangle satisfaisant à la question, quels que soient les côtés b et c. (J. N.).

10. *Le théorème de Ménélaus en géométrie générale.* Nous savons qu'en géométrie euclidienne ou non euclidienne, les circonférences décrites sur les côtés d'un triangle comme rayons sont entre elles comme les sinus des angles opposés. Désignons par (R) une circonférence de rayon R. Soit ABC un triangle dont les côtés AB, BC, CA sont coupés par une transversale en F, D, E. On aura dans les triangles BFD, CDE, AEF :

$$\frac{(BF)}{(BD)} = \frac{\sin D}{\sin F}, \quad \frac{(CD)}{(CE)} = \frac{\sin E}{\sin D}, \quad \frac{(AE)}{(AF)} = \frac{\sin F}{\sin E},$$

d'ou, en multipliant ces égalités,

$$\frac{(BF).(CD).(AE)}{(BD).(CE).(AF)} = 1.$$

(Extrait d'une lettre de M. le Dr. VENTURA Y REYES).

11. *Sur les triangles autopolaires par rapport à une ellipse.* M. ORASĂNU (Bukarest) nous a adressé la question suivante pour être proposée aux lecteurs du *Mathesis :*

Chercher le lieu des sommets des triangles équilatéraux conjugués à une conique.

Cette question et le problème de l'enveloppe des côtés et du lieu des centres des triangles ont été traités par M. H. SCHOUTE dans les *Wiskundige Opgaven*, tome VIII, page 230, et par M. R. A. ROBERTS dans l'ouvrage *A Collection of Examples and Problems on Conics and some higher plane Curves*. La question plus générale des triangles autopolaires de forme donnée a été résolue par M. ZEEMAN (*Wiskundige Opgaven*, t. VIII, p. 232). (J. N.).

SUR LES SOLUTIONS ENTIÈRES ET POSITIVES DE L'ÉQUATION

$$ax + by + cz = d.$$

par E. BARBETTE (Liège).

Nous considérons le cas où deux des coefficients des inconnues, a et b par exemple, sont premiers entre eux ; nous supposons aussi que les coefficients a, b, c et d sont positifs.

Soit $x = \alpha$, $y = \beta$ une solution particulière et entière de l'équation

$$ax + by = 1.$$

Les solutions entières de l'équation proposée

$$ax + by = d - cz$$

sont données par les formules

$$x = \alpha(d - cz) + b\theta, \quad y = \beta(d - cz) - a\theta.$$

Par suite, les solutions entières et positives de la dite équation sont fournies par les valeurs de z et de θ satisfaisant aux inéquations :

$$d - cz > 0 \quad \text{avec} \quad z > 0,$$
$$\alpha(d - cz) + b\theta > 0, \quad \beta(d - cz) - a\theta > 0$$

c'est-à-dire

$$0 < z < \frac{d}{c} \quad \text{et} \quad -\frac{\alpha}{b}(d - cz) < \theta < \frac{\beta}{a}(d - cz).$$

De l'égalité $ax + b\beta = 1$, nous tirons $\frac{\beta}{a} = -\frac{\alpha}{b} + \frac{1}{ab}$; en sorte que les dernières inéquations se transforment en

$$-\frac{\alpha}{b}(d - cz) < \theta < -\frac{\alpha}{b}(d - cz) + \frac{d - cz}{ab}.$$

Si d est divisible par c et si $\frac{d}{c} = q$, on donnera à z les valeurs 1, 2, 3, . . , $(q - 1)$; si d n'est pas divisible par c et si $\frac{d}{c} = q + \frac{r}{c}$, on donnera à z les valeurs $1, 2, 3, \ldots, q$: à chaque valeur de z correspondront des limites de θ.

Nous nous proposons de déterminer a priori, dans certains cas, le *nombre* de solutions entières et positives.

1er Cas : *d et c sont divisibles par ab.*

Soient $\frac{d}{ab} = k$ et $\frac{c}{ab} = h$; observons qu'alors, pour toute valeur de z, le nombre $-\frac{\alpha}{b}(d - cz)$ que nous désignerons par M_z est entier.

1° Si $\frac{d}{c} = q$, on a

$$M_z < \theta < M_z + (k - hz) \quad \text{avec} \quad z \leqq q - 1.$$

Selon que

$$z = 1, 2, 3, \ldots, (q - 1),$$

on aura

$$k - h - 1, \quad k - 2h - 1, \quad k - 3h - 1, \ldots, \quad k - (q - 1)h - 1,$$

solutions positives ; donc, au total, un nombre de solutions positives donné par

$$N = \tfrac{1}{2}[(k - h - 1) + k - (q - 1)h - 1](q - 1)$$
$$= \tfrac{1}{2}(2k - qh - 2)(q - 1) \quad \text{ou} \quad \frac{(d - 2ah)(d - c)}{2abc}.$$

Par exemple, l'équation $2x + 3y + 12z = 36$ n'admettra que 4 solutions entières et positives.

2° Si $\frac{d}{c} = q + \frac{r}{c}$, on a

$$M_z < \theta < M_z + (k - hz) \quad \text{avec} \quad z \leqslant q.$$

Selon que

$$z = 1, 2, 3, \ldots, q,$$

on aura

$$k - h - 1, \quad k - 2h - 1, \quad k - 3h - 1, \ldots, \quad k - qh - 1,$$

solutions positives; donc, au total, un nombre de solutions positives donné par

$$N = \tfrac{1}{2}[(k - h - 1) + (k - qh - 1)]\, q$$
$$= \tfrac{1}{2}[2k - (q + 1)h - 2]\, q.$$

Par exemple, l'équation $2x + 3y + 12z = 42$ n'admettra que 6 solutions entières et positives.

2ᵈ CAS : *d est divisible par l'un des coefficients de x ou y, par b par exemple, et c est divisible par ab.*

Soient $\frac{d}{ab} = k + \frac{r'}{ab}$ et $ab = h$; observons que, pour toute valeur de z, $-\frac{a}{b}(d - cz)$ est un nombre entier M_z.

Par hypothèse, d ne pouvant plus être divisible par c, posons $\frac{d}{c} = q + \frac{r}{c}$; en sorte que

$$M_z < \theta < M_z + (k - hz) + \frac{r'}{ab} \quad \text{avec} \quad z \leqslant q.$$

Selon que

$$z = 1, 2, 3, \ldots, q,$$

on aura

$$k - h, \quad k - 2h, \quad k - 3h, \ldots, \quad k - qh,$$

solutions positives donné par

$$N = \tfrac{1}{2}[(k - h) + (k + qh)]\, q$$
$$= \tfrac{1}{2}[2k - (q + 1)h]\, q.$$

Par exemple, l'équation $2x + 3y + 12z = 39$ n'admettra que 6 solutions entières et positives.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1997.

(Voir *Mathesis*, (2) X, p. 275 et (3) V, p. 32).

On donne dans un même plan deux droites AB, A'B'. *Soient* M, M' *deux points mobiles sur ces droites sous la condition*

$$MA.MB = M'A'.M'B';$$

quelle est l'enveloppe de la droite MM'? *Trouver géométriquement le point de contact de* MM' *avec l'enveloppe.* (J. NEUBERG).

Solution par M. L. MEURICE. La condition imposée dans la question peut s'écrire

$$(MA + MB)^2 - (MA - MB)^2 = (M'A' + M'B')^2 - (M'A' - M'B')^2$$

ou

$$(MA - MB)^2 - (M'A' - M'B')^2 = \overline{AB}^2 - \overline{A'B'}^2,$$

et en appelant α et α' les distances des points M et M' aux milieux I et I' de AB t de A'B', l'équation précédente prend la forme :

$$\alpha^2 - \alpha'^2 = K^2. \qquad (1)$$

K désignant une quantité constante.

Si l'on adopte les droites AB et A'B' respectivement pour axe des x et pour axe des y, en appelant a l'abscisse du point I et a' l'ordonnée de I', la droite MM' sera représentée par l'équation

$$\frac{x}{a+\alpha} + \frac{y}{a'+\alpha'} = 1 \quad \text{ou} \quad ux + vy + 1 = 0.$$

On trouve aisément :

$$\alpha = -\frac{1}{u} - a, \quad \alpha' = -\frac{1}{v} - a',$$

et par substitution dans l'équation (1), on obtient comme équation de l'enveloppe, en coordonnées tangentielles :

$$\left(\frac{1}{u} + a\right)^2 - \left(\frac{1}{v} + a'\right)^2 = K^2.$$

2. Pour déterminer le point de contact de la droite MM' avec son enveloppe, nous établirons que les vitesses des deux points M et M' sont inversement proportionnelles aux distances α et α' de ces points aux milieux I et I' des segments AB et A'B'.

Considérons un segment OA = K et la perpendiculaire AZ à OA. Portons sur AZ une longueur AP = α'; on aura OP = α : les vitesses de glissement du point P sur OP et sur AZ seront égales aux vitesses de M et de M'. Or, nous pouvons représenter la vitesse de P par le segment PA ; cette vitesse peut se décomposer en une vitesse de glissement sur OP et une vitesse de circulation autour de O : la première de ces vitesses composantes sera représentée par la projection PQ de PA sur OP. Comme $\overline{PA}^2 = PO \times PQ$, on a bien

$$\frac{PQ}{\alpha'} = \frac{PA}{\alpha}. \qquad (2)$$

Les vitesses des points M et M' pourront donc se représenter par des segments MC et M'C' égaux respectivement à I'M' et IM. Il suffit dès lors d'appliquer une construction connue : projeter C et C' sur les perpendiculaires élevées en M et en M' sur MM', joindre les projections D et D' ainsi obtenues par une droite dont l'intersection avec MM' sera le point de contact demandé.

On peut établir aisément par le calcul différentiel que les vitesses des points M et M' sont inversement proportionnelles à α et α'.

En effet, l'équation (1) donne par différentiation :

$$\alpha . d\alpha = \alpha' . d\alpha'$$

et comme dx et dx' sont proportionnels aux vitesses des points M et M', la proposition est établie.

Solution partielle par M. Abramescu.

Question 1311.

(Voir *Mathesis*, (3) I ; p. 88).

Soient M *un point mobile sur une conique donnée,* C *le centre de courbure correspondant. Trouver l'enveloppe du cercle de centre* M *et de rayon* MC. (E. N. Barisien).

Note de M. H. Brocard. D'une manière générale, soit à trouver l'enveloppe d'un cercle dont le centre M (α, β) parcourt une courbe donnée Σ et dont le rayon R varie suivant une loi donnée. Nous supposons que α, β, R soient des fonctions données d'un même paramètre t. L'équation du cercle variable sera

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2, \qquad (1)$$

et l'enveloppe s'obtiendra en éliminant t entre l'équation (1) et sa différentielle par rapport à t :

$$(x-\alpha)d\alpha+(y-\beta)d\beta+\mathrm{R}d\mathrm{R}=0. \qquad (2)$$

La normale à la courbe Σ ayant pour équation

$$(x-\alpha)d\alpha+(y-\beta)d\beta=0, \qquad (3)$$

les points de contact du cercle (1) avec son enveloppe se trouvent sur la droite (2) qui est parallèle à la normale.

La distance du point M (α, β) à la droite (2) est

$$\mathrm{R}_1=\frac{\mathrm{R}d\mathrm{R}}{\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}}=\frac{\mathrm{R}d\mathrm{R}}{ds},$$

ds étant la différentielle de l'arc de Σ au point M.

Supposons que R soit le rayon de courbure de Σ au point M ; alors R_1 sera le rayon de courbure en C à la développée de Σ (Ribaucour, N. C. M., t. V, 1879, p. 258). En effet, ce rayon de courbure a pour expression $\frac{ds_1}{\varepsilon}$; ds_1 est la différentielle de l'arc de la développée ou $d\mathrm{R}$, et ε est l'angle de contingence à cette courbe en C, égal à celui de la courbe Σ en M ou égal à $\frac{ds}{\mathrm{R}}$.

Si l'on résout les équations (1) et (2) par rapport à $x-\alpha$ et $y-\beta$, on obtient les *formules paramétriques* de l'enveloppe :

$$x-\alpha=\mathrm{R}\frac{-d\alpha.d\mathrm{R}\pm d\beta\sqrt{ds^2-d\mathrm{R}^2}}{ds^2},$$

$$y-\beta=\mathrm{R}\frac{-d\beta.d\mathrm{R}\mp d\alpha\sqrt{ds^2-d\mathrm{R}^2}}{ds^2}.$$

Prenons pour la courbe Σ une ellipse ; les équations (1) et (2) seront

$$(x-a\cos t)^2+(y-b\sin t)^2=\frac{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}{a^2b^2}$$

$$(x-a\cos t)\,a\sin t-(y-b\sin t)\,b\cos t$$

$$=\frac{3(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^2c^2\sin t\cos t}{a^2b^2}.$$

L'élimination de t paraît des plus compliquées; le résultat renfermera probablement des facteurs étrangers.

La complication n'est pas moindre quand on prend pour Σ la parabole $y^2 = 2px$.

Questions 1443.

(Voir *Mathesis*, (3), III, p. 264).

Trouver l'enveloppe d'une circonférence dont le centre décrit un limaçon de Pascal et qui passe constamment par le pôle de cette courbe. Cas particulier de la cardioïde. (E. N. Barisien).

Solution par M. Emmerich. L'équation du limaçon de Pascal étant $r = a\cos\theta + b$, celle de la circonférence variable est

$$\rho = 2(a\cos\theta + b)\cos(\omega - \theta),$$

où ρ et ω sont les coordonnées courantes et θ un paramètre variable; on peut l'écrire ainsi :

$$\rho - a\cos\omega = a\cos(\omega - 2\theta) + 2b\cos(\omega - \theta). \qquad (1)$$

D'après la théorie des enveloppes, on doit éliminer θ entre l'équation (1) et sa dérivée par rapport à θ :

$$0 = 2a\sin(\omega - 2\theta) + 2b\sin(\omega - \theta). \qquad (2)$$

En isolant les termes en b, puis faisant la somme des carrés, on trouve

$$3a^2\cos^2(\omega - 2\theta) + 2ap\cos(\omega - 2\theta) - (p^2 + 4a^2 - 4b^2) = 0, \qquad (3)$$

où p est écrit pour $\rho - a\cos\omega$. Cette équation donne

$$\cos(\omega - 2\theta) = \frac{-p \pm 2\sqrt{p^2 + 3a^2 - 3b^2}}{3a};$$

en substituant cette valeur dans (1) il vient

$$\cos(\omega - \theta) = 2\,\frac{p \mp \sqrt{p^2 + 3a^2 - 3b^2}}{3a};$$

d'où l'on déduit la valeur de

$$\cos(2\omega - 2\theta) = 2\cos^2(\omega - \theta) - 1.$$

Il reste alors à remplacer

$$\alpha \text{ et } \beta \text{ par } 2\omega - 2\theta,\ \omega - 2\theta,$$

dans l'identité

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta) = \sin^2(\alpha-\beta).$$

Lorsqu'il s'agit d'une cardioïde, on a $a = b$ et l'équation du cercle variable est

$$\rho = 4a\cos^2\tfrac{1}{2}\theta\cos(\omega-\theta);$$

pour la dérivée par rapport à θ on obtient

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta\sin\left(\omega - \frac{3\theta}{2}\right) = 0.$$

La solution $\cos\frac{1}{2}\theta = 0$ correspond au pôle qui est un point isolé de la trajectoire; la solution $\omega - \frac{3\theta}{2} = 0$ donne pour l'enveloppe demandée

$$\rho = 4a\cos^3\tfrac{1}{3}\theta.$$

Solution par M. J. Déprez. Les coordonnées du centre du cercle mobile étant

$$\alpha = (a\cos\varphi + b)\cos\varphi,\quad \beta = (a\cos\varphi + b)\sin\varphi,$$

l'équation de ce cercle sera

$$ax\cos 2\varphi + ay\sin 2\varphi + bx\cos\varphi + by\sin\varphi - (x^2+y^2-ax) = 0.$$

Or, l'équation de l'enveloppe de la courbe ayant pour équation

$$A\cos 2\varphi + B\sin 2\varphi + C\cos\varphi + D\sin\varphi + E = 0,$$

est

$$[12(A^2+B^2) - 3(C^2+D^2) + 4E^2]^3$$
$$= [72(A^2+B^2)E + 9(C^2+D^2)E - 27(C^2-D^2)A - 54BCI) - 8E^3]^2;$$

en appliquant ce résultat au cas actuel on trouve un-cercle-point placé au pôle et une courbe du 8e degré (podaire du pôle par rapport à un limaçon).

Lorsque $a = b$, l'enveloppe proprement dite est la sextique

$$27a^2(x^2+y^2)^2 - 4(x^2+y^2+ax)^3 = 0.$$

Solution par M. Rose. L'enveloppe cherchée est le lieu des symétriques du pôle par rapport aux tangentes du limaçon; c'est donc une courbe semblable à la podaire du pôle.

Adoptons des coordonnées polaires et appelons (ρ_1, θ_1) les coordonnées d'un point M du limaçon, V l'angle de la tangente en M avec le rayon vecteur OM, (ρ, θ) les coordonnées du point correspondant de l'enveloppe; nous aurons

$$\rho_1 = a\cos\theta_1 + b, \quad \rho = 2\rho_1 \sin V, \quad \operatorname{tg} V = \frac{\rho_1}{\rho'_1} = \frac{a\cos\theta_1 + b}{-a\sin\theta_1},$$

$$\theta = \theta_1 + V - \frac{\pi}{2}.$$

Il reste à éliminer ρ_1, θ_1, V.

Les calculs sont très simples dans le cas de la cardioïde; on trouve

$$\rho = 4a\cos^3\frac{\theta}{3}.$$

Le limaçon étant l'inverse d'une conique Σ par rapport à un de ses foyers, sa podaire par rapport à ce foyer est l'inverse de l'antipodaire de Σ par rapport au même point. (Comparer SALMON, *Courbes planes*.)

M. BROCARD a résolu la même question en employant des coordonnées rectangulaires.

Question 1495.

(Voir *Mathesis* (3), IV, p. 264).

Trouver le lieu du centre d'un cercle touchant les trois côtés d'un triangle conjugué à une conique donnée, l'un des sommets de ce triangle étant fixe. (ABRAMESCU).

Solution par M. H. LEZ. Une conique rapportée à deux tangentes CA, CB et à la corde de contact AB a pour équation

$$\alpha\beta - k\gamma^2 = 0. \tag{1}$$

Si le sommet C d'un triangle conjugué reste fixe, les deux autres M, N divisent la corde de contact harmoniquement; les droites CN, CM sont donc représentées par

$$\alpha + m\beta = 0, \quad \alpha - m\beta = 0.$$

Les centres des cercles inscrit et ex-inscrits au triangle CMN sont à la rencontre des bissectrices des angles CNM, CMN, de sorte que

$$\frac{\alpha + m\beta}{\sqrt{1 + m^2 - 2m\cos C}} = \pm\gamma, \qquad \frac{\alpha - m\beta}{\sqrt{1 + m^2 + 2m\cos C}} = \pm\gamma.$$

Elevant au carré, on a

$$(\beta^2 - \gamma^2)\, m^2 + 2(\alpha\beta + \gamma^2 \cos C)\, m + \alpha^2 - \gamma^2 = 0,$$
$$(\beta^2 - \gamma^2)\, m^2 - 2(\alpha\beta + \gamma^2 \cos C)\, m + \alpha^2 - \gamma^2 = 0;$$

éliminant la variable m, on trouve le lieu cherché.

Mais, si on remarque que ces deux relations ne peuvent subsister sans que le facteur de m soit nul, on a de suite pour le lieu des centres des cercles inscrits la conique $\alpha\beta + \gamma^2 \cos C = 0$, qui est une hyperbole équilatère.

En effet, l'équation générale, en coordonnées normales,

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\alpha\gamma + 2h\alpha\beta = 0, \qquad (2)$$

représente une hyperbole équilatère si l'invariant

$$\Theta' = a + b + c - 2f \cos A - 2g \cos B - 2h \cos C = 0. \qquad (3)$$

Or, identifiant les équations (1) et (2), on a

$$a = b = f = g = 0, \quad c = -k, \quad h = \tfrac{1}{2};$$

par suite la relation (3) donne $-k = \cos C$.

Cette conique a son centre au point O ayant pour coordonnées :

$$2 \cos C \sin B, \quad 2 \cos C \sin A, \quad \sin C.$$

M. Bastin a résolu la même question en coordonnées cartésiennes et fait la remarque suivante : *Un triangle étant conjugué à une hyperbole équilatère, les centres des cercles tritangents sont sur la courbe* (théorème connu).

Ce théorème se déduit très simplement de ce que la conique (1) peut être remplacée par l'hyperbole $\alpha\beta + \gamma^2 \cos C = 0$ (Notations de M. H. Lez).

Solution par F. STERKENS. Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$$

les équations de la conique et du cercle. Le triangle étant autopolaire par rapport à la conique et circonscrit au cercle, l'invariant Θ' est nul, donc

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 - r^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 0. \qquad (1)$$

Si x_1, y_1 sont les coordonnées du sommet fixe, l'équation de sa polaire est

$$\frac{xx}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0.$$

Exprimons que cette droite est tangente au cercle variable; l'équation tangentielle du cercle est

$$r^2(u^2+v^2)-(\alpha u+\beta v+w)^2=0.$$

donc

$$r^2\left(\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}\right)-\left(\alpha\frac{x_1}{a^2}+\beta\frac{y_1}{b^2}-1\right)^2=0. \qquad (2)$$

Éliminons r^2 entre les équations (1) et (2), nous aurons l'équation du lieu

$$\frac{1}{a^2b^2}\left(\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{x_1^2}{a^2}\right)\left(\alpha^2-\beta^2\right)-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{2x_1y_1\alpha\beta}{a^2b^2}-\frac{2x_1\alpha}{a^2}-\frac{2y_1\beta}{b^2}+1\right)$$
$$-\frac{x_1^2}{a^4}-\frac{y_1^2}{b^4}=0.$$

Ce lieu est donc une hyperbole équilatère.

Solution géométrique. Il existe une seule hyperbole équilatère (H) ayant un double contact réel ou idéal avec la conique donnée Σ sur la polaire c du sommet fixe C Deux droites perpendiculaires issues de C coupent (H) en O et O_1, O_2 et O_3 tels, que O est l'orthocentre du triangle $O_1O_2O_3$. Les points OO_1, O_2O_3 sont conjugués dans une involution sur H, C est le pôle de cette involution et, par suite, c en est la polaire. Il en résulte que les droites OO_2 et O_1O_3, OO_3 et O_1O_2 se coupent sur c en deux points A et B conjugués à (H) et par conséquent à Σ. Le triangle ABC est donc conjugué à Σ et les points O. O_1 O_2 O_3, qui appartiennent à (H) sont les centres des cercles tritangents du triangle ABC. Le centre de (H) est à l'intersection du cercle circonscrit ABC et du diamètre de Σ issu de C. Car ce diamètre appartient à (H) et le centre d'une hyperbole équilatère est sur le cercle circonscrit à tout triangle qui lui est conjugué. (C. Servais).

Question 1498.

(Voir *Mathesis*, (3,; IV, p. 280).

Trouver le lieu des centres des quadriques dont trois diamètres conjugués sont parallèles à trois directions données et qui touchent quatre plans donnés. (J. Neuberg).

Solution par M. Abramescu (Ploesti). L'équation de l'une de ces

quadriques rapportée aux trois diamètres conjugués de directions données étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

on sait que la condition pour que le plan

$$ux+vy+wz+p=0$$

soit tangent, est

$$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2=p^2. \qquad (1)$$

Si l'on donne quatre plans tangents, nous pourrons éliminer a, b, c, entre quatre équations de la forme (1) et, par suite, écrire

$$\begin{vmatrix} u_1^2 & v_1^2 & w_1^2 & p_1^2 \\ u_2^2 & v_2^2 & w_2^2 & p_2^2 \\ u_3^2 & v_3^2 & w_3^2 & p_3^2 \\ u_4^2 & v_4^2 & w_4^2 & p_4^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Or, les quantités p_1, p_2, p_3, p_4 qui sont à certains facteurs près, les distances de l'origine O des coordonnées aux quatre plans considérés, peuvent être regardées comme les coordonnées de O par rapport au tétraèdre de ces plans; par suite l'équation (2) représente, en coordonnées tétraédriques, le lieu des centres des quadriques de la question. Ce lieu est une quadrique autopolaire par rapport au tétraèdre de référence.

×Question 1501.

Voir *Mathesis*, (3); V, p. 28).

On considère trois cercles tangents extérieurement deux à deux. Si ρ_1 *et* ρ_2 *désignent les rayons des deux cercles tangents aux trois premiers, et si* r *est le rayon du cercle inscrit dans le triangle ayant pour sommets les centres de ces trois cercles, on a la relation*

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{4}{r}. \qquad \text{(E. N. Barisien.)}$$

Solution par M. Fr. Dupont. Soient P_1, P_2 les centres des deux cercles tangents aux cercles donnés. et R, R′, R″, O, O′, O″ les rayons et les centres des trois cercles donnés. Si nous joignons ces centres aux points

de contact des deux circonférences P_1 et P_2, et si nous portons sur ces rayons à partir du point de contact, dans un sens ou dans l'autre, une longueur ρ_1 ou ρ_2, nous aurons les centres P_1 ou P_2. Il est facile de voir d'après la figure que, des longueurs ρ_1 et ρ_2, l'une devra être regardée comme positive et l'autre comme négative.

Cela posé, le rayon r du cercle inscrit au triangle $OO'O''$, dont les côtés sont $R+R'$, $R'+R''$, $R''+R$, aura pour expression

$$\sqrt{\frac{RR'R''}{R+R'+R''}}.$$

Dans le triangle OP_1O', qui a pour côtés $OO'=R+R'$, $OP_1=R+\rho$, $O'P_1=R'+\rho$, on a

$$\sin\tfrac{1}{2}OP_1O'=\sqrt{\frac{RR'}{(R+\rho)(R'+\rho)}},\quad \cos\tfrac{1}{2}OP_1O'=\sqrt{\frac{(R+R'+\rho)\rho}{(R+\rho)(R'+\rho)}}.$$

On aurait de même les sinus et les cosinus des angles $\frac{1}{2}O'P_1O''$ et $\frac{1}{2}O''P_1O$. Mais comme $\Sigma\frac{1}{2}OP_1O'=2$ droits, on peut écrire

$$\Sigma\sin^2\tfrac{1}{2}OP_1O'=2+2\cos\tfrac{1}{2}OP_1O'\cos\tfrac{1}{2}O'P_1O''\cos\tfrac{1}{2}O''P_1O.$$

Donc

$$\frac{RR'}{(R+\rho)(R'+\rho)}=2+2\frac{\sqrt{\rho^2(R+R'+\rho)(R'+R''+\rho)(R''+R+\rho)}}{(R+\rho)(R'+\rho)(R''+\rho)};$$

d'où, après réductions,

$$[(\Sigma RR')^2-4RR'R''.\Sigma R]\rho^2-2RR'R''.\Sigma RR'.\rho+R^2R'^2R''^2=0.$$

Les racines de cette équation sont l'une le rayon ρ_1 du cercle P_1 l'autre est $-\rho_2$. Or, comme

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2},$$

nous devrons prendre le quotient de la différence des racines de cette équation par leur produit, ce qui donne

$$4\sqrt{\frac{\Sigma R}{RR'R''}}\quad\text{ou}\quad\frac{4}{r}.$$

Donc le rayon r est une moyenne harmonique entre les diamètres des circonférences tangentes aux trois cercles.

M. H. Lez a résolu la même question par la géométrie analytique.

M. Plakhovo nous rappelle que M. Barisien avait déjà proposé la question

1501 sous le n° 783 dans le JME de M. de Longchamps; que DESCARTES a donné des expressions de ρ_1 et ρ_2; d'où l'on déduit facilement la relation

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{4}{r};$$

enfin que M. VUIBERT a résolu la question dans son Journal en employant l'inversion. M. PLAKHOVO est également l'auteur de la solution de la question 783 du JME, qui a paru dans le *Journal de Mariaud*, 1898, p. 14.

Le calcul des rayons ρ_1, ρ_2 a été proposé au concours général de Mathématiques élémentaires des lycées français en 1875; une démonstration très simple de la formule

$$\rho=\frac{\pm RR'R''}{RR'+R'R''+R''R\pm 2S}$$

où S est la surface du triangle, formule déjà donnée par Descartes, a été publiée par les NAM, 1878, p. 318.

×Question 1505.

(Voir *Mathesis*, (3), V, p. 29).

Déterminer le triangle dont deux côtés et la surface sont représentés par a^2+b^2, a^2-b^2, $ab(a^2-b^2)$. (E. BARBETTE).

Solution par MM. E. WEBER, ROSE et DUPONT. Soit LMN le triangle cherché et supposons $m=a^2+b^2$, $n=a^2-b^2$, $S=ab(a^2-b^2)$. Comme on a

$$S=\tfrac{1}{2}mn\sin L=ab(a^2-b^2),$$

on doit avoir

$$\sin L=\frac{2ab}{a^2+b^2},\quad \cos L=\pm\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},\quad \operatorname{tg}\frac{L}{2}=\frac{b}{a}\text{ ou }\frac{a}{b}.$$

Le troisième côté se déduit de

$$l^2=m^2+n^2-2mn\cos L;$$

on trouve respectivement

$$l=2ab,\qquad l=2\sqrt{a^4+b^4-a^2b^2}.$$

La première solution correspond à un triangle rectangle; c'est ce qu'on conclut de la relation $m^2=l^2+n^2$ ou encore de

$$S=\tfrac{1}{2}ln\sin M=ab(a^2-b^2).$$

La seconde solution est également admissible, car $\cos^2 L<1$ et on peut toujours construire un triangle avec un angle donné L et les côtés qui le comprennent. Ce second triangle est obtusangle en L.

REMARQUES. I. Dans la seconde solution,

$$l^2 = (a^2 + b^2)^2 + 3(a^2 - b^2)^2 = m^2 + 3n^2,$$

$$\frac{\sin N}{\sin M} = -\cos L, \qquad \operatorname{tg}^2 \frac{L}{2} \operatorname{tg} \frac{M - N}{2} = 1.$$

(ROSE).

II. L'interprétation de l'égalité $l^2 - m^2 = 3n^2$ ou la remarque que la hauteur abaissée de M sur $LN = 2ab$, conduit au théorème suivant :

Soit HNL le triangle rectangle de côtés $HL = a^2 - b^2$. $HN = 2ab$, $NL = a^2 + b^2$ et de surface $ab(a^2 + b^2)$. Si l'on prolonge HL de $LM = HL$, on obtient un triangle MLN de même surface $ab(a^2 - b^2)$ et dont deux côtés sont $LM = a^2 - b^2$, $LN = a^2 + b^2$. (J. N).

Solutions moins complètes par MM. Abramescu et Plakhovo.

Question 1506.

(Voir *Mathesis*, (3); V, p. 55).

De chaque point M *d'une ellipse donnée comme centre on décrit un cercle* Σ *qui touche le petit axe.*

1° *Trouver le lieu des centres de similitude du cercle* Σ *et du cercle principal de l'ellipse.*

2° *Trouver l'enveloppe de l'axe radical de ces deux cercles et le lieu du pied de cet axe sur la ligne des centres* OM.

3° *Trouver les aires de ces deux courbes.* (E. N. BARISIEN).

Solution par M. ABRAMESCU. 1° Soient (x_0, y_0) les coordonnées du point M. Celles d'un centre de similitude du cercle Σ et du cercle principal sont

$$x = \frac{ax_0}{a - x_0}, \qquad y = \frac{ay_0}{a - x_0}, \tag{1}$$

d'où inversement

$$x_0 = \frac{ax}{a + x}, \qquad y_0 = \frac{ay}{a + x}.$$

En exprimant que le point (x_0, y_0) appartient à l'ellipse, on trouve

$$ay^2 - 2b^2x - ab^2 = 0. \tag{2}$$

Le lieu du centre de similitude est donc une parabole.

Pour avoir le lieu complet des deux centres de similitude, il suffit de considérer encore une seconde parabole ayant la même équation (2) où a serait remplacé par $-a$.

Les formules (1) définissent un centre de similitude externe, si $a > 0$, $x_0 > 0$; un centre de similitude interne, si $a < 0$, $x_0 > 0$, etc.

2° Si l'on représente les coordonnées de M par $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$, les équations des deux cercles sont

$$x^2 + y^2 - 2ax\cos\varphi - 2by\sin\varphi + b^2\sin^2\varphi = 0,$$
$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Celle de leur axe radical est

$$2ax\cos\varphi + 2by\sin\varphi = a^2 + b^2\sin^2\varphi; \tag{3}$$

en la dérivant par rapport à φ on obtient

$$-2ax\sin\varphi + 2by\cos\varphi = 2b^2\sin\varphi\cos\varphi. \tag{4}$$

Pour avoir l'équation de l'enveloppe de cet axe, il faudrait éliminer φ entre (3) et (4); mais il est plus simple de résoudre ces équations par rapport à x et y, ce qui donne

$$x = \frac{(a^2 - b^2\sin^2\varphi)\cos\varphi}{2a}, \qquad y = \frac{(a^2 + b^2 + b^2\cos^2\varphi)\sin\varphi}{2b}.$$

Telles sont les *formules paramétriques* de la courbe.

Le pied de l'axe radical satisfait aux équations (3) et

$$\frac{y}{b\sin\varphi} = \frac{x}{a\cos\varphi}; \tag{5}$$

en éliminant φ on trouve une équation du 6me degré. Les équations paramétriques de ce lieu sont

$$x = \frac{a\cos\varphi(a^2 + b^2\sin^2\varphi)}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}, \qquad y = \frac{b\sin\varphi(a^2 + b^2\sin^2\varphi)}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}. \tag{6}$$

3° L'aire de l'enveloppe de l'axe radical a pour expression

$$-4\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\,(a^2 + b^2 + b^2\cos^2\varphi)\,(c^2 + 3b^2\cos^2\varphi)}{ab}\,d\varphi.$$

Remplaçons $\sin^2\varphi$ par $1 - \cos^2\varphi$, effectuons le produit indiqué et

appliquons la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m}\varphi d\varphi = \frac{1\cdot 3\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdots(2m)}\frac{\pi}{2};$$

nous aurons pour l'aire cherchée

$$\frac{\pi}{32}\frac{8a^4+8a^2b^2-b^4}{ab}.$$

Cherchons encore l'aire du lieu du pied de l'axe radical. A cet effet, nous cherchons d'abord l'équation de ce lieu en coordonnées polaires (r, θ). Des formules (6), on déduit

$$r^2 = x^2+y^2 = \frac{(a^2+b^2\sin^2\varphi)^2}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi};$$

l'égalité (5) donne

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\sin\varphi}{a\sin\theta} = \frac{\cos\varphi}{b\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}.$$

Par conséquent,

$$r^2 = \frac{a^2(b^2+a^2\sin^2\theta)}{4b^2(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)},$$

L'aire de cette courbe est

$$\frac{a^2}{2b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(b^2+a^2\sin^2\theta)^2}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta = \frac{\pi a^2}{8b^2c^4}\left(2a^6-a^4b^2-2a^2b^4+\frac{2b^7}{\quad}\right).$$

Pour trouver la dernière intégrale, on peut diviser le numérateur

$$a^4\sin^4\theta+2a^2b^2\sin\theta+b^4$$

par le dénominateur $c^2\sin^2\theta+b^2$ en considérant $\sin\theta$ comme lettre ordonnatrice.

Solution partielle par M. Rose.

×QUESTIONS D'EXAMEN.

1213. En deux points quelconques M, M′ d'une parabole on mène les normales qui rencontrent l'axe de la courbe en N, N′. Démontrer que les projections des droites M′N, MN′ sur la corde MM′ sont égales.

(Sanjana).

Cela revient à démontrer que la perpendiculaire au milieu de la corde MM′

passe au milieu de la droite NN'. Sous cette forme, le théorème a déjà été énoncé par LAGUERRE pour une conique quelconque.

1914. Quelle est, suivant les valeurs attribuées à l'entier positif n la nature de la fraction décimale à laquelle donne naissance la fraction

$$\frac{1}{n(n+3)}\ ?$$

(*Agrégation de l'enseignement secondaire des jeunes filles*, 1904).

n et $n+3$ ne peuvent avoir d'autre facteur commun que 3. Si n est de la forme $2^\alpha.5^\beta.K$, $n+3$ est premier avec 2 et 3, et la fraction décimale sera périodique mixte, le nombre des chiffres irréguliers étant égal au plus grand des exposants α, β. Mêmes conclusions si $n+3$ est de la forme $2^\alpha.5^\beta.K$. Si n est de la forme $2^\alpha.K$ et ne se termine pas par 2, $n+3$ est premier avec 2 et 5, et l'on obtient une fraction décimale mixte qui a α chiffres périodiques; quand $2^\alpha K$ se termine par 2, $n+3$ est de la forme $5^\beta.K'$, et la fraction décimale sera encore périodique avec un nombre de chiffres irréguliers égal au plus grand des nombres α, β. Si $n=5^\alpha.K$, $n+3$ se termine par 8 et est de la forme $2^\beta.K'$., ... Enfin, n peut être terminé par l'un des chiffres 1, 3, 7, 9; alors $n+3$ est terminé par 4, 6, 0, 2 ...

1915. Construire un triangle ABC, connaissant le côté BC, la hauteur correspondante AA' et sachant que l'angle $B = 2C$.

Les segments $BA' = x$, $A'C = y$ de la base déterminés par la hauteur AA' se déduisent des équations

$$x + y = a, \quad \operatorname{tg} B = \frac{h}{x}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{h}{y}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{2 \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{tg}^2 C}.$$

1916. Démontrer que le triangle rectangle est le seul qu'une droite menée par un sommet puisse décomposer en deux triangles semblables entre eux et semblables au premier triangle.

1917. Soient Q, Q' les extrémités d'une corde menée par le foyer F d'une conique, P une extrémité du diamètre conjugué avec cette corde, PG la normale en P arrêtée à l'axe focal. Démontrer que $\overline{PG}^2 = FQ.FQ'$.

(*Ed. Times*, mars 1905).

1. Si la courbe est une parabole, les tangentes en Q et Q' sont rectangulaires et se coupent sur la directrice en un point T du diamètre conjugué avec QQ'. TF est perpendiculaire à QQ' et équipollent à PG.

2. Dans le cas de l'ellipse, si A, A' sont les extrémités du grand axe, et si $2b'$ est la longueur du diamètre parallèle à QQ', le théorème de Newton donne

$$\frac{FQ.FQ'}{FA.FA'} = \frac{b'^2}{a^2},$$

et d'après un autre théorème connu, $PG = \frac{bb'}{a}$, etc.

1218. Si k est donné, déterminer l de manière que

$$ax^2 + bx + c - l(x - k)^2$$

soit un carré parfait en x. Dans quels cas les quantités l et k ont-elles le même signe ou des signes contraires. (*Journal de Vuibert*).

On trouve

$$l = \frac{4ac - b^2}{4(ak^2 + bk + c)}.$$

Si $4ac - b^2 > 0$, le trinôme du second degré $ak^2 + bk + c$ a toujours le signe de a, et il en est de même de l. Si $4ac - b^2 = 0$, on a $l = 0$ à moins que k ne soit racine de $ak^2 + bk + c = 0$, auquel cas l est quelconque, circonstance qui s'explique facilement. Si $4ac - b^2 < 0$, le trinôme $ak^2 + bk + c$ a deux racines réelles et inégales k' et k''; alors l a le signe de a dans l'intervalle (k', k''), le signe de $-a$ pour les autres valeurs de k...

1219. Deux points A, B glissent sur une droite fixe Ox en conservant une distance constante $AB = d$. Soit C un point fixe extérieur à la droite Ox. La perpendiculaire élevée en C sur la droite CB rencontre la circonférence de centre A et de rayon AC, en M. Le lieu de M est une circonférence de cercle. (Barisien).

En faisant passer l'axe Oy par C on trouve

$$(x + d)^2 + (y - c)^2 = d^2.$$

1220. Dans tout triangle sphérique

$$2\sin p \sec^2 r = \sin a \cos(p - a) + \sin b \cos(p - b) + \sin c \cos(p - c),$$

r étant le rayon du cercle inscrit. (*Ed. Times*, mars 1905).

A déduire de $\text{tang. } r = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}$.

1221. Si ABCD est un quadrilatère quelconque, démontrer que

$$(A, BC)(B, CD)(C, DA)(D, AB) = (A, DC)(D, CB)(C, BA)(B, AD),$$

le symbole (X, YZ) désignant la distance du point X à la droite YZ.

(Cwojdzinski).

1222. Etant donnés un triangle ABC et une circonférence O tangente à la base BC, mener une droite parallèle à BC et telle que les segments interceptés sur cette droite par l'angle BCA et par la circonférence soient dans un rapport donné m.

Discussion.

Sans nuire à la généralité on peut remplacer le triangle ABC par un triangle isocèle de même base et de même hauteur, et supposer la circonférence tangente au milieu de BC.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1521. Si R est un point quelconque du plan d'un triangle quelconque et P la puissance de ce point par rapport au cercle circonscrit à ce triangle, on a

$$3P = \overline{AB}^2 \cdot \frac{CR}{CC'} + \overline{BC}^2 \cdot \frac{AR}{AA'} + \overline{CA}^2 \cdot \frac{BR}{BB'} - (\overline{AR}^2 + \overline{BR}^2 + \overline{CR}^2),$$

A', B', C' élant les points de rencontre de BC, CA, AB respectivement avec les droites AR, BR, CR. (EDM. DE PUYDT)

1522. On donne une circonférence de centre C et deux tangentes rectangulaires Ox, Oy. Une tangente mobile rencontre Ox en P et Oy en Q. 1° Le lieu de l'orthocentre du triangle CPQ est une hyperbole équilatère; 2° le lieu du centre du cercle des neuf points est une droite.

(E. N. BARISIEN).

×**1523.** Par un point donné sur la ligne de terre, mener une droite dont les projections horizontale et verticale fassent un angle donné α avant le rabattement des plans de projection l'un sur l'autre, et un autre angle donné β après ce rabattement.

1524. Par un point quelconque M d'une hyperbole de centre O, on mène une parallèle à une asymptote qui coupe l'axe réel de l'hyperbole en A, une parallèle à l'autre asymptote qui coupe l'axe imaginaire en β.

Trouver 1° l'enveloppe de la droite AB; 2° le lieu du point de rencontre des droites AB et OM; 3° le lieu du milieu de AB.

(ABRAMESCU).

×**1525.** Soient DEF le triangle orthique d'un triangle quelconque ABC; $A_1B_1C_1$ le triangle anticomplémentaire de ABC; $D_aE_aF_a$, $D_bE_bF_b$, $D_cE_cF_c$ les triangles orthiques des triangles A_1BC, AB_1C, ABC_1; $A_2B_2C_2$ le triangle formé par les droites E_aF_a, F_bD_b, D_cE_c.

On demande :

1° de calculer les surfaces des triangles formés par les côtés des angles BAC, CBA, ACB respetivement avec les droites E_aF_a, F_bD_b D_cE_c; 2° de calculer la surface de triangle $A_2B_2C_2$; 3° de déterminer les centres d'homologie des triangles $A_2B_2C_2$ et ABC, $A_2B_2C_2$ et DEF. (A. C.).

Rectifications. A ajouter à la fin du compte rendu de la trigonométrie de M. BARBETTE, p. 98. « V. L'ouvrage se termine par une collection de 666 exercices, classés d'après les différents chapitres de l'ouvrage (37 pages et un tableau des formules les plus importantes (6 pages) ». — Page 111, Question 1517, ligne 8 au lieu de $\overline{MD}^2$, lire $\overline{MO}^2$.

†MÉMORIAL MATHÉMATIQUE.

Juin.

1. **1867.** Mort de *von Staudt*, à Erlangen.
2. **1856.** Naissance de *A. Markof*, à Rjäsan.
6. **1903.** Mort de *L. Gegenbauer*, à Vienne.
5. **1716.** Mort de *P. Cotes*, à Cambridge.
6. **1436.** Naissance de *Regiomontanus*, à Königsberg en Prusse.
7. **1847.** Mort de *G. A. Göpel*, à Berlin.
8. **1818.** Naissance de *Ch. Cellérier*, à Genève.
9. **1903.** Mort de *M. Hamburger*, à Berlin.
10. **1836.** Mort d'*Ampère*, à Marseille.
1903. Mort de *L. Cremona*, à Rome.
11. **1646.** Naissance de *Leibniz*, à Leipzig.
12. **1577.** Naissance de *P. Guldin*, à Saint-Gall.
13. **1831.** Naissance de *Cl. Maxwell*, à Edimbourg.
14. **1746.** Mort de *C. Maclaurin*, à York.
15. **1765.** Naissance de *H. Th. Colebrooke*, à Londres.
16. **1789.** Naissance d'*O. Terquem*, à Metz.
17. **1831.** Mort de *Sophie Germain*, à Paris.
18. **1858.** Naissance de *A. R. Forsyth*, à Glasgow.
19. **1623.** Naissance de *Pascal*, à Clermont-Ferrand.
20. **1838.** Naissance de *Th. Reye*, à Ritzebüttel, près de Cuxhaven.
21. **1781.** Naissance de *Poisson*, à Pithiviers (Loiret).
22. **1887.** Naissance de *P. Bachmann*, à Berlin.
23. **1862.** Naissance de *E. Study*, à Cobourg.
24. **1809.** Naissance de *J. B. Brasseur*, à Esch-sur-l'Alzette (Luxembourg).
25. **1883.** Mort de *J. de la Gournerie*, à Paris.
26. **1824.** Naissance de *Sir W. Thomson, Lord Kelvin*, à Belfast.
27. **1880.** Mort de *C. W. Borchardt*, à Rudersdorf, près de Berlin.
28. **1807.** Naissance de *A. M. Stern*, à Francfort s. M.
29. **1851.** Naissance de *M. Krause*, à Wildknit (Prusse orientale).
30. **1846.** Naissance de *E. Netto*, à Halle a. S.

EXERCICES DE CALCUL INTÉGRAL ;

par M. E. N. Barisien.

(*Suite*, voir p. 58).

5 La tangente en un point M variable d'une ellipse rencontre les axes en P et Q. La parallèle au grand axe OA menée par M et la parallèle au petit axe OB menée par P se rencontrent en P′; la parallèle par M à OB et la parallèle à OA par Q se rencontrent en Q′. L'aire comprise entre l'une des courbes (P′) ou (Q′), ses deux asymptotes et l'ellipse est égale à l'aire de l'ellipse.

Soient (x, y), (X, Y) les coordonnées des points M, P′; on a $Y = y$, $X = \frac{a^2}{x}$.

La courbe (P′) est une quartique composée de deux branches touchant l'ellipse respectivement aux sommets A, A′ et asymptotes aux parallèles à AA′ menées par les sommets B, B′. Si $X dY$ est pris pour élément de l'aire U comprise entre les deux branches de la courbe (P′) et leurs asymptotes, on a

$$dU = X dY = \frac{a^2}{x}\,dy = -\frac{a^2}{x}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{ab\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$U = 4ab\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\pi ab,$$

de sorte que l'aire comprise entre la courbe (P′), l'ellipse donnée et les tangentes en B et B′ est égale à celle de l'ellipse.

6. Aire de la courbe dont les coordonnées paramétriques en φ sont

$$y = \sin\varphi, \quad x = \cos 3\varphi.$$

Soient AA′, BB′ les diamètres principaux du cercle trigonométrique. Divisons la circonférence en 12 parties égales aux points A, 1, 2, B, 4, 5, A′, 7, 8, B′, 10, 11. Les cordes 15, (7,11) rencontrent le diamètre BB′ aux points C, D; les tangentes en A, A′ rencontrent la corde 24 aux points E, F, et la corde (8,10) aux points G, H. Cela posé, lorsqu'on fait varier φ de 0 à 360°, on obtient successivement comme points de la courbe cherchée A, C, F, B, E, C, A′, D, G, B′, H, D, A. La courbe touche en A, B, A′, B′ le cercle trigonométrique; en E et G, la droite EG; en F et H la droite FH. Les cordes 15, (7,11) sont des tangentes d'inflexion en C, D.

On a

$$y\,dx = -3\sin\varphi\sin 3\varphi\,d\varphi = -\frac{3}{2}[\cos 2\varphi - \cos 4\varphi]\,d\varphi,$$

$$x\,dy = \cos 3\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}(\cos 2\varphi + \cos 4\varphi)\,d\varphi;$$

d'où l'on déduit

$$\text{aire OCAO} = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{6}\pi} (\cos 2\varphi - \cos 4\varphi)\, d\varphi = \frac{3}{16}\sqrt{3},$$

$$\text{aire CFBC} = \frac{-1}{2}\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (\cos 2\varphi + \cos 4\varphi)\, d\varphi = \frac{3}{16}\sqrt{3}.$$

9. On donne une circonférence de centre O et un diamètre AB. D'un point quelconque M de la circonférence on abaisse sur AB la perpendiculaire MP, et on projette P en Q sur le rayon OM. Aire U de la courbe (Q) et aire U_1 de l'enveloppe de la droite PQ.

1. La courbe (Q) a pour équation $\rho = R\cos^2\theta$; elle se compose de deux ovales qui touchent en O le diamètre perpendiculaire à AB, en A et B le cercle O. On a

$$U = 2R^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{3}{4}\pi R^2.$$

2. L'équation cartésienne de PQ est

$$x\cos\theta + y\sin\theta = R\cos^2\theta. \qquad (1)$$

Sa dérivée par rapport au paramètre variable θ,

$$-x\sin\theta + y\cos\theta = -2R\cos\theta\sin\theta, \qquad (2)$$

représente la normale à l'enveloppe de la droite PQ; la construction de la droite (2) montre que cette enveloppe est le lieu du symétrique Q' de Q par rapport à P. Les coordonnées de Q' sont

$$x = R\cos\theta(1+\sin^2\theta), \quad y = -R\cos^2\theta\sin\theta.$$

De $dU_1 = y\,dx$ on déduit

$$U_1 = -4R^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (4\sin^4\theta - \sin^2\theta - 3\sin^6\theta)\, d\theta.$$

Appliquant la formule connue qui donne $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2m} x\,dx$, on trouve $U_1 = \frac{7}{8}\pi R^2$.

La courbe se compose de deux *cœurs* se touchant en O; A et B sont des points de rebroussement. Il est facile de déterminer les points où la courbe rencontre la circonférence O et les perpendiculaires en A et B à AB.

(A continuer).

SUR QUELQUES CONIQUES ASSOCIÉES AU TRIANGLE;

par M. E. Weber (Liége).

1. Soient P et Q deux points quelconques du plan du triangle de référence ABC, (P_a, P_b, P_c) et (Q_a, Q_b, Q_c) les points où les côtés du triangle ABC sont rencontrés par les droites AP, BP, CP, AQ, BQ, CQ. D'après un théorème de Steiner, les six points P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c appartiennent à une même conique ; nous désignerons cette courbe par la notation [PQ].

Le théorème de Steiner, qui est une conséquence immédiate d'un théorème de Carnot, s'établit facilement par le calcul. En effet, soient (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ les coordonnées trilinéaires des points P, Q et soit

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy = 0$$

l'équation d'une conique. Si cette courbe passe par les points P_a, Q_a, les équations

$$By^2 + Cz^2 + 2A'yz = 0, \quad \left(\frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma}\right)\left(\frac{y}{\beta'} - \frac{z}{\gamma'}\right) = 0$$

représentent chacune le système des droites AP_a, AQ_a ; donc

$$B : C : 2A' = \frac{1}{\beta\beta'} : \frac{1}{\gamma\gamma'} : -\left(\frac{1}{\beta\gamma'} + \frac{1}{\beta'\gamma}\right).$$

En continuant ainsi on trouve que les six points P_a, Q_a, P_b, Q_b, P_c, Q_c sont sur la conique

$$\Sigma \frac{x^2}{\alpha\alpha'} - \Sigma\left(\frac{1}{\beta\gamma'} + \frac{1}{\beta'\gamma}\right) yz = 0. \tag{1}$$

2. Examinons quelques cas particuliers.

Si P et Q sont deux points *inverses* (conjugués isogonaux) par rapport au triangle ABC et que l'on adopte les *coordonnées normales*, les coordonnées α', β', γ' sont inversement proportionnelles à α, β, γ et l'équation (1) devient

$$\Sigma x^2 - \Sigma\left(\frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma}\right) yz = 0. \tag{2}$$

Chacun des centres des cercles tritangents étant son propre inverse, l'équation (2), si l'on remplace (α, β, γ) respectivement par (1, 1, 1), (−1, 1, 1), (1, −1, 1), (1, 1, −1), représentera les coniques qui touchent les côtés du triangle ABC aux pieds des bissectrices intérieures,

ou aux pieds d'une bissectrice intérieure et des deux autres bissectrices extérieures.

La conique [HO] qui correspond à l'orthocentre H et au centre O du cercle circonscrit, a pour équation

$$\cos A \cos B \cos C \Sigma x^2 - \Sigma \cos A (\cos^2 B + \cos^2 C) yz = 0.$$

Soient Ω, Ω′ les points de Brocard ; l'un de ces points ayant pour coordonnées normales $\frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{a}{b}$, la conique [ΩΩ′] est représentée par

$$a^2 b^2 c^2 \Sigma x^2 - \Sigma (a^4 + b^2 c^2) bcyz = 0.$$

La conique [GK] sera étudiée plus loin.

3. On peut prendre pour P et Q deux points *réciproques* (conjugués isotomiques) et adopter les *coordonnées barycentriques ;* l'équation (2) représente alors la conique [PQ], qui rencontre chaque côté de ABC en un couple de points symétriques par rapport au milieu du côté.

Le centre de gravité G et les sommets du triangle anticomplémentaire étant chacun son propre réciproque, si l'on fait $\alpha = \beta = \gamma$, l'équation (2) représente l'ellipse qui touche les côtés BC, CA, AB en leurs milieux ; et si l'on fait, par exemple, $-\alpha = \beta = \gamma$, on obtient l'équation de l'hyperbole qui a pour asymptotes AB, AC et qui touche BC en son milieu.

On trouve facilement pour l'équation barycentrique de la conique qui passe par les pieds des hauteurs de ABC et par les symétriques de ces points par rapport au milieu du côté correspondant :

$$\Sigma x^2 - \Sigma \frac{\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C}{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} yz = 0.$$

Les points de contact des côtés ABC avec le cercle inscrit et avec les cercles ex-inscrits correspondants sont situés sur la conique

$$\Sigma x^2 - \Sigma \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}} yz = 0.$$

4. Prenons pour P le centre de gravité G de ABC, pour Q un point quelconque. Les milieux des côtés de ABC seront désignés par G_a, G_b, G_c ; les milieux des côtés du triangle $G_a G_b G_c$ par G'_a, G'_b, G'_c ; les milieux

des droites G_aQ_a, G_bQ_b, G_cQ_c par M_a, M_b, M_c; enfin les milieux des droites AQ, BQ, CQ par A_1, B_1, C_1.

Le centre de la conique [GQ] est à l'intersection des droites $M_aG'_a$, $M_bG'_b$, $M_cG'_c$ qui joignent les milieux de deux cordes parallèles de la courbe; ces droites sont respectivement parallèles aux droites AQ_a, BQ_b, CQ_c. Si donc S est le point d'intersection des droites GQ, G'_aM_a, on a $GG'_a : GA = GS : GQ$, d'où $GS = \frac{1}{3}GQ$. Ce résultat montre que les lignes G'_bM_b, G'_cM_c passent par le même point S. Donc, *le centre* S *de la conique* [GQ] *divise la droite* GQ *dans le rapport* 1 : 3.

La droite G_aS rencontre AQ en un point de la courbe; ce point est précisément A_1, c'est ce qu'on voit en considérant le triangle GAQ coupé par la transversale G_aS. Par conséquent, *la conique* [GQ] *passe par les milieux des droites* AQ, BQ, CQ.

Si l'on prend le triangle $A_1B_1C_1$ pour triangle fondamental et si l'on observe que les côtés de ce triangle passent par les milieux des droites QQ_a, QQ_b, QQ_c, on peut énoncer le théorème suivant : *Les sommets d'un triangle* $A_1B_1C_1$ *et les symétriques* Q_a, Q_b, Q_c *d'un point* Q *par rapport aux points où les droites* A_1Q, B_1Q, C_1Q *rencontrent les côtés correspondants, sont six points d'une même conique.*

A cette propriété correspond l'équation barycentrique

$$\Sigma\alpha'(\beta' + \gamma')yz = 0, \qquad (3)$$

le triangle de référence étant $A_1B_1C_1$ et α', β', γ' désignant les coordonnées de Q.

Les triangles $G_aG_bG_c$, $A_1B_1C_1$ étant symétriques par rapport à S, le centre de gravité G' de $A_1B_1C_1$ est symétrique de G par rapport à S; par suite, $G'S = \frac{1}{2}QG'$. D'après cela, le centre S est le complémentaire de Q dans le triangle $A_1B_1C_1$.

L'équation (3) représente encore la conique (GQ) lorsqu'on prend $G_aG_bG_c$ pour triangle de référence. Soit Q' le symétrique de Q par rapport à S; comme $QG = 2GQ'$, $GQ' = 2SG$, Q' est le complémentaire de Q et S est le complémentaire de Q' dans le triangle ABC. *La conique* [GQ] *passe par les symétriques de* Q' *par rapport aux points de rencontre des côtés du triangle* $G_aG_bG_c$ *avec les droites* G_aQ', G_bQ', G_cQ'.

5. Considérons maintenant la conique [GK], qui passe par les pieds des médianes et des symédianes du triangle ABC et par les milieux des

droites AK, BK, CK. Elle a pour équation en coordonnées normales

$$\Sigma x^2 - \Sigma\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)yz = 0, \qquad (4)$$

et en coordonnées barycentriques

$$\Sigma\frac{x^2}{a^2} - \Sigma\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)yz = 0, \qquad (5)$$

le triangle de référence étant ABC.

Si on rapporte la courbe au triangle $G_aG_bG_c$ et qu'on adopte des coordonnées barycentriques, on trouve l'équation

$$\Sigma a^2(b^2+c^2)yz = 0, \qquad (6)$$

qui remplace l'équation (3).

Les coordonnées du centre S de la conique (4) sont

$$x = \frac{S}{2m^2}\frac{a^2+m^2}{2a} = \frac{1}{4}\left(\frac{2Sa}{m^2}+3\frac{2S}{a}\right), \quad \cdots;$$

les coordonnées de G étant $\frac{2S}{a}$, ... et celles de K, $\frac{2Sa}{m^2}$ ..., les formules précédentes indiquent que le centre divise la distance GK dans le rapport 1 : 3.

Soit N le centre du cercle des neuf points; comme $GN = \frac{1}{3}NH$, $GS = \frac{1}{3}SK$, la droite NS est parallèle à HK et passe au milieu O′ de OK; de plus, si l'on considère le triangle KSO′ coupé par la transversale NGO, on trouve : $NS = \frac{1}{2}NO'$. Ainsi, *le centre de la conique* [GK] *est au milieu de la droite joignant le centre du cercle des neuf points au centre du cercle de Brocard* (Question 2782 de l'IM). (*A continuer*).

BIBLIOGRAPHIE.

Henri Poincaré, membre de l'Institut. Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuterenden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. Leipzig, Teubner, 1904 (cartonné in-12 de XVI-342 pp). Prix : 4 marcs 80.

M. Poincaré fait paraître, il y a quelques années, le célèbre ouvrage intitulé *Science et Hypothèse* (Paris, Flammarion, sans date, 284 pp. in-12) où il expose ses vues sur les principes fondamentaux de l'arithmétique, de la géométrie, de la mécanique, de la physique et, incidemment, du calcul des probabilités.

M. Lindemann, l'habile géomètre à qui l'on doit la démonstration de la

transcendance du nombre π, a publié en 1904, avec Madame Lindemann, une traduction allemande du livre de M. Poincaré, avec de nombreuses notes explicatives, historiques ou bibliographiques. Les notes de M. Lindemann enlèvent à beaucoup d'assertions de M. Poincaré ce qu'elles ont d'obscur, de tranchant ou de paradoxal, parce qu'elles les mettent en relations avec les vues des savants contemporains qui ont abordé les mêmes sujets que lui; par suite, elles permettent de leur donner un sens plus précis, disons plus raisonnable que dans l'ouvrage original.

Le sommaire des matières traitées dans l'ouvrage de M. Poincaré est le suivant : *Introduction*. I. *Le nombre et la grandeur*. 1. Nature du raisonnement mathématique. 2. La grandeur mathématique et l'expérience. II. *L'espace*. 3. Les géométries non euclidiennes. 4. L'espace et la géométrie. 5. L'expérience et la géométrie. III. *La force*. 6. La mécanique classique. 7. Le mouvement relatif et le mouvement absolu. 8 Énergie et thermodynamique. IV. *La nature*. 9. Les hypothèses en physique. 10. Les théories de la physique moderne. 11. Le calcul des probabilités. 12. L'optique et l'électricité. 13. L'électrodynamique.

Voici, si nous les entendons bien, quelques unes des idées fondamentales de M. Poincaré. 1. Le raisonnement par passage de n à $n+1$ (ou de $n+1$ à n: principe de la descente indéfinie de Fermat) est un jugement synthétique à priori. 2. Les postulats de la géométrie sont des définitions déguisées. 3. On ne peut pas dire que la géométrie euclidienne soit plus vraie que les géométries non euclidiennes ou inversement. 4. Les principes de la mécanique rationnelle sont des définitions déguisées. Tout mouvement est relatif. 5. Le principe de la conservation de l'énergie, généralisé le plus possible, peut s'énoncer : il y a quelque chose de constant dans l'Univers. 6. La physique mathématique expose les résultats de l'observation idéalisés sous une forme commode et suggestive pour de nouvelles recherches. 7. Elle fait connaître les relations entre les choses, mais sans rien nous apprendre sur la nature des choses elles-mêmes.

On peut souscrire à 2, 4, 5, 6, mais non à 1, qui contient, croyons nous, une confusion entre l'infini et l'indéfini, ni à 3, qui est en contraction avec 6 (nous regardons la géométrie comme la physique mathématique des distances); ni enfin à 7 : connaître les relations des choses, c'est apprendre beaucoup sur leur nature.

On ne peut assez louer les notes ajoutées par M. Lindemann à la traduction du livre de M. Poincaré. Les plus savants y trouveront quelque chose à apprendre sur tous les sujets touchés par l'auteur ou le traducteur : douze notes se rapportent à l'arithmétique et à l'analyse (pp. 245-253); trente à la géométrie (pp. 254-285); vingt deux à la mécanique (pp. 286-309); quarante et une à la physique et au calcul des probabilités (pp. 309-332); vient ensuite une page d'additions et un excellent index (pp. 333-342). Plusieurs de ces notes, particulièrement sur la géométrie non euclidienne sont vraiment remarquables. Nous signalons en particulier la note 24, p. 271-2, sur l'interprétation de certains postulats d'Euclide, et surtout la note 26, pp. 272-277, où M. Lindemann défend très bien ses vues sur les principes de la géométrie contre des critiques étroites et exclusives de Lie et d'autres géomètres.

Nous recommandons vivement à nos lecteurs familiarisés avec la langue allemande, l'édition de M. et M^me^ Lindemann du livre de M. Poincaré, à cause

de ces notes savantes dont nous venons de parler(*). Ajoutons qu'au point de vue typographique, la traduction l'emporte de beaucoup sur l'édition originale: celle-ci est mal imprimée, sur papier commun grisâtre, et est pauvrement brochée sous une méchante couverture rouge; l'édition allemande est bien imprimée sur beau papier blanc et est élégamment cartonnée. (P. M.).

Notions de mécanique par J. Richard, docteur ès-sciences Mathématiques, professeur au Lycée de Dijon. Paris, F. R. Rudeval, 1905. (In-8° de 224 pages). Prix : 4 francs (**).

« Cet ouvrage, contenant toutes les matières des programmes de Mathématiques A et B, renferme en outre de nombreuses applications pratiques.

L'ouvrage débute par une introduction philosophique et historique. La statique constitue une première partie de l'ouvrage, la plus étendue. La force y est définie d'une façon purement expérimentale, et les différentes espèces de forces sont énumérées avec une indication de leurs usages. Un petit emprunt à la dynamique permet de définir la force centrifuge.

Après la composition des forces concourantes, un chapitre est consacré aux applications. En voici le sommaire : *Régulateur à boules, Equilibre d'un liquide tournant, Aplatissement du globe, Bicyclette, Navigation à voiles, Vol plané.*

L'étude des forces quelconques vient ensuite, et la théorie des centres de gravité. Un chapitre est consacré aux appareils à peser les corps. En voici le sommaire : *Balance ordinaire, Balance de Roberval, Romaine, Bascule de Quintenz, Peson, Manière de peser une lettre sans appareil, Pont bascule.* Un chapitre sur quelques machines contient : *Levier, Treuil, Poulies et Moufles, Cric et Grues, Coin, Vis.*

Après la Statique proprement dite viennent des notions de Statique graphique. *Théorèmes de Géométrie projective, polygones funiculaires, fermes en fer et ponts métalliques.* Un exemple de ferme est traité complètement. Des notions de cinématique et de dynamique viennent ensuite. Comme exemple de *Roues dentées*, on a pris le *rouage des horloges.*

Une note sur le frottement et le roulement contient : *Glissement sur un plan incliné, Rouleau, Brouette, Voitures, Bicyclettes, Locomotives.*

Une autre note contient la théorie de la flexion plane des poutres droites, avec un exemple simple.

L'auteur s'est efforcé de donner une idée des applications de la science et de faire comme une sorte d'introduction à la mécanique industrielle. »

A la fin de l'introduction l'auteur donne aux élèves sur la manière d'étudier les **conseils très judicieux** que voici :

1. « Lire la question traitée dans l'ouvrage, de façon à voir la méthode

---

(*) A la page 140, M. Poincaré parle des *sphères de verre de Ptolémée*, et M. Lindemann, à la page 118, traduit *die gläsernen Spheren des Ptolomäus.* C'est là une antique erreur attribuée à tort au grand astronome grec; elle disparaîtra sans doute d'une prochaine édition.

(**) Nous rappelons à nos lecteurs, qui pourraient s'étonner de la brièveté de nos annonces bibliographiques relatives à des ouvrages de mécanique, que *Mathesis*, en général, ne s'occupe pas de questions relatives à cette science.

employée, mais sans s'arrêter au détail des raisonnements et des calculs, puis fermer le livre, et chercher à traiter la question tout seul, en entrant cette fois dans les détails. 2. Si l'on est arrêté sur quelque point, recourir au livre, puis recommencer à traiter la question. 3. Lorsque l'on est déjà en possession des méthodes et qu'il s'agit d'applications, on peut chercher seul d'emblée. 4. Il est bon alors de relire la chose dans le livre, à cause des remarques pouvant y être faites au sujet de la question. 5. Cette manière de trouver le plus de choses possible est à conseiller dans toutes les branches des mathématiques. 6. Lorsqu'il s'agit de raisonnements, on doit ou les *écrire*, ou les *parler complètement*. Lorsque l'on se contente de les *penser*, on peut passer sur des difficultés sans s'en apercevoir. »

Meccanica razionale di R. Marcolongo, professore ordinario de vella R. Università di Messina. Milano, Hoepli, 1905. (Deux vol. in-18 cartonnés de XII-271 et VI-325 pp, 59 fig. dans le texte). Prix : 6 lire.

Sommaire. I *Cinématique*. 1. Vecteurs. 2. Vitesse et accélération. 3. Mouvement fini d'un système rigide. 4. Mouvement instantané. 5. Mouvement continu. *Statique*. 1. Composition des forces. 2. Principe des vitesses virtuelles. 3. Equilibre des courbes funiculaires. II. *Dynamique et principes d'hydromécanique*. 1. Lois fondamentales du mouvement. 2. Mouvement d'un point. 3. Principe d'Alembert, équations de Lagrange. 4. Théorèmes généraux sur les mouvements d'un système. 5. Dynamique des systèmes. 6. Attraction des ellipsoïdes et théorie du potentiel newtonien. 7. Mécanique des fluides. — A la suite de chaque chapitre, on trouve des exercices, avec un aperçu de la solution. Il y en a 230 en tout. A la fin de l'ouvrage, il y a un bon index alphabétique.

La mécanique rationnelle de M. Marcolongo est rédigée avec clarté, avec concision aussi, grâce à l'emploi systématique des vecteurs; elle est enrichie, là où c'est utile, de notes concises, bibliographiques ou historiques.

Aufgaben aus der analytischen Mechanik von Dr. A. Fuhrmann, ordentl. Professor an der technischen Hochschule zu Dresden. I. Teil. Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig, Teubner, 1904. (In-12, cartonné de XII-206 pages). Prix : 8 Marcs 80.

Sommaire. *Introduction*. Problèmes 1-11 sur le calcul du poids et de la masse de corps non uniformément denses. 1. Problèmes 12-16 sur l'équilibre d'un point libre. 2. Problèmes 17-54 sur l'équilibre d'un point situé sur une courbe ou sur une surface. 3. Problèmes 55-105 sur la détermination du centre de gravité des lignes, des aires et des corps. 4. Problèmes 106-132 sur l'équilibre des systèmes solides ou déformables. 5. Problèmes 133-145 sur l'application du principe des vitesses virtuelles. 6. Problèmes 146-165 sur l'attraction des lignes, des aires et des corps. 7. Index.

Chaque chapitre est suivi de précieuses indications biliographiques.

The Dynamics, of Particles and of Rigid, Elastic, and Fluid Bodies, being Lectures on Mathematical Physics by A. G. WEBSTER, Ph. D. (Berol.), Professor of Physics, etc. Clark University, Worcester, Massachusetts. Leipzig, Teubner, 1904. (In-8°, cartonné, de XII-588 pp.). Prix : 14 Marcs.

SOMMAIRE. I. *Principes généraux*. 1. Cinématique du point. Lois du mouvement. 2. Cas particulier du mouvement d'un point matériel. 3. Principes généraux. Travail et énergie. 4. Principe de la moindre action. Équations générales du mouvement. 5. Oscillations et mouvements cycliques. II. *Dynamiques des systèmes rigides*. 6. Vecteurs. Distribution des masses. Mouvement instantané. 7. Rotation des corps. III. *Potentiel; dynamique des systèmes déformables*. 8. Potentiel newtonien. 9. Dynamique des systèmes déformables. 10. Statique des systèmes déformables. 11. Hydrodynamique. 12. Notes sur divers points d'analyse. 13. Index alphabétique très étendu.

Le Manuel de mécanique rationnelle de M. Webster ne suppose pas trop de connaissances mathématiques préliminaires; il est destiné à servir surtout à ceux qui veulent étudier la physique mathématique.

A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies with an introduction to the Problem of three Bodies, by E. T. WHITTAKER, M. A. Fellow and Lecturer of Trinity college, Cambridge, Cambridge : At the University Press, 1904. (Gr. in-8°, cartonné, de XII-414 pp.). Prix : 12 1/2 sh.

SOMMAIRE. 1. Cinématique. 2. Equations du mouvement. 3. Principes d'intégration. 4. Problèmes résolubles relatifs au mouvement du point. 5. Moments d'inertie; énergie cinétique d'un corps en mouvement; mouvement du centre de gravité. 6. Problèmes résolubles relatifs au mouvement des corps solides. 7. Théorie des vibrations. 8. Systèmes non holonomes. Systèmes à dissipation d'énergie. 9. Principes de Hamilton et de Gauss. 10. Systèmes hamiltoniens et leurs invariants intégraux. 11. Théorie des transformations en dynamique. 12. Propriétés des intégrales des systèmes dynamiques. 13. Le problème des trois corps. 14. Les théorèmes de Bruns et Poincaré. 15. Théorie générale des orbites. 16. Intégration par les séries trigonométriques. 17. Index. — Chaque chapitre est suivi d'exercices. Les exemples abondent dans le courant de l'ouvrage. Voir un compte rendu détaillé de M. J. Tannery, dans le n° de mars 1905 du *Bulletin des Sciences mathématiques*, où l'on fait ressortir le caractère à la fois élémentaire (au début) et élevé (au point d'arrivée) du *Treatise* de M. Whittaker. L'exécution typographique est admirable, mais le format trop grand.

Elements of the Kinematics of a Point and the Rational Mechanics of a Particle, by G. O. JAMES, Ph. D., Instructor in Mathematics and Astronomy Washington University, St. Louis. New-York, John Willey and Sons. London, Chapman and Hall, 1905. (Cartonné petit in-8°, XII-176 pages, 39 figures). Prix : 2 dollars.

SOMMAIRE. I. *Cinématique*. 1 Vecteurs. 2. Cinématique du point. 3-4. Applications aux mouvements rectilignes absolus ou relatifs. 5. Vitesse et accélé-

ration dans le mouvement curviligne. 6. Mouvements angulaires et aréolaires. 7-8. Mouvement absolu ou relatif par rapport à des axes. II. *Mécanique.* 9. Mécanique d'un point matériel libre. 10. Les unités de la mécanique. 11. Notions sur les forces de la nature. 12-13. Détermination de la force d'après le mouvement produit ou inversement. 14. Mouvement relatif. 15. Mouvement d'un point matériel libre sur la terre. 16-17. Mouvement d'un point matériel non libre, en général, ou sur la terre (pendule, pendule de Foucault).

L'ouvrage est destiné à ceux qui, après un cours élémentaire de mécanique, veulent continuer l'etude de cette science en se servant des premiers éléments de l'analyse infinitésimale. L'auteur recourt à des solutions approchées dans les cas où il faudrait employer des théories d'analyse trop élevées.

NOTES MATHÉMATIQUES.

×**11.** *Propriétés de maximum et minimum concernant les centres de similitude de deux cercles.* Soient O et O′ les deux cercles, S et S′ les centres interne et externe de similitude, δ et Δ les distances du centre O aux polaires de S et S′ par rapport au cercle O, δ' et Δ' les distances du centre O′ aux polaires de S et S′ par rapport au cercle O′.

On a les propriétés suivantes : 1° *Le point* S *est le point de la ligne des centres tel que la somme des tangentes issues de ce point aux deux cercles est maxima.*

2° *Le point* S′ *est le point de la ligne des centres tel que la différence des longueurs des tangentes issues de ce point aux deux cercles est minima.*

3° *Le point* S *est le point de la ligne des centres tel que* $\delta + \delta'$ *est minima.*

4° *De point* S′ *est le point de la ligne des centres tel que* $\Delta - \Delta'$ *est maxima.* (E. N. Barisien).

12. *Généralisation des questions* 1410 *et* 1412 (*Mathesis*, 1904, pp. 21 et 80).

I. Soient A_1 B_1, C_1 les points où les droites joignant les sommets d'un triangle ABC à un même point P rencontrent les côtés opposés On peut se proposer de *trouver le lieu d'un point* P *tel que le cercle passant par* A_1, B_1, C_1 *touche le côté* BC.

Si ce cercle coupe AB, AC en C_2, B_2, on a

$$AB_1 \cdot AB_2 = AC_1 \cdot AC_2, \quad \overline{CA_1}^2 = CB_1 \cdot CB_2, \quad \overline{BA_1}^2 = BC_1 \cdot BC_2,$$

d'où l'on déduit

$$\left(b - \frac{\overline{CA_1}^2}{CB_1}\right) AB_1 = \left(c - \frac{\overline{BA_1}^2}{BC_1}\right) AC_1.$$

L'équation du lieu (P), en coordonnées barycentriques, est donc la quintique

$$\frac{b^2}{\beta(\alpha+\gamma)}-\frac{c^2}{\gamma(\alpha+\beta)}=\frac{a^2(\beta-\gamma)}{\alpha(\beta+\gamma)^2}.$$

1. Pour que cette courbe passe par le point I(a, b, c), on doit avoir

$$(b-c)\,[8p^2(p-a)-abc]=0,$$

ou soit $b=c$, soit $a=8p\cos^2\frac{1}{2}\,\mathrm{A}$.

2. Pour qu'elle passe par I_a, on doit poser

$$(b-c)\,[8p(p-a)^2+abc]=0,$$

ce qui exige $b=c$.

3. Si elle passe par I_b, on trouve

$$(b+c)\,[8(p-b)^2(p-c)-abc]=0,$$

de sorte que la condition cherchée est $a=8(p-b)\sin^2\frac{1}{2}\,\mathrm{A}$.

4. La condition pour qu'elle passe par le point de Lemoine, est

$$\frac{1}{a^2+c^2}-\frac{1}{a^2+b^2}=\frac{b^2-c^2}{(a^2+c^2)^2};$$

cela a lieu si $b=c$ ou si $\sin 2\omega=\frac{1}{2}\,\mathrm{tg\,A}$.

II. Soient B_1', C_1' les isotomiques des points B_1, C_1. Pour que la circonférence $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1'\mathrm{C}_1'$ touche BC, le point P doit se trouver sur la quintique

$$\frac{b^2}{\alpha+\gamma}-\frac{c^2}{\alpha+\beta}=\frac{a^2(\beta^2-\gamma^2)}{\beta\gamma\,(\beta+\gamma)^2}.$$

En exprimant que ce lieu passe par le point de Gergonne $\left(\frac{1}{p-a},\ \frac{1}{p-b},\ \frac{1}{p-c}\right)$, on trouve la condition

$$(b-c)\,(bc-a^2)=0,$$

de sorte que le triangle ABC est isoscèle ou *moyen* en A.

(Déprez).

×14. *Sur les médianes d'un triangle sphérique.* Dans une note de *Mathesis*, 1904, p. 161, M. E. B. Escott s'occupe de la proposition suivante, énoncée par Catalan :

Dans tout trièdre, la somme des angles formés par les arêtes avec les bissectrices des faces opposées est moindre que la somme des faces.

Remplaçons le trièdre par le triangle sphérique correspondant ABC

et menons les trois médianes AA', BB', CC'; le théorème de Catalan pourra s'énoncer ainsi :

Dans tout triangle sphérique ABC, *la somme des médianes est moindre que la somme des côtés.*

Il est faux quand les trois côtés sont obtus.

En effet, prolongons les arcs AB, BC, AA' jusqu'à leur rencontre au point A_1 diamétralement opposé à A, et soient M, N, P les points d'intersection des demi-circonférences ABA_1, ACA_1, $AA'A_1$ avec le grand cercle décrit de A comme pôle. Si AB et AC $< \frac{\pi}{2}$, on a aussi AA' < AA'P ou $< \frac{\pi}{2}$; si AB et AC $> \frac{\pi}{2}$, AA' est $> \frac{\pi}{2}$.

Supposons AB et AC $> \frac{\pi}{2}$, de sorte que $A_1A' < \frac{\pi}{2}$; en prolongeant alors A_1A' de $A'E = A_1A'$ et en joignant EB, on déduit du triangle A_1BE que $A_1A' < \frac{A_1B + A_1C}{2}$ ou

$$\pi - \alpha < \frac{\pi - c + \pi - b}{2}, \quad \text{ou} \quad \alpha > \frac{b+c}{2},$$

les médianes AA', BB', CC' étant désignées par α, β, γ.

Par conséquent, si les trois côtés a, b, c d'un triangle sont obtus, on a

$$\alpha + \beta + \gamma > a + b + c.$$

(A. C.).

15. *A propos d'un théorème sur le triangle.* Le théorème signalé comme nouveau par M. J. Kariya (*Enseign. mathém.*, 1904, pp. 130-132) et auquel se rapporte la note de M. Neuberg, *Le point de Kariya* (*Mathesis*, mai 1905, p. 117) a été donné par moi en 1896, dans le *Periodico di Matematica* (Roma, XI, p. 71). Le cas particulier OD = 2OX est l'objet de la question 267 posée (*loc. cit.*, X, 1895, p. 75) par M. S. Catania; la solution que j'en ai donnée à l'endroit cité, consiste dans la remarque que les triangles ABC, DEF (v. la note de M. Neuberg) sont polaires réciproques par rapport à un certain cercle de centre O. Cette remarque, faite aussi plus tard par M. Harold Hilton (*Enseign. math.*, 1904, p. 237), m'a conduit naturellement à l'énoncé plus général que M. Kariya croyait nouveau.

(V. Retali).

Notre article de la p. 117 aurait dû mentionner également le n° de janvier 1905 de l'Enseignement mathématique, qui renferme des correspondances de MM. Cantoni, Daniels (Fribourg, Suisse) et Stolp (Kampen, Hollande). Nous réparons ici cet oubli involontaire.

(J. N)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1357.

(Voir *Mathesis*, (3) II; p. 56).

Une droite AB, *de longueur constante l, se meut entre deux droites fixes* Ox, Oy. *Le lieu des sommets des ellipses décrites par les différents points de la droite* AB *est une sextique et le lieu des foyers de ces courbes est une hyperbole.* (De la Gournerie).

Solution par M. Rose. I. Soient ω l'angle des axes, a et b les segments MB, MA de AB déterminés par un point M de cette droite. L'ellipse décrite par M a pour équation

$$f(x, y) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\omega - 1 = 0, \qquad (1)$$

avec la condition

$$a + b = l. \qquad (2)$$

Si (x, y) sont les coordonnées d'un sommet S de cette courbe, la tangente en ce point est perpendiculaire au rayon OS; on a donc l'égalité,

$$1 + mm' + (m + m')\cos\omega = 0, \qquad (\alpha)$$

où l'on fait

$$m = \frac{y}{x}, \qquad m' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{b^2x - aby\cos\omega}{a^2y - abx\cos\omega},$$

c'est-à-dire

$$ay^2\cos\omega + (a - b)xy - bx^2\cos\omega = 0. \qquad (3)$$

Pour avoir le lieu des sommets S, il faut éliminer a et b entre les équations (1), (2) et (3). Si l'on pose

$$y + x\cos\omega = X, \qquad x + y\cos\omega = Y,$$

les équations (2) et (3) donnent

$$b = \frac{lyY}{xX + yY}, \qquad a = \frac{lxX}{xX + yY}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve

$$(xX + yY)^2 (X^2 + Y^2 - 2XY\cos\omega) = l^2 X^2 Y^2,$$

ou

$$(xX + yY)^2 (x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega)\sin^2\omega = l^2 X^2 Y^2 ;$$

ce qui est l'équation d'une sextique.

II. Pour trouver un foyer $F(\alpha, \beta)$ de la courbe (1), nous exprimons que les tangentes issues de ce point sont isotropes; autrement dit, leurs coefficients angulaires vérifient l'équation (α) où l'on fait $m' = m$:

$$m^2 + 2m\cos\omega + 1 = 0. \qquad (4)$$

Ces tangentes étant réprésentées par

$$y - \beta = m(x - \alpha), \qquad (5)$$

écrivons qu'elles rencontrent l'ellipse (1) en deux points confondus; à cet effet nous déduisons de (1) et (5) l'équation homogène en x et y :

$$a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy\cos\omega - a^2b^2\frac{(y - mx)^2}{(\beta - m\alpha)^2} = 0 ;$$

le premier membre doit être un carré parfait en x et y, donc

$$[(\beta - m\alpha)^2\cos\omega - ab m]^2 = [(\beta - m\alpha)^2 - b^2][(\beta - m\alpha)^2 - a^2m^2]$$

ou simplement

$$[a^2\sin^2\omega - a^2]m^2 + 2[ab\cos\omega - \alpha\beta\sin^2\omega] + \beta^2\sin^2\omega - b^2 = 0.$$

En identifiant ce résultat avec (4), il vient

$$a^2\sin^2\omega - a^2 = \frac{ab\cos\omega - \alpha\beta\sin^2\omega}{\cos\omega} = \beta^2\sin^2\omega - b^2. \qquad (6)$$

Entre les équations (6) et (2) il faut éliminer a et b. Or, en égalant les membres extrêmes de la suite (6) au membre intermédiaire, on obtient

$$a(a + b)\cos\omega = \alpha(\alpha\cos\omega + \beta)\sin^2\omega,$$
$$b(a + b)\cos\omega = \beta(\beta\cos\omega + \alpha)\sin^2\omega,$$

d'où, par addition.

$$\frac{l^2\cos\omega}{\sin^2\omega} = (\alpha^2 + \beta^2)\cos\omega + 2\alpha\beta,$$

équation d'une hyperbole.

Note. M. P. Bastin a résolu la même question en prenant pour axes coordonnés les bissectrices des angles formés par les droites données

Ox, Oy. Les calculs sont élégants, mais un peu longs, et nous devons nous contenter de communiquer ici les résultats.

L'équation du lieu des sommets des ellipses variables est

$$(x^2+y^2)(x^2-y^2)^2\sin^2\omega = l^2\left(y^2\sin^2\frac{\omega}{2} - x^2\cos^2\frac{\omega}{2}\right)^2.$$

Lorsque les droites données Ox, Oy sont rectangulaires, l'équation précédente se décompose en :

$$y = \pm x, \quad x^2+y^2 = l^2;$$

on trouve donc les droites Ox, Oy et la circonférence décrite par le milieu de AB, résultats qui s'expliquent à priori.

L'équation du lieu (S), en coordonnées polaires ρ, θ, est

$$\rho = \pm\frac{l}{\sin\omega}\left(1+\frac{\cos\omega}{\cos 2\theta}\right).$$

Si nous appelons Ox', Oy' les bissectrices des angles des droites Ox, Oy et Ox'', Oy'' les bissectrices des angles formés par Ox', Oy', la discussion de l'équation précédente révèle les circonstances suivantes :

La courbe comprend 1° deux branches coupant Ox' aux points $x = \pm l\cot\frac{\omega}{2}$ et asymptotiques des droites Ox', Oy'; 2° une partie en forme de *huit* inscrite dans les triangles formés par les symétriques Ox_1, Oy_1 des droites Ox, Oy par rapport à Ox'' et par les droites $y = \pm l\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}$; 3° deux branches infinies qui touchent à l'origine O les mêmes droites Ox_1, Oy_1 et ont pour asymptotes Ox'', Oy''.

Pour le lieu des foyers, M. Bastin trouve

$$\rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \frac{l^2\cos\omega}{\sin^2\omega}, \quad \text{ou} \quad x^2-y^2 = \frac{l^2\cos\omega}{\sin^2\omega}.$$

Lorsque l'angle ω est droit, on trouve les droites Ox, Oy.

Question 1476.

(Voir *Mathesis*, (3); IV, p. 153).

Trouver une courbe telle que le rapport anharmonique de deux points fixes de l'axe Ox et des deux points où la tangente et la normale menée en

un même point M *de la courbe rencontrent l'axe* Ox, *ait une valeur constante* a. *Cas particulier de* $a = -1$. (ABRAMESCU).

Même question en remplaçant l'un des points fixes par le pied de l'ordonnée du point M. (J. NEUBERG).

Solution par M. GR. ORĂSANU. Appelons α et β les abscisses des points fixes A et B, x_1 et x_2 les abscisses des points de rencontre T, N de l'axe Ox avec la tangente et la normale menée au point $M(x, y)$; nous aurons

$$\frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \beta} : \frac{x_2 - \alpha}{x_2 - \beta} = a$$

ou

$$x_1 x_2 - \frac{\beta - a\alpha}{1 - a} x_1 - \frac{\alpha - a\beta}{1 - a} x_2 + a\beta = 0. \qquad (1)$$

Prenons l'origine des coordonnées de manière que

$$\alpha = a\beta;$$

l'équation (1) deviendra :

$$x_1 [x_2 - \beta (a + 1)] + a\beta^2 = 0. \qquad (2)$$

Mais

$$x_1 = \frac{xy' - y}{y'}, \quad x_2 = x + yy';$$

l'équation à intégrer sera donc

$$(xy' - y) [x + yy' - \beta (a + 1)] + a\beta^2 y' = 0. \qquad (3)$$

Faisant le changement de variables

$$y - xy' = \frac{X}{Y}, \quad y' = \frac{1}{Y}; \qquad (4)$$

l'équation (3) devient

$$X [Y(Y - XY') - \beta (a + 1) YY' + 1] - a\beta^2 YY' = 0;$$

d'où

$$\frac{Y dY}{Y^2 + 1} - \frac{X dX}{X^2 + \beta (a + 1) X + a\beta^2} = \frac{X dX}{(X + \beta)(X + a\beta)},$$

et, en intégrant,

$$f(X, Y) - C(Y^2 + 1) - \left(\frac{X + a\beta}{X + \beta}\right)^{\frac{a+1}{a-1}} [X^2 + \beta (a + 1) X + a\beta^2] = 0. \qquad (5)$$

Le changement (4) est précisément une transformation par polaires

réciproques par rapport à la parabole $y^2 - 2x = 0$. Par conséquent, pour avoir la courbe cherchée, il faut transformer la courbe (5) par polaires réciproques par rapport à la parabole $y^2 - 2x = 0$, c'est à-dire éliminer X et Y entre les équations (5) et

$$\frac{1}{f'_x} = \frac{-y}{f'_y} = \frac{x}{f'_z}$$

où l'on fait $z = 1$. Dans le cas particulier de $a = -1$, l'équation (5) devient

$$C(Y^2 + 1) - X^2 + \beta^2 = 0,$$

et l'élimination indiquée ci-dessus nous donne

$$\frac{x^2}{\beta^2 + C} + \frac{y^2}{C} - 1 = 0 ;$$

c'est une famille de coniques homofocales ayant les points fixes donnés comme foyers.

Pour résoudre la deuxième partie de la question nous prenons le point resté fixe pour origine.

En remplaçant dans l'équation (1) α par O et β par x et en faisant toutes les simplifications nécessaires, nous obtiendrons l'équation à intégrer :

$$(xy' - y)y' + a(x + yy') = 0.$$

Le changement de variables

$$xy' - y = Y, \quad y' = X, \tag{6}$$

nous donne

$$XY(1 - a) + aY'(1 + X^2) = 0,$$

d'où

$$\frac{dY}{Y} = \frac{a - 1}{a} \frac{X dX}{X^2 + 1}$$

et, en intégrant,

$$\varphi(XY) \equiv Y - C(X^2 + 1)^{\frac{a-1}{2a}} = 0. \tag{7}$$

Le changement (6) est la transformation par polaires réciproques par rapport à la parabole $x^2 - 2y = 0$. Par conséquent, pour obtenir la courbe cherchée il faut transformer la courbe (7) par polaires réciproques par rapport à la parabole $x^2 - 2y = 0$, c'est-à-dire éliminer X et Y entre les équations (7) et

$$\frac{x}{\varphi'_x} = \frac{-1}{\varphi'_y} = \frac{-y}{\varphi'_z}$$

où l'on fait $z = 1$. Dans le cas particulier de $a = -1$ l'équation (7) devient

$$Y - C(X^2 + 1) = 0.$$

L'élimination indiquée ci-dessus donne la parabole

$$x^2 = 4C(y + c).$$

Question 1504.

(Voir *Mathesis*, (3), V, p. 29).

Chercher une courbe rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy, *telle que si en l'un quelconque* M *de ses points on mène l'ordonnée* MP, *la tangente qui coupe* Ox *en* T, *la normale qui coupe* Oy *en* N', *on ait*

$$\overline{TP}^2 + \overline{ON'}^2 = \overline{OM}^2. \qquad \text{(Rosz)}$$

Solution par MM. Abramescu, H. Brocard, De Roy, Dupont, H. Lez, Verheugen. L'équation différentielle de la courbe est

$$\left(y + \frac{x}{y'}\right)^2 + \frac{y^2}{y'^2} = x^2 + y^2,$$

ou

$$x^2y'^2 - 2xyy' - (x^2 + y^2) = 0. \qquad (1)$$

Comme elle est homogène, posons $y = ux$, d'où $y' = u + u'x$, et l'équation (1) devient

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 x^2 = 1 + 2u^2, \quad \text{ou} \quad \frac{du}{\sqrt{1 + 2u^2}} = \frac{dx}{x},$$

le double signe étant sous-entendu devant $\sqrt{1 + 2u^2}$.

Intégrant, on trouve,

$$\log cx = \frac{1}{\sqrt{2}} \log (u\sqrt{2} + \sqrt{1 + 2u^2});$$

donc

$$cx = (u\sqrt{2} + \sqrt{1 + 2u^2})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad \text{ou} \quad cx^{\sqrt{2}} = u\sqrt{2} + \sqrt{1 + 2u^2}$$

ou encore

$$u = \frac{c^2x^{2\sqrt{2}} - 1}{2c\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}}}.$$

Remplaçons u par $\frac{y}{x}$, et nous aurons les courbes cherchées

$$y = \frac{x}{2}\left(ax^{\sqrt{2}} - \frac{1}{ax^{\sqrt{2}}}\right),$$

a étant une constante arbitraire.

Question 1510.

(Voir *Mathesis*, 3, V, p. 56).

Les hauteurs AA′, BB′, CC′ *d'un triangle* ABC *se coupant au point* H. *posons* $\frac{AH}{HA'} = \alpha$, $\frac{BH}{HB'} = \beta$, $\frac{CH}{HC'} = \gamma$.

1° *Démontrer les relations*

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \alpha + 1, \quad \cos A = \frac{\alpha}{\alpha + 2}\cos(B - C),$$

$$b^2 + c^2 - a^2 = \frac{2\alpha}{\alpha + 1}\overline{AA'}^2,$$

$$\alpha\beta\gamma - (\alpha + \beta + \gamma) = 2.$$

2° *Si l'on donne* αH *et le centre de gravité* O *du triangle* ABC, *les points* A, A′ *et le milieu* A_1 *de* BC *décrivent des circonférences et le côté* BC *tourne autour d'un point fixe.*

3° *Si l'on donne* α *et les sommets* B, C, *les points* A, H *décrivent des ellipses.*

4° *Quel est le lieu du sommet* C *lorsque les sommets* A *et* B *restent fixes et que* α *a une valeur donnée?* (J. Neuberg).

Solution par MM. Barisien, H. Lez, Plakhovo, Rose, Bastin, Dupont et Van Dinter.

1° On sait que $AH = 2R\cos A$, $HA' = 2R\cos B\cos C$; donc

$$\alpha = \frac{\cos A}{\cos B\cos C}, \quad \beta = \frac{\cos B}{\cos C\cos A}, \quad \gamma = \frac{\cos C}{\cos A\cos B}. \qquad (1)$$

On en conclut

$$\alpha + 1 = \frac{\cos A + \cos B\cos C}{\cos B\cos C} = \frac{-\cos(B+C) + \cos B\cos C}{\cos B\cos C} = \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$$

$$\frac{\alpha}{\alpha+2} = \frac{\cos A}{\cos A + 2\cos B\cos C} = \frac{\cos A}{-\cos(B+C) + 2\cos B\cos C} = \frac{\cos A}{\cos(B-C)},$$

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos A = 2bc.\alpha\cos B\cos C = 2\alpha.b\cos C.c\cos B$$
$$= 2\alpha.A'C.A'B = 2\alpha.AA'.HA'. \qquad (2)$$

Or, de $AH : HA' = \alpha$, on déduit

$$\frac{AH + HA'}{HA'} = \frac{\alpha + 1}{1}, \quad HA' = \frac{AA'}{\alpha + 1};$$

par suite, la relation (2) devient

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2\alpha . AA' . \frac{AA'}{\alpha + 1} = \frac{2\alpha}{\alpha + 1} \overline{AA'}^2 .$$

D'après une formule connue,

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1. \qquad (3)$$

Or, on peut résoudre les égalités (1) par rapport à cos A, cos B, cos C, ce qui donne

$$\alpha\beta\gamma = \frac{1}{\cos A \cos B \cos C}, \quad \cos^2 A = \frac{1}{\beta\gamma}, \quad \cos^2 B = \frac{1}{\gamma\alpha}, \quad \cos^2 C = \frac{1}{\alpha\beta}.$$

Au moyen de ces relations l'égalité (3) devient

$$\alpha\beta\gamma - (\alpha + \beta + \gamma) = 2.$$

2° Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC; il est fixe. puisque $GO = \frac{1}{2} HG$. Comme $OA_1 = \frac{1}{2} AH$, le rapport $OA_1 : HA' = \frac{1}{2}\alpha$. Mais si OH rencontre BC en P, on a $\frac{HP}{OP} = \frac{HA'}{OA_1} = \frac{2}{\alpha}$; donc P est un point fixe de la droite GH, et BC tourne autour de ce point.

Le lieu de A' est visiblement la circonférence de diamètre HP, et celui de A_1 est la circonférence de diamètre OP.

Menons par A une parallèle BC, qui rencontre HG en P'; comme $\frac{P'H}{HP} = \frac{AH}{HA'} = \alpha$, le point P' est fixe; donc le point A décrit la circonférence de diamètre HP'.

3° Si l'on donne B, C, α, la relation $tg B \, tg C = \alpha + 1$ montre que BA et CA sont des cordes supplémentaires d'une ellipse dont B et C sont les extrémités d'un axe et dont le rapport des carrés des axes est $\frac{a'^2}{a^2} = \alpha + 1$, $2a'$ désignant l'axe qui est perpendiculaire en A_1 à BC.

Quant au point H, on peut observer que le rapport $HA' : AA'$ étant constant et A décrivant une ellipse, il en est de même de H. On pourrait aussi remarquer que l'égalité $tg B \, tg C = \alpha + 1$ donne $tg HBC . tg HCA = \frac{1}{\alpha + 1}$; alors BH et CH sont des cordes supplémentaires d'une seconde ellipse. On suppose ici $\alpha + 1 > 0$.

4° Supposons qu'on donne A, B et α. Si l'on prend pour axes coordonnés AB et la perpendiculaire en A, et que x, y désignent les coordonnées de C, on trouve aisément

$$\operatorname{tg} A = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{y}{c - x}. \tag{4}$$

Or, la relation $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \alpha + 1$ peut s'écrire

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} (A + B) + (\alpha + 1) = 0, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} B \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} + (\alpha + 1) = 0$$

ou

$$\operatorname{tg}^2 B - \alpha \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \alpha + 1 = 0.$$

En introduisant les valeurs (4), on trouve pour le lieu de C la cubique

$$(1 + \alpha)\, x\, [(x - c)^2 + y^2] = \alpha c y^2.$$

Note. Si l'on mène par A′ une parallèle à BH qui rencontre AB en D, le point D est fixe; car AB : BD = AH : HA′ = α. D'après cela pour construire le lieu (C), on joint B et D à un point quelconque A′ de circonférence de diamètre AB; la perpendiculaire abaissée de A sur DA′ rencontre BA′ en un point C du lieu.

Les deux droites BA′ et AC sont des rayons homologues de deux faisceaux entre lesquels il existe une correspondance (2, 1). Si l'on donne la direction AC, la perpendiculaire abaissée de D sur cette direction rencontre la circonférence en deux points, d'où deux droites BA′; mais si l'on donne la direction BA′, AC est déterminé d'une manière unique. Il résulte de là que le lieu (C) est une cubique ayant un point simple en A, un point double en B.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1233. Soient AA_1, BB_1, CC_1 les médianes d'un triangle ABC, G leur point de concours; AA_2, BB_2, CC_2 les symédianes, K leur point de concours; D, E, F les projections de G, et D′, E′, F′ celles de K sur BC, CA, AB. Démontrer la relation

$$\frac{A_2D'}{A_1D}(b^2 + c^2) + \frac{B_2E'}{B_1E}(c^2 + a^2) + \frac{C_2F'}{C_1F}(a^2 + b^2) = 12S \operatorname{tg} \omega,$$

ω désignant l'angle de Brocard du triangle ABC. (Sanjana).

Soit AH la hauteur issue de A; si $b > c$, on a

$$A_1D = \tfrac{1}{2}A_1H = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{b^2-c^2}{2a},\quad \frac{A_2D'}{A_2H} = \frac{KA_2}{AA_2} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2},$$

$$A_2H = A_2B - HB = \frac{ac^2}{b^2+c^2} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

$$= \frac{2a^2c^2 - a^2b^2 - a^2c^2 - c^4 + b^4}{2a(b^2+c^2)} = \frac{(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2a(b^2+c^2)}$$

$$\frac{A_2D'}{A_1D}(b^2+c^2) = \frac{3a^2(b^2+c^2-a^2)}{(a^2+b^2+c^2)}\cdots$$

1994. Le lieu du centre de similitude d'un cercle fixe et d'un cercle variable d'un faisceau se compose de deux coniques. (E. N. Barisien).

QUESTIONS PROPOSÉES.

1996. On considère une arcade ABC de cycloïde et un point M situé dans l'espace compris entre la courbe et les tangentes menées en A et C du côté opposé à la courbe. Trouver l'aire engendrée par la perpendiculaire abaisée de M sur une droite roulant sur l'arcade ABC. (E. N. Barisien).

×**1997.** Mener à deux circonférences données A, B deux tangentes parallèles dont les distances à un point donné M aient un rapport donné.

1998. Sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC on porte les longueurs $BD = \lambda.AB$, $CE = \lambda.BC$, $AF = \lambda.CA$. Peut-on choisir λ de manière que les points D, E, F soient en ligne droite ou que les droites AD, BE, CF concourent en un même point? Entre quelles limites peuvent varier l'aire du triangle DEF et les sommes

$$\overline{DE}^2 + \overline{EF}^2 + \overline{FD}^2, \quad \overline{AD}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CF}^2?$$

(J. Neuberg).

1999. Soient P, Q, deux points conjugués par rapport à une conique U. La droite PQ rencontre les côtés d'un triangle ABC inscrit à cette courbe, aux points A′, B′, C′, dont on prend les conjugués harmoniques A″, B″, C″ par rapport aux points P et Q. Démontrer que les droites AA″, BB″, CC″ concourent en un point de U.

2000. Trouver les lieux des sommets des triangles A′B′C′ isobariques avec ABC et symétriquement semblables à ABC. (H. Van Aubel).

MÉMORIAL MATHÉMATIQUE.

Juillet.

1. **1788.** Naissance de *Poncelet*, à Metz.
2. **1699.** Naissance de *R. F. de Sluze*, à Visé.
3. **1830.** Naissance de *F. de Jonquières*, à Carpentras.
4. **1901.** Mort de *P. G. Tait*, à Challenger Lodge, Wardie.
5. **1820.** Naissance de *W. J. M. Rankine*, à Edimbourg.
7. **1816.** Naissance de *R. Wolf*, à Falländen près de Zurich.
8. **1695.** Mort de *Huygens*, à la Haye.
9. **1879.** Mort de *W. Eisenlohr*, à Carlsruhe.
10. **1682.** Naissance de *R. Cotes*, à Burbage, dans le Leicestershire.
11. **1732.** Naissance de *Lalande*, à Bourg-en-Bresse.
13. **1833.** Naissance de *E. Schering*, à Sandbergen.
14. **1800.** Mort de *Mascheroni*, à Pavie.
16. **1801.** Naissance de *J. Plücker*, à Elberfeld.
17. **1831.** Naissance de *A. Mannheim*.
18. **1766.** Naissance de *J. R. Argand*, à Genève.
20. **1866.** Mort de *Riemann*, à Selasca près Intra, sur le Lac majeur.
21. **1852.** Naissance de *Ed. Weyr*, à Prague.
22. **1795.** Naissance de *Lamé*, à Tours.
23. **1863.** Mort de *Ed. Weyr*, à Zabor.
24. **1856.** Naissance de *Em. Picard*.
26. **1785.** Naissance de *Lefebure de Fourcy*, à Paris.
27. **1667.** Naissance de *Jean I. Bernoulli*, à Bâle.
1827. Naissance de *Th. Fl. Moutard*, à Soultz.
28. **1818.** Mort de *Monge*, à Paris.
29. **1839.** Mort de *G. de Prony*, à Asnières, près de Paris.
31. **1704.** Naissance de *G. Cramer*, à Bâle.

SUR QUELQUES CONIQUES ASSOCIÉES AU TRIANGLE;

par M. E. Weber (Liége).

(*Suite et fin ;* voir p. 148).

6. Nous avons retrouvé la conique [GK] dans l'étude de la transformation suivante :

Soient : P un point quelconque du plan ABC; P_a, P_b, P_c, P'_a, P'_b, P'_c les points où les droites AP, BP, CP rencontrent les côtés du triangle ABC et de son complémentaire $G_aG_bG_c$. Les droites $G_aP'_a$, $G_bP'_b$, $G_cP'_c$ concourent en un même point P'. Si l'on observe que

$$\frac{BP_a}{CP_a}=\frac{G_cP'_a}{G_bP'_a},\quad \dots$$

on voit que P' est le *complémentaire du réciproque* de P par rapport au triangle ABC, et que P est le *réciproque de l'anticomplémentaire de* P'. Soient (x, y, z), (x', y', z') les coordonnées barycentriques des points P, P' dans le triangle ABC ; on a

$$x' : y' : z' = \frac{1}{y}+\frac{1}{z} : \frac{1}{z}+\frac{1}{x} : \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

$$= x(y+z) : y(z+x) : z(x+y),$$

$$x : y : z = \frac{1}{-x'+y'+z'} : \frac{1}{x'-y'+z'} : \frac{1}{x'+y'-z'}.$$

La transformation (PP') s'est souvent présentée dans la géométrie du triangle. Ainsi, K *est le complémentaire du réciproque de* H *et le réciproque de* H *est l'anticomplémentaire de* K : autrement dit, *les droites qui joignent les milieux des côtés de* ABC *aux milieux des hauteurs correspondantes se coupent en* K. De même, *la conique qui touche les côtés de* ABC *en* P_a, P_b, P_c *a pour centre le point* P'.

Lorsque P décrit une droite *d*, son réciproque P_1 décrit une conique Δ circonscrite au triangle ABC, et le complémentaire P' de P_1 parcourt une conique Δ' passant par G_a, G_b, G_c.

Si Δ' est la conique [GK], l'anticomplémentaire Δ de [GK] par rapport au triangle ABC est représentée par l'équation (6) en coordonnées barycentriques relatives à ABC, et la transformée par points

réciproques de Δ est la droite

$$\Sigma a^2(b^2+c^2)x=0, \quad \text{ou} \quad \Sigma\frac{y+z}{a^2}=0,$$

qui est la complémentaire de la droite de Lemoine de ABC.

Le centre S′ de Δ est l'anticomplémentaire de S; il s'obtient en prolongeant SG de GS′ = 2SG. C'est le symétrique de K par rapport à S et aussi le complémentaire de K, car G′S′ = $\frac{1}{2}$ KG. Les coordonnées barycentriques de S′ sont b^2+c^2, c^2+a^2, a^2+b^2.

Si A′B′C′ est le triangle formé par les tangentes menées en A, B, C à la conique Δ, le centre et l'axe d'homologie des triangles ABC, A′B′C′ sont donnés par

$$x:y:z=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}:\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}:\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},$$

$$\frac{x}{a^2(b^2+c^2)}+\frac{y}{b^2(c^2+a^2)}+\frac{z}{c^2(a^2+b^2)}=0.$$

Le centre d'homologie est le milieu de la distance des points de Brocard Ω, Ω′.

7. Le quatrième point d'intersection de la conique Δ′ avec le cercle ABC dont l'équation barycentrique est

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy=0,$$

a pour coordonnées

$$\frac{a^2}{b^2-c^2}, \quad \frac{b^2}{c^2-a^2}, \quad \frac{c^2}{a^2-b^2}$$

ou

$$\frac{\sin A}{\sin(B-C)}, \quad \frac{\sin B}{\sin(C-A)}, \quad \frac{\sin C}{\sin(A-B)};$$

c'est le pôle trilinéaire de la droite OK, l'inverse du réciproque du point de Steiner et le foyer de la parabole de Kiepert.

La conique [GK] et le cercle de Brocard, qui ont pour équations en coordonnées normales

$$\Sigma x^2=\Sigma\frac{b^2+c^2}{bc}yz, \quad \Sigma x^2=\Sigma\frac{a^2}{bc}yz$$

se coupent sur la conique

$$\Sigma yz\cos A=0,$$

qui est la transformée isogonale de l'axe orthique de ABC et a pour centre le point de Lemoine de ABC.

8. Soit A'B'C' un triangle homothétique au triangle de référence par rapport au point P. Nous nous proposons d'étudier le système des coniques U qui passent par les intersections des côtés non parallèles des triangles ABC, A'B'C', le point P restant fixe et le triangle A'B'C' étant variable. Nos développements suivent de près ceux que M. Neuberg a publiés dans le JMS, 1886, pp. 241-245 et dans *Mathesis* (1896, p. 164).

En coordonnées barycentriques, l'équation de la droite de l'infini est

$$\mathrm{I} \equiv x + y + z = 0;$$

donc si α, β, γ sont les coordonnées absolues de $\mathrm{P}(\alpha + \beta + \gamma = 1)$, les équations homogènes des droites B'C', C'A', A'B' sont

$$\frac{x}{\alpha} - m\mathrm{I} = 0, \quad \frac{y}{\beta} - m\mathrm{I} = 0, \quad \frac{z}{\gamma} - m\mathrm{I} = 0,$$

m désignant le rapport des distances des droites B'C' et du point P à BC.

Une cubique quelconque passant par les neuf points d'intersection des côtés des deux triangles A'B'C', ABC a pour équation

$$xyz - \lambda\left(\frac{x}{\alpha} - m\mathrm{I}\right)\left(\frac{y}{\beta} - m\mathrm{I}\right)\left(\frac{z}{\gamma} - m\mathrm{I}\right) = 0.$$

En prenant $\lambda = \alpha\beta\gamma$, on peut séparer la droite I qui contient trois de ces points et il restera la conique qui passe par les six autres points :

$$\mathrm{U} = m^2\mathrm{I}^2 - m\mathrm{I}\Sigma\frac{x}{\alpha} + \Sigma\frac{xy}{\alpha\beta} = 0, \tag{7}$$

ou

$$\mathrm{U} \equiv m^2\mathrm{I}^2 - m\mathrm{IL} + \mathrm{U}_0 = 0.$$

$\mathrm{L} = 0$ est l'équation de la polaire trilinéaire de P; U_0 est la conique U qui correspond à $m = 0$, elle est circonscrite à ABC et le centre d'homologie de ce triangle et du triangle formé par les tangentes menées en A, B, C à U_0 est le réciproque de P.

Les coniques U sont homothétiques entre elles, car elles ont en commun les points de rencontre I avec U_0. En éliminant z entre les équations de I et U_0 on trouve l'équation

$$\beta x^2 + (\alpha + \beta - \gamma)xy + \alpha y^2 = 0, \tag{8}$$

dont le discriminant est

$$\Delta = (\alpha + \beta - \gamma)^2 - 4\alpha\beta \equiv \Sigma\alpha^2 - 2\Sigma\alpha\beta.$$

Or, $\Delta = 0$ est l'équation de l'ellipse qui touche les côtés de ABC en leurs milieux. Par conséquent, si P est un point quelconque de l'ellipse Δ, les coniques U sont des paraboles.

Si P est à l'intérieur de Δ, on obtient des ellipses. En particulier, on retrouve les cercles de Tucker en supposant que U_0 soit le cercle circonscrit du triangle ABC, c'est-à-dire $\alpha : \beta : \gamma = a^2 : b^2 : c^2$.

Si P est extérieur à Δ, les courbes U sont des hyperboles dont les asymptotes sont parallèles aux deux droites représentées par l'équation (8). Pour avoir des hyperboles équilatères, il suffit d'exprimer que U_0 passe par l'orthocentre de ABC; P appartient alors à l'axe orthique de ABC.

9. Les courbes U admettent une enveloppe dont l'équation est

$$I^2\left(\Sigma^2\frac{x}{\alpha}-4\Sigma\frac{xy}{\alpha\beta}\right)=0.$$

Le facteur I^2 correspond aux deux points à l'infini communs à toutes ces courbes. L'enveloppe proprement dite est la conique

$$V\equiv\Sigma\frac{x^2}{\alpha^2}-2\Sigma\frac{xy}{\alpha\beta}=0,$$

qui touche BC, CA, AB en leurs points de rencontre avec les droites AP, BP, CP et qui a un double contact avec U_0 sur la droite L. Le contact de V avec une conique quelconque du système a lieu sur la droite $2mI - L = 0$, parallèle à la droite L.

Remarquons aussi que deux coniques U définies par des valeurs de m égales et de signes contraires se coupent sur L, et que deux courbes quelconques du système ont une corde commune parallèle à L.

10. Le centre de U est déterminé par les équations

$$\frac{dU}{dx}=\frac{dU}{dy}=\frac{dU}{dz},$$

que l'on peut remplacer par les suivantes où n est une inconnue auxiliaire

$$-mI+L-\frac{x}{\alpha}=n\alpha,\quad -mI+L-\frac{y}{\beta}=n\beta,\quad -mI+L-\frac{z}{\gamma}=n\gamma.$$

En éliminant les quantités $(-mI+L)$ et n, on obtient pour le lieu

des centres la droite

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{x}{\alpha} & \alpha \\ 1 & \frac{y}{\beta} & \beta \\ 1 & \frac{z}{\gamma} & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

qui passe par les points (α, β, γ), $(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$. L est le centre de la conique U qui correspond à $m = 2$, car les triangles ABC et A'B'C' sont alors symétriques par rapport à P.

11. Il y a lieu de rapprocher des paragraphes précédents l'étude des coniques U_2 ainsi définies :

Par un point quelconque P du plan ABC on mène trois transversales rencontrant les côtés du triangle ABC la première respectivement en (A_a, B_a, C_a), la seconde en (A_b, B_b, C_b), la troisième en (A_c, B_c, C_c), de telle sorte que P soit le milieu commun des trois droites B_aC_a, C_bA_b, A_cB_c. Les six points B_a, C_a, C_b, A_b, A_c, B_c appartiennent à une même conique U_2 de centre P.

Si l'on observe que les droites B_cC_b, C_aA_c, A_bB_a forment un triangle A'B'C' symétrique de ABC par rapport à P, on voit que ces nouvelles coniques U_2 forment un groupe contenu dans la série des coniques U; elles correspondent à $m = 2$, P est supposé mobile.

L'équation générale des coniques U_2 est

$$4I^2 - 2IL + U_0 = 0.$$

Steiner (*Œuvres complètes*, t. II, pp. 4, 31) a déjà remarqué que les coniques U_2 deviennent des hyperboles équilatères lorsque P est situé sur l'axe orthique de ABC; on obtient des systèmes de deux droites parallèles lorsque P est sur l'ellipse touchant les côtés de ABC en leurs milieux. M. Lemoine a étudié d'une manière très complète la même question dans les Mémoires de l'AFAS, Nancy, 1886.

MM. Brocard et Neuberg, à qui j'avais communiqué mes recherches, ont bien voulu me donner de précieux conseils pour améliorer et compléter mon travail. Qu'ils acceptent l'expression de ma sincère reconnaissance !

EXERCICES DE CALCUL INTÉGRAL ;

par M. E. N. Barisien.

(*Suite et fin ;* voir p. 146).

8. Soit M un point variable d'une ellipse de foyers F et F'. L'orthocentre H du triangle MFF' décrit une quartique Σ dont on demande l'aire.

Soient : O, A, A', B, B' le centre et les sommets de l'ellipse; TAt, T'A't' les tangentes en A, A'; Pp, P'p' les cordes focales perpendiculaires à l'axe AA'; Q, Q' les orthocentres des deux triangles BFF', B'FF'. A l'arc AP de l'ellipse correspond, sur Σ, un arc iF qui est asymptotique à At (du côté des y négatifs) et touche en F la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite F'P; à l'arc PBP' de l'ellipse correspond sur Σ un arc FQF'; lorsque M parcourt l'arc P'A', H décrit un arc F'i' qui est asymptotique à A't'. Σ comprend une seconde branche IFQ'F'I' symétrique de la première par rapport à FF'. Σ est aussi le lieu du point d'intersection H' des perpendiculaires élevées en F sur FM et en F' sur F'M; H et H' sont symétriques par rapport à O.

Soient $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, (x, y) les coordonnées des points M, H; on a

$$x = a\cos\varphi, \quad y = -\frac{a\cos\varphi + c}{b\sin\varphi}(x - c) = -\frac{a^2\cos^2\varphi - c^2}{b\sin\varphi};$$

en éliminant φ on obtient une équation du 4e degré en x, y.

L'aire FQF'Q'F est donnée par

$$-U = 4\int_c^0 y\,dx = 4\frac{a}{b}\int_\alpha^{\frac{1}{2}\pi}(a^2\cos^2\varphi - c^2)\,d\varphi = 4\frac{a}{b}\int_\alpha^{\frac{1}{2}\pi}(b^2\cos^2\varphi - c^2\sin^2\varphi)\,d\varphi$$

$$= 4\frac{a}{b}\left[\frac{b^2 - c^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \frac{a^2}{4}\sin 2\alpha\right],$$

α désignant la valeur de φ au point P, de sorte que $\cos\alpha = \frac{c}{a}$, $\sin\alpha = \frac{b}{a}$.

L'aire comprise entre FA, AT et la branche infinie FI a pour valeur

$$U_1 = \frac{a}{b}\int_0^\alpha (b^2\cos^2\varphi - c^2\sin^2\varphi)\,d\varphi = \frac{a}{b}\left[\frac{b^2 - c^2}{2}\alpha + \frac{a^2}{4}\sin 2\alpha\right].$$

Lorsque $b = c$, Q est en B et l'aire FBF'OF est équivalente à l'aire comprise entre l'asymptote Tt et les branches infinies FI, Fi.

9. On considère un cercle de centre O, un diamètre fixe AB et un point M variable sur la circonférence. Le lieu des centres de similitude des cercles de diamètres MA et MB se compose de deux cubiques symétriques par rapport au diamètre AB. Quadrature de ces courbes.

Les centres de similitude S, S' sont à l'intersection de la ligne des centres des cercles variables, avec les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle AMB. Soient C, D les extrémités du diamètre du cercle O perpendiculaire à AB, I et K les milieux des rayons OC et OD; l'une des courbes considérées est le lieu du milieu S du segment MN intercepté entre la droite AB et la circonférence O, sur une sécante quelconque menée par C. En prenant C pour pôle, CD pour axe polaire, on trouve pour équation de la courbe (S)

$$\rho = \frac{R}{2}\left(2\cos\theta + \frac{1}{\cos\theta}\right).$$

Pour l'aire comprise entre les arcs KA, KB et la droite AB, on trouve

$$U = \frac{R^2}{4}\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\left(4\cos^2\theta + \frac{1}{\cos^2\theta} + 4\right)d\theta = -\frac{R^2}{4}\left(\frac{3}{2}\pi + 2\right).$$

L'aire comprise entre la courbe et son asymptote, la parallèle par le milieu de OC à AB, est infinie.

10. Si A et B sont deux points fixes et M le milieu de la droite AB, trouver l'aire de la courbe lieu des points P tels que

$$PM = \pm(PA - PB).$$

La courbe a pour équation (*Mathesis*, 1901, p. 59).

$$r^2 = \frac{4a^2}{3}(4\cos^2\theta - 1).$$

Elle a la forme d'un huit, possède deux tangentes au pôle faisant avec l'axe polaire les angles $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$; d'où

$$U = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{4a^2}{3}(4\cos^2\theta - 1)\,d\theta = \frac{8a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos 2\theta + 1)\,d\theta = \frac{4a^2}{9}(2\pi + 3\sqrt{3}).$$

QUESTIONS D'ARITHMÉTIQUE,

par Tsuruichi Hayashi(*) (Tōkyō).

La livraison de décembre 1904 de *Mathesis* (pp. 166-170) contient une note sur les *nombres dont les carrés se terminent par les mêmes chiffres*, note où l'on résume des résultats dus à MM. Morel, Hoffmann et Gutzmer. Cet article m'a suggéré le présent travail.

(*) La note de M. Hayaschi, datée du 21 février 1905, est rédigée en anglais.

1. *Cubes dont les deux derniers chiffres sont les mêmes.* Si k et n sont des nombres entiers positifs, le second inférieur à 100, le cube de $100k + n$ est terminé à droite par les deux mêmes chiffres que n^3. D'après les *Tables of Squares, Cubes, Square Roots, Cube Roots and Reciprocals* de Barlow (1897), les cubes de 14, 42, 53, 64, 71, 77, 92, 99 sont les seuls inférieurs à 100^3 qui se terminent par deux chiffres égaux.

2. *Sixièmes puissances terminées par deux chiffres égaux.* La sixième puissance de $100k + n$ se termine par les deux mêmes chiffres que n^6. Supposons $n = 10k' + n'$, où $k' < 10$, $n' < 10$. Alors, d'après Morel et Hoffmann, $(10k' + n')^3$ doit avoir pour derniers chiffres 12, 38, 62 ou 88. Dans les tables de Barlow, nous trouvons que 8^3 et 58^3 se terminent en 12, et 42^3 et 92^3 en 88. Il en résulte que $n = 50l \pm 8$, $l = 0, 1, 2$; et $100k + n = 50(2k + l) \pm 8$.

Ainsi, *les nombres dont les sixièmes puissances ont deux chiffres terminaux égaux sont de la forme* $50m \pm 8$, *et réciproquement.*

Autrement. D'après le n° 1, $(10k' + n)^2$ doit se terminer par 14, 42, 53, 64, 71, 77, 92 ou 99. Les tables de Barlow indiquent que 8^2, 58^2, 42^2 et 92^2 se terminent par 64. Par conséquent $n = 50l \pm 8$, $l = 0, 1, 2$, etc.

D'après cela, *pour que la sixième puissance d'un nombre se termine par deux chiffres égaux, le carré du nombre doit se terminer par* 64.

3. *Sixièmes puissances dont les trois derniers chiffres sont égaux.* Le nombre $(1000k + n)^6$ a les mêmes trois derniers chiffres que n^6, si $n < 1000$. Soit $n = 100k' + n'$, $k' < 10$, $n' < 100$. D'après le professeur Gutzmer, un nombre dont le carré est terminé par trois chiffres égaux, est de la forme $500m \pm 38$, c'est-à-dire terminé par 38 ou 62. Il en résulte que $(100k' + n')^3$ et par suite n'^3 devrait avoir pour derniers chiffres 38 ou 62. Mais en parcourant les tables de Barlow on ne rencontre pas de nombre plus petit que 100 dont le cube finisse en 38 ou 62.

Par conséquent, *il n'existe pas de nombre dont la sixième puissance ait trois chiffres terminaux égaux.*

4. *Neuvièmes puissances terminées par deux chiffres égaux.* En raisonnant comme ci-dessus, on voit que $(100k + n)^9$ se termine par deux chiffres égaux si $n = 04$, 37, 48, 53, 54, 98 ou 99.

5. *Dixhuitièmes puissances terminées par deux chiffres égaux.* En

observant $(100k+n)^{18} = [(100k+n)^2]^9$ on voit que les chiffres terminaux de $(100k+n)^2$ et par suite de n^2 doivent être 04, 37, 48. 53, 54, 91, 98 ou 99. On trouve ensuite $n = 2$, 48, 52 ou 98, de sorte que $n = 50l \pm 2$, $l = 0, 1, 2$.

Par conséquent, *tout nombre dont la puissance* 18 *se termine par deux chiffres égaux est de la forme* $50m \pm 2$, *et réciproquement.*

NOTES MATHÉMATIQUES.

16. *Symétries successives par rapport à des axes concourants.* M. Boutin nous a adressé la question à proposer suivante :

On considère une circonférence O *et n diamètres quelconques* D_1, D_2, ... D_n. *Par un point quelconque* M_0 *de la circonférence, on mène une parallèle à* D_1 *qui rencontre en* M_1 *la circonférence, par* M_1 *une parallèle à* D_2 *qui rencontre la circonférence en* M_2, *par* M_2 *la parallèle* M_2M_3 *à* D_3, *etc.*

Examiner les conditions nécessaires pour que le contour polygonal $M_0M_1M_2$ ... *se ferme de lui-même.*

Appelons d_1, d_2, ... d_n les diamètres perpendiculaires à D_1, D_2, ... D_n. Alors M_1 est le symétrique de M_0 par rapport à d_1, M_2 le symétrique de M_1 par rapport à d_2, et ainsi de suite. La question ainsi transformée est loin d'être nouvelle; mais les solutions qu'on en a données ne sont pas toujours exactes.

Nous supposerons les axes de symétrie d_1, d_2, ... d_n distincts; si M_n ne coïncide pas M_0, nous continuerons par prendre le symétrique M_{n+1} de M_n par rapport à d_1, le symétrique M_{n+2} de M_{n+1} par rapport à d_2, etc.

Adoptons un *rayon-origine* OA et appelons α_1, α_2, . . α_n l'un des angles dont il faut faire tourner OA pour l'amener sur l'un des rayons appartenant à d_1, d_2. ... d_n. La rotation peut s'effectuer dans le sens positif ou dans le sens négatif et dépasser une ou plusieurs fois 2π. Les angles α_1, α_2, ... ne sont donc déterminés qu'à un multiple pair ou impair de π près. Désignons aussi par μ_0, μ_1, μ_2 ... l'un des angles dont il faut faire tourner OA pour l'amener sur OM_0, OM_1, OM_2 ...; ces angles sont déterminés à un multiple de 2π près.

La relation entre M_0, M_1 et d_1 peut toujours s'exprimer par l'égalité

$$\mu_0 + \mu_1 = 2\alpha_1 + 2\lambda_1\pi. \qquad (1)$$

En effet, elle est $\mu_0 + \mu_1 = 2\alpha_1$, si μ_0, μ_1, α_1 sont les mesures des plus petites rotations positives qui amènent OA respectivement sur OM_0, OM_1 et le rayon passant au milieu de l'arc M_0M_1. Si l'on suppose pour plus de généralité que μ_0 et μ_1 puissent être augmentées d'un multiple de $\pm 2\pi$ et α_1 d'un multiple de π, la relation prend la forme (1).

Cela posé, si M_p coïncide avec M_0, on a les égalités

$$\left.\begin{aligned} \mu_0 + \mu_1 &= 2\alpha_1 + 2\lambda_1\pi, \\ \mu_1 + \mu_2 &= 2\alpha_2 + 2\lambda_2\pi, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \mu_{p-1} + \mu_p &= 2\alpha_p + 2\lambda_p\pi, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

où $\mu_p = \mu_0 + 2k\pi$.

Supposons d'abord p pair ; alors en faisant la somme des égalités (2) multipliées alternativement par $+1$ et -1, on trouve

$$0 = 2(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \cdots - \alpha_p) + 2\lambda\pi, \qquad (3)$$

λ désignant un nombre entier quelconque, positif, négatif ou nul.

D'après cela, si n est pair et que la somme $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots - \alpha_n$ soit un multiple de π, M_n coïncide avec M_0 quel que soit le point de départ M_0. Si la somme $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots - \alpha_n$ est commensurable avec π et égale à $\pi \times \frac{s}{t}$, $\frac{s}{t}$ étant une fraction irréductible, on peut supposer $p = nt$ et le contour $M_0M_1M_2 \ldots$, se fermera de lui-même après avoir employé t fois les axes de symétrie d_1, d_2, ... d_n. Si la somme $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \ldots$ est incommensurable avec π, le contour $M_0M_1M_2 \ldots$ ne fermera jamais.

Supposons maintenant p impair ; les équations (2) combinées comme il a été indiqué, donnent

$$2\mu_0 = 2(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots + \alpha_p) + 2\lambda\pi.$$

On en conclut, si l'on fait $p = n$, qu'il existe deux positions de M_0, diamétralement opposées sur la circonférence O, pour lesquelles le contour $M_0M_1M_2 \ldots M_n$ se ferme lui-même.

Nous ne nous arrêterons pas à quelques autres hypothèses à examiner. (J. N.).

17. *Sur la question* 1498. La solution de cette question insérée p. 135 peut sembler inexacte parce que les axes coordonnés sont variables d'une quadrique à l'autre, mais il n'en est rien.

Pour plus de clarté, représentons les plans donnés par l'équation normale

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

valable avec des axes obliques; comme ceux-ci se déplacent parallèlement à eux-mêmes, les coefficients $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ que l'on peut substituer aux quantités u, v, w, restent fixes. (J. N.).

SOLUTIONS DE QUESTIONS POSÉES AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE MILITAIRE DE BRUXELLES EN 1904.

I.

Démontrer qu'il n'existe aucune fraction ordinaire telle qu'en ajoutant 36 *au numérateur et* $\frac{5}{4}$ *au dénominateur on obtienne un résultat égal à* $\frac{7}{11}$ (voir page 86).

Solution par MM. Erèlav Seam et Plakhovo. La question revient à celle-ci : démontrer que l'équation

$$\frac{x+36}{y+\frac{5}{4}} = \frac{7}{11}$$

est impossible en nombres entiers et positifs; toutes réductions faites, cette équation peut s'écrire

$$44x - 28y + 1563 = 0.$$

Or, les coefficients de x et de y admettant un facteur 4, qui n'est pas facteur du terme indépendant, cette équation n'admet pas de solutions entières.

II.

Étant donné le nombre $p = a^6b^{10}c^{13}$, *où* a, b, c *désignent des nombres premiers, déterminer tous les nombres* q *tels que les carrés* p^2 *et* q^2 *soient respectivement divisibles par* q *et par* p. *Combien y a-t-il de nombres* q *qui répondent à la question?* (voir page 84).

Solution par M. L. Godeaux (Ath). On doit avoir

1° $$q^2 = \mathcal{M}a^6b^{10}c^{13},$$

donc q admet pour valeur minima $a^3b^5c^7$.

2° $$a^{12}b^{20}c^{26} = \mathcal{M}q,$$

la valeur maxima est donc $a^{12}b^{20}c^{26}$.

Pour savoir combien de nombres q il y a, il suffit de compter combien de produits différents on peut former avec trois facteurs pris respectivement dans les suites

$$(a^3, a^4, \ldots a^{12}), \quad (b^5, b^6, \ldots b^{20}), \quad (c^7, c^8, \ldots c^{26}).$$

Il est facile de voir que ce nombre est

$$10 \times 16 \times 20 = 3200.$$

III.

Étant données les équations

$$x + y + z = 2p, \quad \frac{xy}{(x+y)z} = m, \quad x^2 + y^2 = z^2,$$

dans lesquelles p et m sont des quantités données réelles et positives, on demande 1° *de résoudre le système;* 2° *de déterminer pour quelles valeurs de m il admet un système de solutions réelles et positives* (voir p. 84).

Solution par M. Plakhovo. Des deux premières équations on déduit

$$x + y = 2p - z, \qquad xy = mz(2p - z). \tag{1}$$

Retranchons du carré de la première de ces égalités le double de la seconde; nous aurons

$$x^2 + y^2 = (2p - z)^2 - 2mz(2p - z).$$

En remplaçant $x^2 + y^2$ par z^2, nous aurons l'équation en z :

$$mz^2 - 2p(m+1)z + 2p^2 = 0. \tag{2}$$

Par conséquent,

$$z = \frac{p(m+1) \pm p\sqrt{m^2+1}}{m}. \tag{3}$$

Ces valeurs sont toujours réelles et distinctes. m étant supposé positif, elles sont toutes deux positives; c'est ce qui résulte des signes de leur somme et de leur produit ou aussi de la formule (3) puisque $\sqrt{m^2+1} < m+1$.

Pour que x et y aient des valeurs positives, on doit avoir $z < 2p$. En observant que $\sqrt{m^2+1} > m$, on voit que la première valeur de z est $> 2p$; en remplaçant $\sqrt{m^2+1}$ par la quantité plus petite 1 on trouve que la seconde valeur de z est $< p$.

x et y sont les racines de l'équation

$$u^2 - (2p - z)u + mz(2p - z) = 0.$$

Le discriminant est

$$(2p - z)(2p - z - 4mz).$$

Le second facteur est positif si

$$z < \frac{2p}{1+4m}, \quad \text{ou} \quad \frac{m+1-\sqrt{m^2+1}}{m} < \frac{2}{1+4m}.$$

On peut chasser les dénominateurs qui sont positifs, et l'on trouve

$$1 + 3m + 4m^2 < (1+4m)\sqrt{1+m^2}.$$

Elevons encore au carré, les deux membres étant positifs; il vient

$$16m^3 - 2m < 0.$$

Il résulte de là que la condition nécessaire et suffisante pour que x, y, z aient des valeurs positives, est $m \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Si $m = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, on a

$$z = 2p(\sqrt{2}-1), \quad x = y = p\sqrt{2}(\sqrt{2}-1).$$

IV.

Étant donnés une circonférence (C) *de rayon* R *et un point* P *pris sur celle-ci, on mène par ce point deux demi-droites* PX, PY *faisant entre elles un angle de* 18° *et rencontrant la circonférence* (C) *respectivement aux points* A *et* B.

1° *Démontrer que lorsque l'angle* XPY *tourne autour de son sommet en conservant sa grandeur, la corde* AB *reste constamment tangente à une circonférence* (C'). *Calculer le rayon de cette circonférence.*

2° *Démontrer que le lieu du point de contact* M *de la corde* AB *avec la circonférence* (C') *se compose seulement d'une partie de cette circonférence. Indiquer quelle est cette partie et le nombre de degrés qu'elle renferme.*

3° *Démontrer que si la tangente à la circonférence* (C') *en un point quelconque* M', *pris sur la partie qui n'appartient pas au lieu, rencontre la circonférence* (C) *aux points* A' *et* B', *l'angle* A'PB' *aura une grandeur constante; quelle est cette grandeur?* (voir p. 87).

Solution par MM. L. Godeaux (Ath) et Weber (Liège). 1° L'angle au centre AOB est constant et égal à 36°, il en résulte que la corde AB a une longueur constante, donc elle est tangente en son milieu à une circonférence (C') de centre O. Le rayon R' est l'apothème du décagone

régulier inscrit dans la circonférence (C), donc

$$R' = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

2° Si l'on fait tourner l'angle XPY autour de P, la limite des positions de PX d'un côté, de PY de l'autre, est la tangente menée par P à (C). Alors, la droite PB dans le premier cas, PA dans le second devient la corde AB. La portion de (C') comprise entre les points de contact H et K des cordes PB et PA du côté de P ne fera pas partie du lieu. Si l'on joint OH et OK, l'angle HOP est la moitié de l'angle constant AOB, donc l'angle HOK et par conséquent l'arc intercepté aura pour mesure 36°, et la partie de (C') qui appartient au lieu mesure 360° — 36° = 324°.

3° La corde A'B' soustend un arc de 36°; l'angle A'PB' aura donc pour valeur $\frac{360° - 36°}{2} = 162°$.

V.

a) *Étant donnée l'équation*

$$\sin(x - a)\cos x - m\sin^2 x + 2 = 0,$$

calculer tg x.

b) *Démontrer que le nombre a étant donné, le problème n'est possible que si m est supérieur ou égal à une certaine limite.*

c) *Déterminer a de manière que cette limite soit égale à* $\frac{15}{8}$ (p. 88).

Solution par Erélav Seam. *a*) Développons sin $(x - a)$, remplaçons le terme connu par $2(\sin^2 x + \cos^2 x)$ et divisons par $\cos^2 x$; l'équation devient

$$(m - 2)\operatorname{tg}^2 x - \cos a \operatorname{tg} x + \sin a - 2 = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos a \pm \sqrt{\cos^2 a - 4(m-2)(\sin a - 2)}}{2(m-2)}.$$

b) Cette valeur ne sera réelle que si

$$\cos^2 a \geqslant 4(m-2)(\sin a - 2),$$

$$\frac{\cos^2 a}{4(\sin a - 2)} \leqslant m - 2;$$

on a renversé le sens de l'inégalité parce que sin $a - 2$ est négatif. La condition cherchée est donc

$$m \geqslant \frac{\cos^2 a}{4(\sin a - 2)} + 2 \quad \text{ou} \quad \frac{(5 - \sin a)(3 - \sin a)}{4(2 = \sin a)}.$$

c) La valeur de a sera solution de l'équation

$$\frac{\cos^2 a}{4(\sin a - 2)} + 2 = \frac{15}{8},$$

qui devient, toutes réductions faites

$$2\cos^2 a + \sin a - 2 = 0,$$

ou

$$\sin a\,(2\sin a - 1) = 0,$$

dont les racines sont $k\pi$, $2k\pi + \frac{1}{6}\pi$, $2k\pi + \frac{5}{6}\pi$,

VI.

Résoudre et discuter l'équation

$$\sin 3x + \sin 2x = m \sin x.$$

Solution par M. Erélav Seam. L'équation peut s'écrire

$$3\sin x - 4\sin^3 x + 2\sin x \cos x = m \sin x;$$

donc elle se décompose en deux autres :

$$1^\circ\ \sin x = 0, \quad \text{d'où} \quad x = k\pi;$$

$$2^\circ\ f(y) \equiv 4y^2 + 2y - (m+1) = 0 \qquad (1)$$

y désignant $\cos x$.

Pour que les racines de (1) soient réelles, on doit avoir

$$1 + 4(m+1) \geqslant 0, \quad \text{ou} \quad m \geqslant -\tfrac{5}{4}.$$

Si $m = -\frac{5}{4}$, les deux valeurs de y, égales à $-\frac{1}{4}$, sont admissibles. Si $m > -\frac{5}{4}$, y a deux valeurs réelles et inégales. Pour qu'elles soient toutes deux admissibles, elles doivent être comprises entre -1 et $+1$; ce qui exige que $f(-1)$ et $f(1)$ aient le signe du premier terme de $f(y)$. Cette condition donne

$$4 - 2 - (m+1) > 0, \quad 4 + 2 - (m+1) > 0,$$

ou $m < 1$, $m < 5$; ces inégalités sont vérifiées si l'on a $m > -\frac{5}{4}$ et < 1.

Si $m = 1$, on a $f(-1) = 0$, d'où les solutions $\cos x = -1$ ou $x = (2k+1)\pi$, et $\cos x = \frac{1}{2}$ ou $x = 2k\pi \pm \frac{1}{3}\pi$.

Considérons le cas de $m > 1$ et < 5; alors $f(-1) < 0$, $f(1) > 0$; l'équation (1) aura une racine comprise entre -1 et 1, une autre inférieure à -1; celle-ci ne convient pas.

Pour $m = 5$, on a $f(1) = 0$, $f(-1) < 0$, de sorte que l'équation a une seule racine admissible qui est $\cos x = 1$.

Enfin, si $m > 5$, les deux valeurs de y sont extérieures à l'intervalle $(-1, 1)$.

VII.

Étant donnés deux axes Ox, Oy *faisant entre eux l'angle* θ, *on marque sur* Ox *un point fixe* A *d'abscisse* a. *Il y a une infinité d'hyperboles équilatères tangentes à l'axe* Ox *en ce point et rencontrant l'axe* Oy *en deux points, dont le produit des ordonnées est constant et égal à* b^2. 1° *Démontrez que l'équation générale de ces hyperboles est*

$$x^2 + 2mxy + \frac{a^2}{b^2}y^2 - 2ax + 2y + a^2 = 0,$$

ou

$$m = \frac{a^2 + b^2}{2b^2 \cos\theta}.$$

2° *Montrer que ces hyperboles ont mêmes directions asymptotiques.* 3° *Déterminer le lieu de leurs centres.* 4° *Ce lieu est une droite : déterminer l'angle* θ *de manière que cette droite soit perpendiculaire à l'axe* Ox. *Ce problème est-il toujours possible?* (voir pp 85-86).

Solution par M. E. Weber. 1° Pour que la conique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + 1 = 0 \qquad (1)$$

soit une hyperbole équilatère, on doit avoir,

$$A + C = 2B\cos\theta. \qquad (2)$$

Son intersection avec l'axe Ox est donnée par

$$Ax^2 + 2Dx + 1 = 0.$$

Les hyperboles considérées étant tangentes en A à l'axe Ox, il vient :

$$-\frac{D}{A} = a, \quad D^2 = A, \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{1}{a^2}, \quad D = -\frac{1}{a}.$$

Le produit des racines de l'équation

$$Cy^2 + 2Ey + 1 = 0$$

doit être égal à b^2. Donc

$$\frac{1}{C} = b^2, \qquad C = \frac{1}{b^2}.$$

L'équation (2) donne alors

$$2B = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2 \cos\theta}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation générale (1); nous aurons

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2\cos\theta}xy+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2}{a}x+2Ey+1=0.$$

De là résulte tout de suite l'équation de l'énoncé.

2° Les directions asymptotiques dépendent uniquement des termes du second degré de l'équation de la conique; il en découle immédiatement, que les hyperboles considérées ont mêmes directions asymptotiques.

3° Les équations du centre sont :

$$x+my-a=0, \qquad (3)$$

$$mx+\frac{a^2}{b^2}y+\lambda=0.$$

Les centres sont aux intersections d'une droite fixe et d'une droite mobile Le lieu des centres est donc la droite (3), qui a pour coefficient angulaire

$$\mu=-\frac{2b^2\cos\theta}{a^2+b^2}.$$

Pour que cette droite soit perpendiculaire à Ox, on doit avoir

$$\frac{2b^2\cos\theta}{a^2+b^2}=-\frac{1}{\cos\theta}, \qquad \text{ou} \qquad \cos^2\theta=\frac{a^2+b^2}{2b^2}.$$

Pour que le problème soit possible, on a la condition :

$$\frac{a^2+b^2}{2b^2}\leqslant 1 \qquad \text{ou bien} \qquad a\leqslant b.$$

M. Erèlav Seam a résolu la même question. Pour trouver l'équation du faisceau de courbes, il écrit

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{\alpha}-1\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{\alpha y}{b^2}-1\right)+kxy=0.$$

où α et $\frac{b^2}{\alpha}$ sont les ordonnées des points de rencontre de la conique avec Oy.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1469.

(Voir *Mathesis*, (3) IV; pp. 128 et 211).

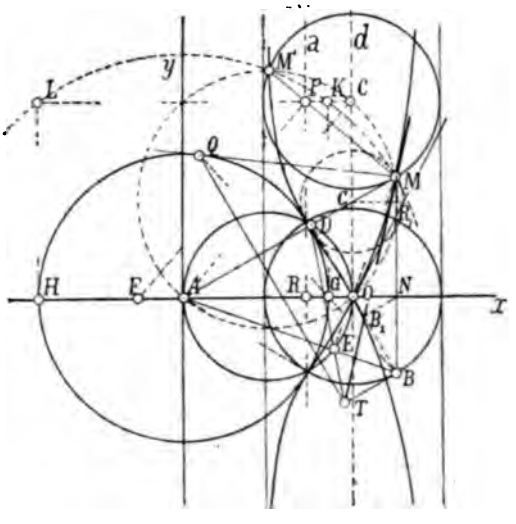
Le centre C *d'un cercle de rayon donné r parcourt une droite donnée d. D'un point donné* A *on mène à ce cercle les tangentes* AM, AM'. *Trouver :*

a. *L'enveloppe de la corde de contact* MM′ ; b. *Le lieu des points* M, M′ ; c. *Le lieu du milieu de la corde* MM′ ; d. *L'enveloppe des rayons* CM, CM′.

(J. Neubkrg).

Solution par M. Jeřábek. *a.* Menons AO perpendiculaire et A*y* parallèle à *d*. Soit P le point de rencontre de MM′ avec CP parallèle à OA. A*y* est la polaire de P par rapport au cercle (C, *r*), car elle joint les pôles des droites MM′, CP. Comme on a $r^2 = CP.OA$, la distance CP est constante. Menons la droite PF parallèle à CA et rencontrant OA en F ; on a AF = CP, donc le point F est fixe. Traçons encore par P une parallèle RP ≡ *a* à *d*. L'angle FPM étant droit, on voit que l'enveloppe de MM′ est une parabole de foyer F et dont *a* est la tangente au sommet.

b. 1° Décrivons la circonférence (O, *r*) et la circonférence de diamètre AO. Celle-ci rencontre la droite OM en un point D ; la droite DO est parallèle à CM et rencontre le cercle (O, *r*) en un point B situé sur la droite MN parallèle à *d*. Deux hauteurs du triangle AMB étant AON et BOD, MO est la troisième hauteur et rencontre AB en un point E de la circonférence ADO.



Cela posé, prenons le plan de la figure comme plan horizontal de projection ; nous désignerons les points de l'espace par des minuscules. Nous pouvons considérer le cercle (C, *r*) comme la projection horizontale d'un cercle (*c*, *r*) situé dans un certain plan horizontal π et sur un cylindre Σ ayant pour trace le cercle (O, *r*) et pour axe une droite O*c* qui fait avec le plan horizontal un angle quelconque α, par exemple α = 45°. Le cercle de diamètre AC, qui passe par les points M, M′ et O, peut être regardé comme la projection d'un cercle *aomm′* situé dans le même plan π. Ce cercle *aomm′* s'appuie sur les verticales élevées en A et O et sur l'axe O*c* de Σ ; par suite, lorsque le plan π se meut parallèlement à

lui-même, ce cercle engendre un hyperboloïde orthogonal qui a pour génératrices les verticales Aa, Oo et pour trace le cercle ADO.

La courbe (M) *est la projection horizontale de la courbe d'intersection* (m) *du cylindre* Σ *et de l'hyperboloïde orthogonal* Σ'. Par suite, elle est du quatrième ordre, a pour points doubles A, O et le point à l'infini sur d, et est de la 6^{me} classe.

Nous allons encore indiquer d'autres quadriques passant par la courbe gauche (m).

2° Posons AM $= t$ et considérons les points M, M' comme déterminés par l'intersection des deux cercles orthogonaux (C, r), (A, t). Si le second cercle rencontre la droite CP en K et L, on a $t^2 =$ CK.CL, CK + CL = 2OA. On en conclut que les distances CK, CL ne changent pas avec C; les points K, L se meuvent sur deux droites GK, HL parallèles à d.

Cela posé, le cercle MKM'L peut être regardé comme la projection d'un cercle $mkm'l$ situé dans le plan π du cercle (e, r); les points k et l se meuvent sur deux droites Gk, Hl parallèles à l'axe Oc du cylindre Σ. Par conséquent, la *courbe* (m) *appartient à un hyperboloïde de révolution* Σ'' ayant pour axe la verticale menée en A, pour cercle de gorge le cercle de diamètre GH qui coupe orthogonalement le cercle (O, r); deux génératrices sont Gk, Hl.

La droite BG rencontre le cercle de gorge en un point Q. Comme elle est parallèle à MK, les cordes GQ, MK des deux cercles concentriques GQH, MKK' sont les bases d'un trapèze isoscèle; par suite, la diagonale GK étant tangente au premier cercle, la seconde diagonale QM l'est également. Il résulte de là un nouveau mode de génération de la courbe (M) : *Étant donnés deux cercles orthogonaux* (O, r) *et* GQH, *la perpendiculaire abaissée d'un point* B *du premier sur la ligne des centres* AO, *et la tangente au second cercle à son point de rencontre avec la droite* BG *passant par l'extrémité* G *du diamètre* AO, *se coupent sur la courbe* (M).

Les raisonnements qui précèdent, supposent le point A extérieur au cercle (O, r). Si le point A est l'extrémité du rayon OR, le point M' décrit la tangente en A, et le point M parcourt une strophoïde (focale de Quetelet). Car, si M_1 est la seconde extrémité du diamètre M'C du cercle M', les droites M_1O et NM_1 sont toutes deux parallèles à AC et, par suite, se confondent; il en résulte que la figure AOMC est un trapèze isoscèle et que MO forme un triangle isoscèle avec OC et AM. Le

cercle (A, AM') est maintenant la projection d'un cercle du plan π qui a son centre sur la verticale du point A et qui s'appuie sur la droite menée par A parallèlement à l'axe Oc du cylindre Σ; il engendre un cône de révolution, qui remplace l'hyperboloïde Σ''.

Si le point A est à l'intérieur du cercle (O, r), l'hyperboloïde réglé Σ'' est remplacé par un hyperboloïde de révolution à deux nappes. Enfin, si A est en O, l'hyperboloïde Σ' se transforme en un cône orthogonal et la courbe (M) devient un *cappa*.

Pour construire la tangente en un point M de la courbe M, il suffit de joindre M à l'intersection des traces des plans tangents menés en M à deux des surfaces Σ, Σ', Σ''. Les génératrices de Σ'' passant par M se projettent suivant les tangentes au cercle de gorge issues de M; donc la polaire de M par rapport à ce cercle coupe la tangente menée en B à la base du cylindre Σ en un point T de la tangente cherchée.

3° La corde MM' est la projection d'une corde mm' du cercle (c, r) situé dans le plan π; P est la projection d'un point p de π qui décrit évidemment une parallèle Rp à l'axe Oc du cylindre Σ. Par conséquent, la droite mm' reste horizontale, s'appuie constamment sur une droite Rp et sa projection enveloppe une parabole. On en conclut qu'elle engendre un *paraboloïde hyperbolique*, de sommet R, passant par la courbe (m).

4° Soit C_1 le point de rencontre de AM avec d. Des triangles semblables CMC_1, AOC_1, on conclut que $C_1M : C_1O = CM : AO$; le rapport $C_1M : C_1O$ est donc constant, ce qui permet de considérer la courbe (M) soit comme une généralisation de la strophoïde (où $C_1M = C_1O$), soit comme une généralisation de la conchoïde de Nicomède (où C_1M est constant).

Menons C_1R_1 parallèle à AO et égale à C_1M; le rapport $C_1R_1 : C_1O$ étant constant, le point R_1 décrit une droite OR_1.

Considérons maintenant le cercle (C_1, C_1M) comme la projection horizontale d'un cercle (c_1, c_1m) situé dans un plan horizontal π_1 et ayant son centre c_1 sur l'axe Oc du cylindre Σ. On voit facilement que ce dernier cercle engendre un cône Σ''' de sommet O et dont une génératrice est Or_1. D'autre part, l'horizontale $a_1c_1m_1$ du plan π_1 qui se projette suivant AC_1M s'appuie sur la verticale du point A et sur la droite Oc, elle engendre un paraboloïde hyperbolique qui coupe le cône Σ''' suivant une courbe dont la courbe (M) est la projection horizontale.

De là, un nouveau moyen de construire la tangente à la courbe (M).

5° Si l'on prend pour axes coordonnés les droites Ax, Ay (et une perpendiculaire Az) et qu'on pose OA $= a$, OC $= \alpha$, les équations des cercles (C, r), MM'K, (A, AM) et de la corde MM' sont

$$(x-a)^2+(y-\alpha)^2=r^2, \qquad (1)$$

$$x^2+y^2-ax-\alpha y=0, \qquad (2)$$

$$x^2+y^2=a^2+\alpha^2-r^2, \qquad (3)$$

$$ax+\alpha y+r^2-a^2-\alpha^2=0. \qquad (4)$$

L'élimination de α entre deux de ces équations donne l'équation du lieu (M) :

$$(x-a)^2(x^2+y^2)-y^2r^2=0.$$

Mais si l'on considère α comme une troisième coordonnée z, les équations (1), (2), (3), (4) représentent respectivement un cylindre oblique, un hyperboloïde orthogonal, un hyperboloïde réglé de révolution et un paraboloïde hyperbolique ; ces surfaces ont une courbe commune (m) se projetant suivant la courbe (M). On retrouve ainsi par l'analyse les surfaces considérées ci dessus.

A notre regret, le défaut d'espace ne nous permet pas de reproduire tous les développements intéressants donnés par M. Jeřábek.

De la solution de M. Déprez, qui nous est arrivée après l'impression des premières solutions de la question 1469, nous extrayons ce qui suit :

Remarques sur la question 1469, *par* M. Déprez. Il est intéressant d'étudier la question analogue suivante :

Le centre C *d'un cercle de rayon donné r parcourt une circonférence donnée* (O, R). *D'un point donné* A *on mène au cercle mobile les tangentes* AM, AM'. *Trouver* : a. *L'enveloppe de la corde de contact* MM'; b. *Le lieu du milieu* P *de cette corde* ; c. *Le lieu des points* M, M'; d. *L'enveloppe des rayons* CM, CM'.

Le lecteur est prié de faire la figure ; pour plus de facilité, nous supposons le point A extérieur au cercle fixe.

La droite AC rencontre la circonférence (O, R) en un second point D. Soient E, F les symétriques des points D, A par rapport au centre O ; Q, le point de rencontre des droites MM', FE ; d, la distance AO. Alors CE et MM' étant perpendiculaires à AD et FE, on a EQ = CP. Des égalités

$$CP.CA = r^2, \quad CA.DA = d^2-R^2, \quad CA = FE,$$

on conclut

$$\frac{EQ}{FE}=\frac{r^2}{d^2-R^2}, \qquad \frac{FQ}{FE}=\frac{r^2+d^2-R^2}{d^2-R^2}.$$

Par conséquent, le point Q décrit une circonférence homothétique à la circonférence (O, R) par rapport à F ; le rayon R_1 et le centre O_1 résultent de

$$\frac{R_1}{R} = \frac{FO_1}{FO} = \frac{r^2 + d^2 - R^2}{d^2 - R^2}.$$

La droite MM′ a pour enveloppe l'antipodaire du point F par rapport au cercle (O_1, R_1); cette courbe est donc une conique T ayant pour cercle principal le cercle (O_1, R_1), pour foyers le point F et le symétrique de F par rapport à O_1. On obtient une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que le point A est à l'intérieur du cercle (O, R), à l'extérieur ou situé sur le périmètre.

Le point P décrit la podaire de A par rapport à T.

L'équation du lieu des points M, M′ est

$$\rho = a\cos\omega \pm \sqrt{R^2 - (d\sin\omega + r)^2},$$

A étant le pôle et AO l'axe polaire ; ce lieu est une sextique.

L'enveloppe des rayons CM, CM′ est une antipodaire de cette sextique ; elle est de la sixième classe.

Question 1494.

(Voir *Mathesis*, (3) ; IV, p. 264).

On considère les hyperboles semblables qui passent par deux points fixes A, B *et dont une asymptote passe par un point donné* C. *Trouver* 1° *l'enveloppe de la seconde asymptote ;* 2° *le lieu du centre.*

(J. Neuberg).

Solution par M. J. Déprez. Soient O le centre, Δ et Δ′ les asymptotes d'une hyperbole du système, α l'angle (Δ, Δ'), D et D′ les points de rencontre de Δ et Δ′ avec AB, C′ le symétrique de C par rapport au milieu M de AB.

On sait que MD = MD′ ; donc les droites CD, C′D′ sont parallèles et l'angle $C'D'O = \pi - \alpha$. On en conclut que Δ′ enveloppe l'antipodaire d'indice α de C′ par rapport à AB, c'est-à-dire une parabole (π) de foyer C′ et tangente à AB.

Le lieu de O est la podaire d'indice α du point C par rapport à la parabole π ; c'est une cubique cissoïdale.

Cas particuliers. 1° Si C est sur AB, Δ′ tourne autour du point fixe C′ et le lieu de O est une circonférence passant par C et C′.

2° Si les hyperboles du système sont équilatères, la parabole (π) aura pour foyer C′, pour tangente au sommet la droite AB; la directrice passe par C et le lieu de O est une strophoïde oblique.

3° Si les hyperboles sont équilatères et si le point C est équidistant de A et B, le sommet de (π) est en M, C est le pied de la directrice et O décrit une strophoïde droite.

Remarque. Les axes de symétrie des hyperboles du système enveloppent les antipodaires d'indice $\frac{1}{2}\alpha$ et d'indice $\frac{1}{2}\alpha + \frac{\pi}{2}$ de C par rapport au lieu du centre O.

Solution par M. F. Dupont. Etant donnés dans un même plan une ponctuelle projective avec un faisceau de rayons, si par chaque point de la ponctuelle on mène une parallèle au rayon correspondant du faisceau, les droites ainsi menées touchent une même parabole (Théorème connu).

Soient D, D′ les points de rencontre des asymptotes Δ, Δ′ de l'une des hyperboles considérées avec la droite AB, α l'angle (Δ, Δ′).

Les ponctuelles (D), (D′) sont symétriquement égales et projectives au faisceau des asymptotes (Δ); si l'on fait tourner ce faisceau de l'angle α, on obtient un faisceau de rayons parallèles aux asymptotes Δ′ et projectif avec la ponctuelle (D′). Donc d'après le théorème rappelé ci-dessus, Δ′ enveloppe une parabole.

Le lieu du centre O est le *produit* d'un faisceau du 1er ordre (Δ) et d'un faisceau du second ordre (Δ′) projectif avec le premier; c'est donc une cubique.

Solution analytique par M. Bastin. Prenons pour axes la droite AB et la perpendiculaire en son milieu M; désignons par α, β les coordonnées de C, par θ la tangente de l'angle des asymptotes. La première asymptote a pour équation

$$y - \beta = m(x - \alpha). \qquad (1)$$

Comme elle rencontre AB au point d'abscisse $\alpha - \frac{\beta}{m}$, la seconde asymptote coupe AB au point d'abscisse $-\alpha + \frac{\beta}{m}$; de plus son coefficient angulaire m' résulte

$$\theta = \frac{m - m'}{1 + mm'}.$$

L'équation de la seconde asymptote est donc

$$y = \frac{m - \theta}{1 + m\theta}\left(x - \frac{\beta}{m} + \alpha\right); \qquad (2)$$

en l'écrivant ainsi

$$m^2(\theta y - x - \alpha) + m(y + \theta x + \theta\alpha + \beta) - \theta\beta = 0$$

on obtient l'équation de l'enveloppe en égalant à zéro le discriminant. On trouve

$$(y + \theta x + \theta\alpha + \beta)^2 + 4\theta\beta(\theta y - x - \alpha) = 0;$$

en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au symétrique C′ de C par rapport à M, il vient plus simplement

$$(y + \theta x)^2 + 4\theta\beta(\theta y - x - \theta\beta) = 0,$$

ou

$$(\theta + 1)(x^2 + y^2) = (x - \theta y + 2\theta\beta)^2.$$

Il en résulte que l'enveloppe est une parabole de foyer C′ et dont la directrice passe par la projection de C sur le nouvel axe des y et fait avec celui-ci l'angle θ.

Pour avoir l'équation du lieu des centres par rapport aux axes MA, My, il suffit d'éliminer m entre (1) et (2); on trouve une cubique.

Autre bonne solution analytique par MM. Lez et Abramescu.

Question 1502.

(Voir *Mathesis*, (3), V, p. 29).

ABCD *étant un tétraèdre quelconque, on prend sur les arêtes* BA, CA, DA *des longueurs* BB′, CC′, DD′ *proportionnelles à trois longueurs données. Démontrer que le centre de gravité du triangle* B′C′D′ *décrit une droite et que la sphère circonscrite au tétraèdre* AB′C′D′ *passe par un cercle fixe.* (J. Neuberg).

Solution par M. C. A. Laisant. Soient AB, AC, AD trois axes coordonnés. Les points B′, C′, D′ ont pour coordonnées, en posant AB = b, AC = c, AD = d :

$$b + \lambda b',\ 0,\ 0;\quad 0,\ c + \lambda c',\ 0;\quad 0,\ 0,\ d + \lambda d'.$$

Le centre de gravité de B′C′D′ a donc pour coordonnées

$$\frac{b + \lambda b'}{3},\quad \frac{c + \lambda c'}{3},\quad \frac{d + \lambda d'}{3}.$$

Il décrit évidemment une droite passant par le point $\left(\frac{b}{3}, \frac{c}{3}, \frac{d}{3}\right)$, centre de gravité de BCD, et ayant b', c', d' pour paramètres directeurs.

Si on transforme par inversion la sphère AB'C'D' par rapport au point A, on obtient un plan P dont l'équation est

$$x(b+\lambda b')+y(c+\lambda c')+z(d+\lambda d')=K,$$

K étant la puissance d'inversion. Ce plan passe toujours par la droite d

$$bx+cy+dz=K, \quad b'x+c'y+d'z=0.$$

En transformant le plan P par inversion, on obtient la sphère ABCD ou S, et la droite fixe d se transforme en un cercle fixe C sur cette sphère S.

Solution par M. F. Dupont. 1 M étant le centre de gravité du triangle BCD, si l'on imprime à B le déplacement BB', M aura un déplacement MM_1 équipollent à $\frac{1}{3}$ BB'. De même, si l'on fait passer C en C', puis D en D', le centre de gravité subit successivement les déplacements M_1M_2 équipollent à $\frac{1}{3}$ CC_1, M_2M_3 équipollent à $\frac{1}{3}$ DD'. Les droites BB', CC', DD' étant proportionnelles à trois longueurs fixes et leurs directions ne changeant pas, la ligne brisée $MM_1M_2M_3$ sera toujours homothétique à elle-même et le point M_3, centre de gravité de B'C'D', décrit une droite.

On peut remarquer que le centre de gravité du tétraèdre AB'C'D' décrit une droite parallèle à MM_3.

2. Soient P, Q, R les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC, ACD, ADB.

Déterminons le point P au moyen des médiatrices des droites AB, AC. En transportant B en B', la médiatrice de AB subit une translation mesurée par $\frac{1}{2}$ BB', et le point P éprouve sur la médiatrice de AC un déplacement $PP_1=\frac{B'B}{2\sin A}$. Le déplacement de C en C' imprime ensuite au point P_1 sur la médiatrice de A'B, un déplacement $P_1P_2=\frac{CC'}{2\sin A}$. La ligne PP_1P_2 étant toujours homothétique à elle-même, le centre P_2 du cercle circonscrit au triangle ABC parcourt une droite p. De même Q parcourt une droite q, R une droite r.

Le centre de la sphère AB'C'D' a évidemment pour lieu géométrique l'intersection d des plans menés par p, q, r perpendiculairement aux

faces correspondantes du tétraèdre AB'C'D'. Le cercle engendré par le point A en tournant autour de d appartient à toutes les sphères AB'C'D'.

M. Rose a donné de la première partie la même solution que M. Laisant. Pour établir la seconde partie, il représente la sphère AB'C'D' par l'équation

$$x^2+y^2+z^2+2\beta yz+2\beta' zx+2\beta'' xy+\mu x+\mu' y+\mu'' z=0 \qquad (1)$$

où β, β', β'' sont les cosinus des angles des axes. On a les conditions

$$b+\lambda b'+\mu=0, \quad c+\lambda c'+\mu'=0, \quad d+\lambda d'+\mu''=0.$$

Tirant de là les valeurs de μ, μ', μ'' pour les substituer dans l'équation (1), on trouve

$$\Sigma x^2+2\Sigma\beta yz-(bx+cy+dz)-\lambda(b'x+c'y+d'z)=0. \qquad (2)$$

Quel que soit λ, la sphère (2) passe par l'intersection de la sphère ABCD et du plan représentés par

$$\Sigma x^2+2\Sigma\beta yz-(bx+cy+dz)=0, \quad (b'x+c'y+d'z=0.$$

On pourrait aussi démontrer que les cercles AB'C', AC'D', AD'B' passent par des points fixes et, par suite, la sphère AB'C'D' par un cercle fixe.

La première partie est susceptible de la généralisation suivante; si trois masses parcourent trois droites quelconques avec des vitesses constantes, leur centre de gravité parcourt une droite.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1225. Le lieu du point d'intersection des normales menées aux extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse a pour équation

$$2(a^2x^2+b^2y^2)^3=c^4(a^2x^2-b^2y^2)^2.$$

(NESBITT).

La quadrature de cette courbe est un joli exercice de calcul intégral.

1226. Soient H l'orthocentre du triangle ABC, N et O les centres du cercle des neuf points et du cercle circonscrit. On a les relations

$$\overline{HA}^2+\overline{HB}^2+\overline{HC}^2-\overline{HO}^2=3R^2 \qquad (1)$$

$$\overline{NA}^2+\overline{NB}^2+\overline{NC}^2+\overline{NH}^2=3R^2. \qquad (2)$$

Ces formules nous ont été signalées par M. Emmerich; elles peuvent se déduire de la suivante, bien connue :

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=3\overline{MG}^2+\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2.$$

En effet, si l'on fait coïncider M avec H, O ou N, on trouve

$$\overline{HA}^2+\overline{HB}^2+\overline{HC}^2=3\overline{HG}^2+\Sigma\overline{AG}^2, \qquad (3)$$

$$3R^2=3\overline{OG}^2+\Sigma\overline{AG}^2, \qquad (4)$$

$$\overline{NA}^2+\overline{NB}^2+NC^2=3\overline{NG}^2+\Sigma\overline{AG}^2. \qquad (5)$$

Si l'on soustrait (4) de (3), en observant que $HG = \frac{2}{3} HO$, $OG = \frac{1}{3} HO$, on obtient (1).

L'égalité (2) se démontre de la même façon.

1227. Déterminer le diamètre de l'ellipse qui a une longueur égale à la distance des foyers. (BARISIEN).

On doit avoir $c > b$ ou $a > b\sqrt{2}$. L'anomalie d'une extrémité du diamètre cherché résulte de $a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi = c^2$ ou $\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{b^2}{a^2 - 2b^2}$.

1228. Etant donnée une ellipse E, on décrit deux cercles concentriques variables C, C' ayant pour rayons deux demi-diamètres conjugués $OM = a'$, $OM' = b'$. On mène une tangente commune t à E et C, une tangente commune t' à E et C'. Lieu du point de concours N de t et t'. (BARISIEN).

Les équations de t et t' sont

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}, \qquad (1)$$

$$x\cos\beta + y\sin\beta = \sqrt{a^2\cos^2\beta + b^2\sin^2\beta}. \qquad (2)$$

Les radicaux doivent être égaux à a' et b'.

La condition $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$ donne $\cos^2\beta - \sin^2\alpha = 0$. En prenant $\cos\beta = -\sin\alpha$, on suppose t et t' perpendiculaires et N décrit le cercle de Monge. A l'hypothèse $\cos\beta = \sin\alpha$ ou $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ correspondent deux tangentes également inclinées sur une bissectrice de l'angle des axes. L'équation de t' devient

$$x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}. \qquad (3)$$

En retranchant l'une de l'autre les équations (1) et (3) élevées au carré on obtient $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$.

1229. Trouver une courbe telle que le rayon vecteur OM soit moyen proportionnel entre les distances de l'origine O aux points de rencontre de l'axe Ox avec la tangente et la normale.

(ROSE).

Équation différentielle de la courbe :

$$xy'^2 - 2yy' - x = 0.$$

Poser $y = xz$ ce qui donne

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{dx}{x} = 0.$$

Les courbes cherchées sont les paraboles $x^2 + 2dy - a^2 = 0$.

1230. Trouver le lieu d'un point tel que la bissectrice de l'angle des tangentes menées de ce point à une ellipse donnée ait une direction

donnée. — Cas particulier où cette direction est la bissectrice de l'angle des axes. (E. N. Barisien).

Les coefficients angulaires des tangentes issues du point (x, y) vérifient l'équation

$$(x^2 - a^2)\, m^2 - 2mxy + y^2 - b^2 = 0.$$

On doit avoir

$$\frac{m + m'}{1 - mm'} = \operatorname{tg} 2\delta, \quad \text{etc.}$$

Dans le cas particulier, on trouve une hyperbole équilatère (Voir n° 1228).

1231. On considère tous les triangles ABC inscrits dans un cercle donné et tels que les côtés AB, AC soient parallèles à des directions données. Le lieu de l'orthocentre est une ellipse. (E. N. Barisien).

La corde BC a une longueur constante et les hauteurs BH, CH ont des directions fixes. Le problème est ramené à une question connue.

On peut prendre pour axes les diamètres du cercle, parallèles aux bissectrices des angles des hauteurs, représenter les coordonnées de B et C par $R\cos(\varphi + \delta)$, $R\sin(\varphi + \delta)$ et $R\cos(\varphi - \delta)$, $R\sin(\varphi - \delta)$, où φ est constant et δ variable. Les équations des hauteurs sont

$$y - R\sin(\varphi + \delta) = m\,[x - R\cos(\varphi + \delta)]$$
$$y - R\sin(\varphi - \delta) = -m\,[x - R\cos(\varphi + \delta)];$$

on peut les remplacer par leur somme et leur différence, puis éliminer δ.

1232. On donne deux coniques homofocales C et C'. Le lieu du sommet d'un angle droit dont l'un des côtés est tangent à C et l'autre côté tangent à C' est un cercle.

Ce théorème assez connu nous a été adressé par un correspondant comme question proposée. Pour le démontrer, il suffit d'écrire les équations des deux tangentes sous la forme.

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha},$$
$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = \sqrt{(a^2 + u)\sin^2\alpha + (b^2 + u)\cos^2\alpha},$$

et de faire la somme de leurs carrés.

1233. Soient D, E, F les points où le cercle inscrit I à un triangle ABC rectangle en A touche les côtés BC, CA, AB. Si l'on prend sur BC une longueur BM = BA, le cercle qui passe par les points B, M, I touche la droite CI, et la parallèle à CI par F passe par les points de contact des côtés AC, BC avec le cercle exinscrit dans l'angle ABC. (A. C.).

1234. Si un côté AB d'un triangle est perpendiculaire à une médiane adjacente AA′, on a

$$b^2 + 3c^2 = a^2, \quad \cos A = -\frac{c}{b}$$

$$\cos B = \frac{2c}{a}, \quad \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{(a-b)(2b-a)}{6ab}.$$

Entre les médianes a', b', c' on a la relation

$$c'^2 + 3a'^2 = b'^2.$$

Dans le même triangle AB est perpendiculaire à la symédiane issue de A. (J. N.).

1235. Une transversale d menée par le milieu A′ du côté BC d'un triangle ABC rencontre AC en B′, AB en C′. Démontrer la relation

$$\frac{b^2}{\overline{C'A'}^2} + \frac{c^2}{\overline{B'A'}^2} + 2\frac{bc\cos A}{B'A'.C'A'} = 4.$$

(*Généralisation de la question* 459 du JME).

En effet, les triangles BA′C′, CA′B′ coupés par les transversales AC, AB donnent eu égard aux relations $BC = 2BA' = 2A'C$:

$$\frac{AC'}{B'C'} = \frac{c}{2B'A'}, \quad \frac{AB'}{B'C'} = \frac{b}{2C'A'}.$$

De plus,

$$\overline{AC'}^2 + \overline{AB'}^2 + 2AB'.AC'\cos A = \overline{B'C'}^2, \text{ etc.}$$

(DE ALBA).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS (*)

Concours d'admission en 1905.

COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz on considère deux cônes (S) et (T), se coupant à angle droit suivant Oz et dont les sommets S et T sont situés sur la partie positive de Oz, de

---

(*) Nous insérerons volontiers dans *Mathesis* des solutions de ces questions (*Rédaction*).

façon que $OS = \gamma$, $OT = \gamma'(\gamma' > \gamma)$: leur bases dans le plan xOy sont les circonférences dont les centres et les rayons sont A (sur Ox) et a pour (S) et B (sur Oy) et b pour (T).

Les deux cônes ont ainsi en commun, outre l'axe Oz, une courbe (Γ).

1° Former l'équation de la cubique (C) projection de (Γ) sur le plan xOy, et construire cette cubique.

2° Soit PQ une corde quelconque de (Γ) [obtenue, par exemple, en la considérant comme située sur une génératrice (G) d'un hyperboloïde passant par l'intersection complète des cônes (S) et (T)] : soit pq la projection de PQ sur le plan xOy ; cette projection rencontre la cubique (C), entre les points p et q, en un troisième point m.

On demande le lieu de la droite PQ dans les cas suivants :

1° Le point m est fixe.

2° Les droites Op et Oq font des angles égaux avec Ox.

3° La corde pq est vue de l'origine suivant un angle droit.

Généraliser.

Composition d'Algèbre et de Trigonométrie.

I. Démontrer que l'égalité $\sin B = \frac{1}{3}\sin(2A + B)$ entraine la suivante : $\operatorname{tang}(A + B) = \frac{5}{4}\operatorname{tang} A$.

II. Calculer la valeur de e^2 à un dix-millième près (on ne supposera pas connue la valeur du nombre e).

III. 1° Trouver une série S ordonnée suivant les puissances entières et positives d'une variable x, et telle qu'on ait identiquement la relation

$$x(1+x)[2+(2-p)x]S'' + [(p^2-p-2)x^2 - 4x - 2]S' + 2p[1+(2-p)x]S = 0,$$

S′ désignant la série des dérivées premières et S″ la série des dérivées secondes des termes de la série S.

2° Etudier les conditions de convergence des séries S ainsi obtenues.

3° Examiner en particulier les solutions qui s'annulent pour $x = 0$.

4° Qu'arrive-t-il si p est un nombre entier et positif?

N. B. Les candidats pourront commencer par traiter les cas les plus simples où p a l'une des valeurs : 1, 2, ou — 1.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1531.** Deux cercles O et O′ se coupent en A et A′. La tangente en A au cercle O′ rencontre le cercle O en B; la tangente en A au cercle O rencontre le cercle O′ en B′.

1° Les cordes AB, A′B′ sont proportionnelles aux rayons des deux cercles; 2° $\overline{AA'}^2 = A'B.A'B'$; 3° l'angle BA′B′ est double de l'angle BAB′; 4° Calculer la distance BB′ en fonction des rayons et de la distance OO′. (E. N. Barisien).

1532 D'un point M du plan d'une parabole de foyer F, on abaisse les trois normales à la courbe en N_1, N_2, N_3

Démontrer que

$$\frac{FN_1.FN_2.FN_3}{\overline{FM}^2} = \text{constante.}$$

(E. N. Barisien).

Trouver une relation entre les rayons FN_1, FN_2, FN_3, qui soit indépendante de la position de M. (J. N.).

1533. La tangente en un point M d'une courbe rencontre l'axe Ox en T, la normale rencontre les deux axes en N et N′. Déterminer cette courbe par la condition qu'il existe un rapport constant K entre la distance NT et la somme ON + ON′. (J. Rose).

1534. Trouver les formules de transformation les plus générales :

$$x = f(x_1, y_1), \quad y = \varphi(x_1, y_1)$$

qui changent une courbe quelconque Δ en une autre courbe Δ_1 telle, que si la tangente en un point quelconque M de Δ coupe l'axe Ox en T et que la normale au point correspondant M_1 de Δ_1 coupe l'axe Oy en N, le rapport OT : ON ait une valeur constante K. (J. Neuberg).

×**1535**. On donne un triangle ABC et un plan quelconque P. Trouver dans ce plan un point M tel que les droites AM, BM, CM soient également inclinées sur le plan P. Discussion. (A. C.).

Rectifications. — M. H. Lez, dont la solution de la question 1506 nous est parvenue trop tard pour être mentionnée p. 139, nous signale les rectifications suivantes :

P. 140. Il manque le facteur 2 au dénominateur des formules (6). P. 141, ligne 8, le facteur 4 manque au dénominateur de la valeur de r^2. Ligne 12, lire $(b^2 + a^2\sin^2\theta)^3$ au lieu de $(b^2 + a^2\sin^2\theta)$. Ligne 14, la dernière parenthèse est $\left(a^6 + a^4b^2 - 4a^3b^4 + \frac{2b^7}{a}\right)$. Ligne 16, lire $a^4\sin^4\theta + 2a^2b^3\sin^3\theta + b^4$.

×MÉMORIAL MATHÉMATIQUE.

Août.

1. 1861. Naissance de *I. O. Bendixon*, à Stockholm.
2. 1823. Mort de *L. Carnot*, à Magdebourg.
3. Néant. 4. 1799. Mort de *Maria Agnesi*, à Milan.
   1805. Naissance de *W. R. Hamilton*, à Dublin.
5. 1873. Mort de *Delaunay*, à Cherbourg.
6. Néant. 7. 1859. Naissance de *E. Kötter*, à Berlin.
8. 1602. Naissance de *Roberval*, à Beauvais.
9. 1843. Naissance de *J. Graindorge*, à Liége.
10. 1862. Naissance de *P. Stäckel*, à Berlin.
11. 1893. Mort de *Betti*, à Pise.
12. 1901. Mort de *F. de Jonquières*, à Monans-Sartous, près de Grasse.
13. 1886. Mort de *Laguerre*, à Bar-le-Duc.
14. 1842. Naissance de *G. Darboux*, à Nimes.
15. 1896. Mort de *Minnigerode*, à Spindelmühle, Riesengebirge.
16. 1705. Mort de *Jacques I Bernoulli*, à Bâle.
    1821. Naissance de *A. Cayley*, à Richmond, Surrey.
17. 1601. Naissance de *Fermat*, à Beaumont de Lomagne, près de Toulouse.
18. 1832. Naissance de *E. Rouché*, à Sommière, Gard.
19. 1662. Mort de *Pascal*, à Paris.
20. 1862. Naissance de *C. Segre*, à Saluces.
21. 1789. Naissance de *Cauchy*, à Paris.
22. 1896. Mort de *H. Resal*, à Annemasse.
23. 1797. Naissance de *B. de Saint Venant*, à Portoiseau, près Melun.
    1839. Naissance de *M. Cantor*, à Mannheim.
24. 1874. Mort de *B. Tortolini*, à Ariccia.
25. 1841. Naissance de *L. Pochhammer*, à Stendal.
26. Néant. 27. 1858. Naissance de *G. Peano*, à Cuneo.
28. 1796. Naissance de *J. Bienaymé*, à Paris.
29. 1728. Naissance de *Lambert*, à Mulhouse.
30. 1819. Naissance de *A. Serret*, à Paris.
31. 1821. Naissance de *Helmholtz*, à Potsdam.

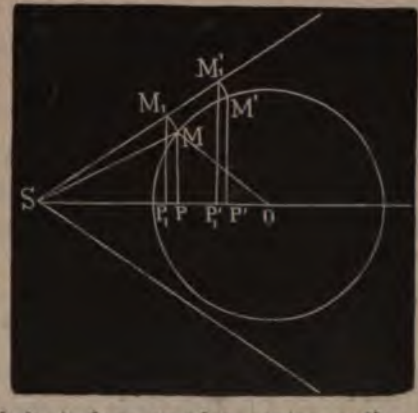
Septembre.

1. 1648. Mort de *Mersenne*, à **Paris.**
2. 1865. Mort de *W. R. Hamilton*, à **Dublin.**
3. 1814. Naissance de *Sylvester*, à **Londres.**
4. 1899. Mort de *Dedekind*, à **Brunswick.**
5. 1735. Naissance de *Montucla*, à **Lyon.**
1853. Naissance de *G. Enestrŏm*, à **Nora, Suède.**
6. Néant. **7. 1783.** Mort d'*Euler*, à **S. Pétersbourg.**
8. 1584. Naissance de *Gr. de Saint-Vincent*, à **Bruges.**
1883. Mort de *Liouville*, à **Paris.**
1894. Mort de *Helmholtz*, à **Charlottenbourg.**
9. 1883. Mort de *V. Puiseux*, à **Fontenay, Jura.**
1885. Mort de *Bouquet*, à **Paris.**
10. Néant. **11. 1890.** Mort de *Casorati*, à **Pavie.**
12. Néant. **13.** Néant.
14. 1847. Naissance de *G. Garbieri*, à **Bologne.**
15. 1883. Mort de *J. Plateau*, à **Gand.**
16. 1806. Naissance de *E. Lamarle*, à **Calais.**
17. 1826. Naissance de *Riemann*, à **Breselenz près Dannenberg, Hanovre.**
18. 1752. Naissance de *Legendre*, à **Paris.**
19. 1747. Naissance de *Delambre*, à **Amiens.**
20. 1882. Mort de *Briot*, à **Hoc près du Havre.**
21. 1576. Mort de *Cardan*, à **Rome.**
22. Néant. **23. 1877.** Mort de *Leverrier*, à **Paris.**
24. 1844. Naissance de *Nöther*, à **Francfort s/M.**
25. 1777. Mort de *Lambert*, à **Berlin.**
1819. Naissance de *Salmon*, à **Dublin.**
26. 1868. Mort de *Möbius*, à **Leipzig.**
1877. Mort de *H. Grassmann*, à **Stettin.**
27. 1855. Naissance de *P. Appell*, à **Strasbourg.**
28. 1824. Naissance de *G. Allman*, à **Dublin.**
29. 1803. Naissance de *Ch. Sturm*, à **Genève.**
1812. Naissance de *G. A. Göpel*, à **Rostock.**
30. 1829. Naissance de *F. Reuleaux*, à **Eschweiler près Aix-la-Chapelle.**

SUR UNE TRANSFORMATION DES FIGURES SPHÉRIQUES,

par M. C. E. Wasteels, répétiteur à l'Université de Gand.

1. Considérons une sphère de centre O et de rayon R, et un cône de révolution dont le sommet est en S et l'axe dirigé suivant SO. A un point quelconque M de la surface de la sphère nous allons faire correspondre un point M_1 de la surface conique de la manière suivante : dans le plan SOM, décrivons un arc de cercle de S comme centre avec SM comme rayon, et prenons pour M_1 l'intersection de cet arc de cercle avec la génératrice du cône située dans le plan SOM, du même côté de SO que M, par exemple, le cône étant supposé réduit à une nappe.



Cette transformation jouit de la propriété que *les aires de deux figures correspondantes sont entre elles dans un rapport constant.*

En effet, prenons sur la sphère deux points quelconques M et M′ situés dans un plan contenant l'axe SO et soient M_1 et M'_1 leurs correspondants dans la transformée; par rotation autour de SO, l'arc MM′ et le segment $M_1M'_1$ engendrent respectivement une zone sphérique et une zone tronconique : il s'agit de démontrer que le rapport des aires u et u_1 de ces deux zones est constant.

Abaissons les perpendiculaires MP et M′P′ sur SO et menons les droites OM et SM; nous aurons

$$\overline{OM}^2 = \overline{SM}^2 + \overline{SO}^2 - 2SO.SP,$$

le segment SP étant considéré comme positif ou négatif suivant qu'il a le sens SO ou le sens contraire.

Posons

$$SM = SM_1 = r, \quad SM' = SM'_1 = r', \quad SO = l, \quad SP = x, \quad SP' = x';$$

nous pourrons écrire

$$R^2 = r^2 + l^2 - 2lx, \quad R^2 = r'^2 + l^2 - 2lx'.$$

On en déduit

$$2l(x' + x) = r'^2 - r^2 = (r' - r)(r' + r),$$

ou

$$2l.\mathrm{PP}' = \mathrm{M_1M'_1}(r' + r).$$

Si l'on désigne l'angle $\mathrm{OSM_1}$ par α et qu'on abaisse encore les perpendiculaires $\mathrm{M_1P_1}$ et $\mathrm{M'_1P'_1}$ sur OS, on aura donc

$$2\pi\mathrm{R}.\mathrm{PP}'.l\sin\alpha = \pi(r'\sin\alpha + r\sin\alpha)\,\mathrm{M_1M'_1}.\mathrm{R}$$
$$= \pi(\mathrm{M_1P_1} + \mathrm{M'_1P'_1})\mathrm{M_1M'_1}.\mathrm{R},$$

ou

$$ul\sin\alpha = u_1\mathrm{R};$$

d'où

$$u : u_1 = \mathrm{R} : l\sin\alpha = \mathrm{R} : \mathrm{R_1},$$

$\mathrm{R_1}$ désignant la distance du centre O à la surface conique.

Le théorème étant ainsi établi dans le cas des deux zones, on l'étendra sans difficulté, par la méthode des limites, au cas de deux figures correspondantes quelconques.

2. Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le cône se réduit à un plan, et l'on voit que l'aire d'une figure sphérique est à celle de sa transformée plane comme le rayon de la sphère est à la distance de son centre au plan.

3. Dans le cas particulier où le cône est circonscrit à la sphère, $\mathrm{R_1} = \mathrm{R}$; de sorte que $u_1 = u$: les deux figures correspondantes sont donc équivalentes.

Les cas plus particuliers où le sommet S se trouve sur la sphère ou est rejeté à l'infini (cas du plan tangent ou du cylindre circonscrit) sont bien connus.

4. La propriété qui précède conduit immédiatement à un théorème analogue relatif à deux sphères. Considérons, en effet, une seconde sphère, de rayon R′ et dont le centre O′ se trouve sur SO : à une même figure tronconique on pourra faire correspondre une figure sur chacune des sphères; le rapport des aires de ces deux figures sphériques sera constant et égal à $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'} : \frac{l}{l'}$, l' désignant la distance SO′.

Observons que la correspondance établie entre les deux figures sphériques peut se définir comme celle du n° 1, pourvu qu'on remplace

le sommet du cône par un point quelconque S de la ligne des centres.

Dans le cas particulier où le point S coïncide avec l'un des centres de similitude des deux sphères, les figures correspondantes sont équivalentes.

5. APPLICATION. Nous allons appliquer la propriété du n° 2 à la recherche du potentiel newtonien d'une couche sphérique homogène en un point de l'espace.

Soient ρ la densité superficielle, m la masse totale attirante, O le centre et R le rayon de la sphère; il s'agit de trouver le potentiel U au point S. Partageons la surface de la sphère en parties Δu infiniment petites en tous sens et considérons les figures correspondantes Δu_1 dans le plan mené par S perpendiculairement à SO; on aura

$$U = \lim S \frac{\rho \Delta u}{r} = \frac{\rho R}{l} \lim S \frac{\Delta u_1}{r} = 2\pi\rho \frac{R}{l} \lim S \Delta r,$$

ou

$$U = 2\pi\rho \frac{R}{l}(r_1 - r_0),$$

r_0 et r_1 désignant respectivement la plus petite et la plus grande valeur de r.

Si le point S est *extérieur* à la sphère, on a

$$r_1 - r_0 = 2R;$$

d'où

$$U = \frac{4\pi R^2 \rho}{l} = \frac{m}{l},$$

potentiel dû à une masse m concentrée en O.

Pour un point *intérieur*, on a, au contraire,

$$r_1 - r_0 = 2l,$$

et, par suite,

$$U = 4\pi R\rho = \frac{m}{R},$$

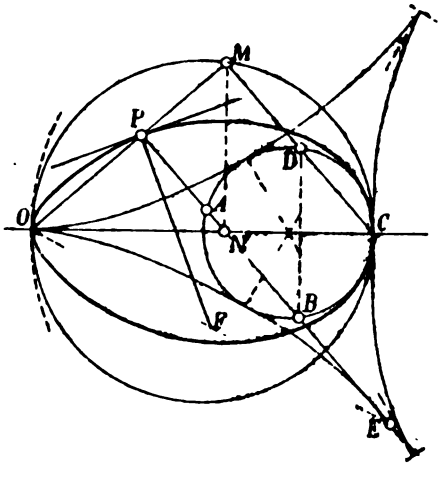
potentiel constant.

PODAIRE DE L'HYPOCYCLOIDE DE STEINER(*) PAR RAPPORT A UN POINT DE REBROUSSEMENT.

par M. V. Jeřábek.

Nous partons de la définition suivante :

Si l'on prend sur une circonférence CDA, *à partir d'un même point* C(**) *et dans des sens opposés, les arcs* CDA $= \alpha$, CB $= \beta$ *doubles l'un de l'autre, la droite* AB *enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.* Le point de contact E de AB est symétrique de A par rapport à B.



Les points A et B coïncident et la droite AB devient tangente au cercle directeur lorsque

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0;$$
$$\alpha = 240°, \quad \beta = 120°;$$
$$\alpha = 480°, \quad \beta = 240°.$$

Les points ainsi obtenus sont les sommets d'un triangle équilatéral CC'C''; on les appelle *sommets* de l'hypocycloïde.

La droite AB devient un diamètre du cercle directeur lorsque

$$\alpha = 360°, \ \beta = 180°; \quad \alpha = 120°, \ \beta = 60°; \quad \alpha = 600°, \ \beta = 300°.$$

Le point A coïncide alors avec C, C'' ou C'; les diamètres menés par ces points sont tangents à l'hypocycloïde en des points O, O'', O' qui

---

(*) Une bibliographie de l'hypocycloïde triangulaire a paru dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1896, pp. 166-168 (Brocard) et 1897, pp. 7-8 (Retali), et dans les *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 1904-1905, vol. XXIII, pp. 80-88 (Mackay). Quelques podaires de cette courbe ont été étudiées par MM. Brocard et de Longchamps sous les noms de *Folium double*, *Trifolium régulier*, *Trifolium droit*. Nous ne savons pas dire si le cas traité par M. Jeřábek a déjà été étudié. (J. N.).

(**) Le cas où les ars α et β partent de deux points différents se ramène facilement à celui où ils ont même origine. — Les lettres C'', C', O'', O' n'ont pas été marquées dans la figure.

sont symétriques de C, C'' ou C' par rapport à l'autre extrémité du diamètre. O, O', O'' sont des *points de rebroussement*.

Cherchons la podaire du point O. Soient D le milieu de l'arc CDA, N le point de rencontre de AB avec CO. DB étant perpendiculaire à CN et AB parallèle à DC, on voit facilement que NB = DC. OP rencontre CD en un point M de la circonférence de diamètre OC. Les rayons des cercles CDA, CMO étant dans le rapport 1 : 2, on a CD = DM = BN; donc MN est parallèle à DB et par suite perpendiculaire à OC. D'où la construction suivante de la podaire (P) :

On projette un point quelconque M *de la circonférence de diamètre* OC *en* N *sur le diamètre* OC, *puis* N *en* P *sur la corde* OM.

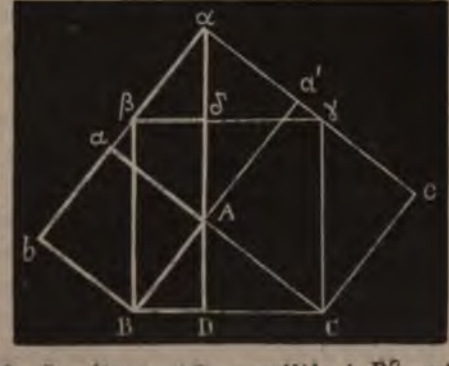
En coordonnées polaires $\rho = OP$, $\omega = NOP$, on a l'équation

$$\rho = a \cos^3 \omega.$$

La courbe (P) a reçu le nom de *Ovale de Münger*.

×SUR LE THÉORÈME DE PYTHAGORE.

1. *Démonstration complète de Saint-Venant.* Soient ABC un triangle rectangle en A, AB*ba* et AC*ca'* les carrés construits sur les côtés AB et AC. Portons sur *ba*, *ca'* prolongés au besoin, les longueurs $b\beta = AC$, $c\gamma = AB$ et joignons $B\beta$, $C\gamma$, $\beta\gamma$. On prouve aisément que les triangles $Bb\beta$, $Cc\gamma$ sont égaux à ABC, que $B\beta$, $C\gamma$, égaux à BC sont perpendiculaires à BC et, par suite, que $BC\beta\gamma$ est le carré construit sur l'hypoténuse BC du triangle ABC.



Prolongeons $b\beta$ d'une longueur $\beta\alpha = BA$, menons $\alpha\gamma$ et αA rencontrant $\beta\gamma$ en δ et prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre en D avec BC. Puisque $\beta\alpha$ est égal et parallèle à BA, $\beta\alpha AB$ est un parallélogramme et $A\alpha = B\beta = BC$. La ligne αAD, parallèle à $B\beta$, est perpendiculaire à BC. La figure $Bb\alpha a'$ est aussi un parallélogramme parce que $b\alpha = b\beta + \beta\alpha = AC + AB$ est égal et parallèle à $Ba' = AB$

$+$ AC; donc $aa' = bB$ et l'angle $aa'A$ est droit; par suite, aa' est le prolongement de ca'. Enfin, $A\alpha\gamma C$ étant aussi un parallélogramme, $\alpha\gamma$ est égal à AC. Il en résulte que le triangle $\alpha\beta\gamma$ ayant ses trois côtés égaux à ceux de ABC, est égal à ABC et est rectangle en α.

Le carré $BAab$ est équivalent au parallélogramme de même base AB et de même hauteur, $BA\alpha\beta$, qui est équivalent au rectangle $BD\delta\beta$. De même, le carré $ACca'$ est équivalent au parallélogramme $AC\gamma\alpha$, qui est équivalent au rectangle $DC\gamma\delta$.

Donc enfin le carré $BC\gamma\beta$ équivaut à la somme des carrés $ABba$, $ACca$.

Cette démonstration *plus naturelle* que celle d'Euclide (I, 47) est due, pensons-nous, à B. de Saint-Venant.

2. *Démonstration incomplète.* Supprimons la ligne AD. La figure entière $BCcab$ est égale au carré $BC\beta\gamma$ construit sur l'hypoténuse BC plus trois triangles égaux à ABC, savoir $Bb\beta$, $\alpha\beta\gamma$, $Cc\gamma$. La figure entière est aussi égale à la somme des carrés $ABba$, $ACca'$ construits sur les deux côtés, plus le triangle ABC, et le rectangle $Aaaa'$, composés de deux triangles Aax, $Aa'\alpha$ égaux à ABC. Donc, etc.

Cette démonstration, qui a une *apparence* intuitive, est moins complète que celles d'Euclide et de Saint Venant puisqu'elle ne fait pas connaître les rectangles, parties du grand carré qui sont équivalents chacun séparément aux carrés construits sur les côtés. Elle a été réinventée et transformée bien des fois.

3. *Historique.* On ignore par quelle voie PYTHAGORE (580-500) dans la Grande Grèce, APASTAMBA (quatrième ou cinquième siècle avant J. C.) dans l'Inde sont arrivés à la célèbre proposition dont nous nous occupons ici. M. ZEUTHEN (*Deuxième congrès de philosophie*, Genève, 4 8 septembre 1904; *Comptes rendus*, pp. 833-854) soupçonne que les Indous ont employé une démonstration substantiellement identique à celle du n° 2, la figure étant complétée par l'addition d'un triangle égal à ABC, obtenu en prolongeant bB, cC jusqu'à leur rencontre (l. c., p. 846); que les Grecs, plus intellectuels, ont, avant Euclide, établi le théorème d'une manière plus complète, en s'appuyant sur la similitude des triangles ABD, ACD (l. c., p. 848). Bien entendu, cette démonstration n'est devenue rigoureuse que lorsque Eudoxe eut établi la théorie générale des proportions entre grandeurs commensurables ou non.

(P. M.)

BIBLIOGRAPHIE.

1. Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences. Conférences faites en Amérique par E. Picard, membre de l'Institut. Paris, Gauthier-Villars, 1905 (IV-163 pp., in-8). Prix : fr. 3,50.

2. **Étude sur le développement des méthodes géométriques**, lue le 24 septembre 1904 au Congrès des Sciences et des Arts à Saint Louis, par G. Darboux. Paris, Gauthier-Villars (34 p. in-8°). Prix : fr. 1,50.

3. L'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique, par H. Poincaré. Conférence faite à Saint Louis (*Bulletin des sciences mathématiques*, décembre 1904, 1re partie, pp. 302-324).

Ces conférences contiennent un exposé magistral du développement des parties les plus élevées des sciences mathématiques, surtout à la fin du 19e siècle. Il est impossible évidemment d'analyser ces écrits si pleins de pensées et si suggestifs. Nous devons nous contenter de les signaler spécialement aux jeunes géomètres et de donner un aperçu des sujets qui y sont abordés.

I. 1. Sur l'extension de quelques notions mathématiques et en particulier de l'idée de fonction depuis un siècle. 2. Quelques vues générales sur les équations différentielles. 3. Sur la théorie des fonctions analytiques et sur quelques fonctions spéciales. 4. Sur le développement de l'Analyse mathématique et ses rapports avec la géométrie, la mécanique, la mécanique céleste, la physique mathématique, la chimie, la biologie et l'économie politique.

II. 1. Carnot, Monge. 2-4. Poncelet, Möbius, Plücker, Chasles. 5-6. La géométrie des courbes et des surfaces algébriques : Cayley, Salmon, Cremona, Clebsch. 7. La géométrie cinématique de Poinsot, la géométrie énumérative de Jonquières et Chasles, etc. 8. La géométrie purement projective de von Staudt. 9. La géométrie pluckérienne. 10-12. La géométrie infinitésimale. Comme on le sait, les *Leçons sur la théorie des surfaces* de M. Darboux contiennent un exposé d'ensemble des travaux des autres géomètres et des siens propres dans ce domaine. 13. Les recherches de Lie. 14. La géométrie élémentaire (publié dans *Mathesis*, p. 41-42). 15. Géométrie à n dimensions; équipollences, quaternions; *analysis situs;* géométrie cinématique; nomographie; geométrographie. Utilité de la culture simultanée de l'analyse et de la géométrie.

III. 1. La physique des forces centrales. La physique des principes. 2. Principes menacés : le principe de Carnot; le principe de la relativité; le principe de l'égalité de l'action et de la réaction; le principe de la conservation de la masse; le principe de la conservation de l'énergie. 3. Le principe de la moindre action n'est pas menacé. Peut-être pourra-t-on sauver les autres, ou au moins les conserver comme principes de première approximation.

Quelques citations. 1. « La pénétration réciproque des diverses disciplines est aujourd'hui un fait capital et sera de plus en plus la source d'importantes

découvertes. A cet égard, il y a une grande différence entre notre époque et des temps un peu antérieurs. Nous avons peine aujourd'hui à comprendre certaines histoires où l'on voit des géomètres mépriser des analystes, et inversement; nous sentons que l'ère des écoles fermées et étroitement attachées à un seul point de vue est pour toujours terminée. Il est bien vraisemblable que l'érudition jouera à l'avenir un plus grand rôle qu'autrefois en mathématiques. Les mathématiciens perdront peut-être ce privilège de la précocité qui étonne tant de personnes; ils se rapprocheront des physiciens et des naturalistes qui doivent en général commencer plus tard leurs travaux personnels. En terminant, je me permettrai de donner un conseil aux étudiants mathématiciens; je leur recommanderai de ne pas se cantonner trop tôt dans des recherches spéciales. Il leur faut acquérir d'abord des vues générales sur les diverses parties de notre science, sans lesquelles leurs recherches risqueraient de rester stériles, et qui leurs coûteraient plus tard un bien plus grand effort. » PICARD, p. 117).

2. « La vraie rigueur est féconde, se distinguant par là d'une autre purement formelle et ennuyeuse, qui répand l'ombre sur les problèmes qu'elle touche. » (PICARD, p. 148).

3. « L'analyse mathématique restera toujours cette langue qui suivant un mot de Fourier, *n'a point de signes pour exprimer les notions confuses*, langue douée d'une admirable puissance de transformation et capable de condenser dans ses symboles un nombre immense de résultats. » (PICARD, p. 167).

4. « C'est à son école (de la Géométrie) que nous avons appris, que nos successeurs auront à apprendre, à ne jamais se fier trop aveuglément aux méthodes trop générales, à envisager les questions en elles même et à trouver, dans les conditions particulières à chaque problème, soit un chemin direct vers une solution facile, soit le moyen d'appliquer d'une manière appropriée les procédés généraux que toute science doit rassembler. » (DARBOUX, p. 33).

5. « Si l'on était acculé à la nécessité » de refaire une nouvelle physique mathématique, « il ne faudrait pas en conclure que la science ne peut faire qu'un travail de Pénélope, qu'elle ne peut élever que des constructions éphémères qu'elle est bientôt forcée de démolir de fond en comble de ses propres mains... Nous avons déjà passé par une crise semblable. Je vous ai déjà montré que, dans la seconde physique mathématique, celle des principes, on retrouve les traces de la première, celle des forces centrales; il en sera encore de même si nous devons en connaître une troisième. Tel l'animal qui mue, qui brise sa carapace trop étroite et s'en fait une plus jeune; sous son enveloppe nouvelle, on reconnaîtra aisément les traits essentiels de l'organisme qui ont subsisté. » (POINCARÉ, sub fine). (P. M.).

Quadratic Partitions by Lt-Col. ALLAN CUNNINGHAM, R. E., Fellow of King's College, London. London, Hodgson, 1904. (In-8, de XXIII-266 pp., cartonné). Prix : sh. 12.

Cet ouvrage contient des tables très utiles aux personnes s'occupant

d'arithmétique supérieure. Une première colonne donne les nombres premiers p de 2 à 100000; une seconde, les décompositions des nombres $p-1$ en facteurs premiers; d'autres colonnes (p.p. 1-240) donnent les décompositions des nombres p ($p < 100000$) selon les formules $p = a^2 + b^2$, $c^2 + 2d^2$, $A^2 + 3B^2$, $\frac{1}{4}(L^2 + 27M^2)$, ou pour d'autres limites supérieures de p, les décompositions de p selon les formules $e^2 - 2f^2$, $x^2 - 5y^2$, $\frac{1}{4}(X^2 - 5Y^2)$, $t^2 + 7w^2$, $\frac{1}{4}(v^2 + 11w^2)$, $A'^2 - 3B'^2$, $x'^2 + 5y'^2$, etc.; enfin, on y trouve les solutions des équations de Pell $\tau^2 - Dv^2 = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$, pour les valeurs de D inférieures à 20 et ne contenant pas de diviseur carré.

Entwurf eines arithmetischen Lehrganges für höhere Schulen von Oberlehrer Dr Fr. Haacke. Leipsig, Teubner, 1904. (In-8 cartonné de 53 pp. avec 4 figures). Prix : marc 0,80.

Cet opuscule est un simple canevas pour l'enseignement théorique des opérations arithmétiques ou algébriques. L'auteur s'attache principalement au sens des opérations, à leurs liaisons et à leurs généralisations successives. Dans la préface, il déclare se mettre en garde contre les abstractions nuisibles ou prématurées; cependant le lecteur habitué à la clarté des manuels français goûtera probablement fort peu la manière dont l'ouvrage est écrit.

M. Haacke parle de huit opérations fondamentales, parce qu'il distingue avec soin les deux cas de la division suivant que le diviseur joue le rôle de multiplicateur (opération de partager) ou celui de multiplicande (opération de mesurer ou de prendre un rapport). Il représente le logarithme de p dans le système à base a par la notation $\underset{a}{\wedge} p$ et donne à a^{b^c} la signification $(a^b)^c$, ce qui est contraire à l'usage français. La théorie des quantités incommensurables, négatives ou imaginaires prête à la critique. (J. N.).

Théorie des nombres irrationnels, des limites et de leur continuité par R. Baire, maître de conférences à l'Université de Montpellier. Paris, Vuibert et Nony, 1905. (In-8°, de 62 pp.). Prix : fr. 1,50.

Table des matières. Introduction (5-8). I. Définition des nombres irrationnels (9-14). II. Borne supérieure et borne inférieure d'un ensemble (15-17). III. Limite d'une suite de nombres (18-21). IV. Valeurs approchées d'un nombre (22-24). V. Différence de deux nombres (25). VI. Théorèmes sur les limites (26-29). VII. Notions de fonctions et de continuité (30-32). VIII. Fonctions d'arguments rationnels (33-35). IX. Principe d'extension (36-42). X. Extension du calcul algébrique (43-44). XI. Théorèmes sur les fonctions continues (45-51). XII. Fonctions inverses (52-54). XIII. Définition des fonctions $\sqrt[m]{x}$, a^x, x^y, $\log x$ (55-59).

Les nombres irrationnels sont définis par la notion de *coupure*. Une suite infinie $u_1, u_2, \ldots$ est dite avoir pour limite le nombre λ si, quels que soient les

nombres λ' et λ'' satisfaisant aux relations $\lambda' < \lambda < \lambda''$, il y a un nombre entier p tel que, pour $n > p$, on a $\lambda' < u_n < \lambda''$. Si l'un au moins des nombres x, y est irrationnel, la différence $y - x$ est définie comme étant la borne supérieure des différences $b - a$ de deux nombres rationnels quelconques vérifiant les conditions $x < a < b < y$, a pouvant être égal à x, b égal à y.

Cette dernière définition suffit à l'auteur pour établir le célèbre théorème de Cauchy sur la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite ait une limite, théorème qui, combiné avec quelques autres analogues, conduit à une proposition générale (principe d'extension) d'où résultent comme cas particuliers les définitions de la somme, du produit, du quotient de deux nombres, de a^x.

L'opuscule de M. Baire, comme on le voit par cette courte analyse, peut donner satisfaction aux amateurs de l'*arithméltsation* de l'analyse. (J. N.).

Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik von Dr R. Gans, Privatdozent an der Universität Tübingen. Leipsig. Teubner, 1905. (In-8° cartonné de X-101 pp. avec 31 figures dans le texte). Prix : marcs 2,80.

Table des matières. Chap. I. Les opérations élémentaires de l'analyse vectorielle. Chap. II. Les opérations différentielles et les théorèmes sur les intégrales (propositions de Gauss, de Stockes, de Green). Chap. III. Coordonnées curvilignes. Décompositions de vecteurs. Déformations mécaniques Chap. IV. Applications tirées de l'hydrodynamique et de l'electrodynamique (Equations d'Euler, de Helmholtz, de Maxwell, de Hertz, de Lorentz).

Voici comment l'auteur, dans la préface, explique le but spécial de son ouvrage qui ne fait pas double emploi avec l'*Introduction à la théorie de l'électricité de Maxwell* par A. Föppl ni avec les *Eléments de l'Analyse vectorielle* par Bücherer :

« Le développement de l'électrodynamique des corps en mouvement et la théorie des électrons exigeant de plus en plus que le lecteur sache manier les méthodes de l'analyse vectorielle, un ouvrage tenant compte des besoins spéciaux de ces sciences m'a paru opportun. En effet, beaucoup de lecteurs n'acquièrent pas une vue d'ensemble des résultats importants acquis dans ces domaines, parce que les méthodes de calcul ne leur sont pas assez familières; de plus, il est incontestable que ceux qui ont l'intention de s'approprier complètement et de la façon la plus commode la littérature actuelle et celle de l'avenir, ou de travailler d'eux-mêmes dans le domaine de l'électricité théorique, doivent avoir pour premier souci de posséder un outil convenable, c'est-à-dire l'analyse vectorielle.

« L'analyse vectorielle présente l'avantage d'épargner beaucoup de place, de donner des formules plus pratiques, de faire ressortir plus clairement les faits physiques proprement dits et de montrer directement ce qui ne varie pas avec des axes coordonnés choisis arbitrairement. »

L'ouvrage de M. Gans est bien écrit; toutefois, on peut reprocher à l'auteur une trop grande concision en certains endroits où il suppose au lecteur des connaissances mathématiques assez étendues. (J. N.).

NOTES MATHÉMATIQUES.

18. *Une application de la théorie des réseaux.* Un abonné nous adresse une note bien faite, où il fait l'application de la théorie des réseaux de coniques (Jacobienne et Cayleyenne) à un réseau de cercles. Cette question est traitée dans beaucoup de traités de géométrie analytique.

Pour les jeunes lecteurs de *Mathesis*, il n'est peut-être pas inutile de résumer les principaux résultats. Etant donnés trois cercles quelconques représentés en coordonnées cartésiennes homogènes (x, y, z) par les équations

$$C = 0, \qquad C' = 0, \qquad C'' = 0,$$

le lieu d'un point M dont les polaires par rapport à ces cercles concourent en un même point M′ a pour équation

$$\begin{vmatrix} \frac{dC}{dx} & \frac{dC}{dy} & \frac{dC}{dz} \\ \frac{dC'}{dx} & \frac{dC'}{dy} & \frac{dC'}{dz} \\ \frac{dC''}{dx} & \frac{dC''}{dy} & \frac{dC''}{dz} \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation admet le facteur z qui correspond à la droite de l'infini ; en supprimant ce facteur, on a l'équation du cercle qui coupe orthogonalement les cercles donnés. Le point M′ admet le même lieu, et la droite MM′ passe constamment par le centre du cercle orthogonal.

19. *Deux théorèmes sur les coniques.* M. Nicolesco (Bucharest) nous adresse deux questions à proposer aux lecteurs de *Mathesis*. Quoi qu'elles soient déjà connues, nous croyons utile d'en reproduire les énoncés.

I. *Une droite d rencontre les côtés du triangle* ABC *aux points* A′, B′, C′; *les milieux* A″, B″, C″ *des droites* AA′, BB′, CC′ *se trouvent sur une seconde droite d′. Lorsque d tourne autour d'un point fixe* S *ou roule sur une conique* Σ *inscrite au triangle* ABC, *la droite d′ enveloppe une conique* Σ′ *inscrite au triangle complémentaire* $A_1B_1C_1$ *de* ABC *ou tourne autour d'un point fixe* S′.

M. de Longchamps a appelé la droite *d′* la *Newtonienne* de *d* par rapport à ABC (J. M. E., 1886, pp. 244-246), *d′* et *d* divisent ra

ment les côtés des triangles $A_1B_1C_1$, ABC dans des rapports réciproques; donc d' est la *complémentaire de la transversale réciproque* de d.

Lorsque d tourne autour de S, et marque sur BC, CA, AB des ponctuelles perspectives, les points A'', B'', C'' se correspondront dans trois ponctuelles projectives; par suite d enveloppe une conique Σ' tangente aux supports de ces ponctuelles; etc.

II. *On considère le faisceau des coniques qui touchent quatre droites données a, b, c, d. De deux points* M, N *donnés sur d, on mène à chacune de ces coniques deux nouvelles tangentes m, n, qui se coupent en* P. *Démontrer que le point* P *décrit une conique.*

Les triangles *abc*, *dmn* étant circonscrits à une même conique sont inscrits à une même conique. Celle ci a cinq points fixes, à savoir M, N et les sommets du triangle *abc*, ... (J. N.).

20. *Sur les nombres polygones.* La suite des nombres polygones : triangulaire, carré, pentagone, ..., m. gone, ..., $(m+p)$ gone, ... de même rang 2 est constituée par la série naturelle

$$3, 4, 5, \ldots, m, \ldots, (m+p), \ldots$$

et l'on sait que $(m+p)$ et m, divisés par p, donnent le même reste.

Il en est de même de deux nombres polygones de rang n.

Soit le polygone de $(m+p)$ côtés et de rang n

$$(\alpha) \qquad \frac{(m+p-2)n^2-(m+p-4)n}{2} = \mathcal{M}.p+r, \quad (r<p),$$

et le polygone de m côtés et de même rang n,

$$(\beta) \qquad \frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2} = \mathcal{M}'.p+r', \quad (r'<p).$$

Retranchons (β) de (α), il vient

$$p.\frac{n(n-1)}{2} = (\mathcal{M}-\mathcal{M}')p+(r-r').$$

Mais $r-r' < p$. Donc

$$r-r'=0 \quad \text{ou} \quad r=r'.$$

Remarque. $\mathcal{M}-\mathcal{M}' = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Corollaire. Deux polygones de même rang n, l'un de ρ côtés, l'autre

de $(\rho + \mu.p)$ côtés, divisés par p, donnent le même reste, et l'on pourra résoudre facilement la question suivante :

Trouver le reste r de la division par p d'un polygone de q côtés, quelque grand que soit q.

On divisera q par p, et l'on considérera le polygone de ρ côtés, ρ étant le reste de la division.

Si $\rho \leqslant 3$, pas de difficulté.

Si $\rho = 2$, on aura affaire à un bigone (le mot est d'Euler) ou au nombre naturel n.

Enfin si $\rho = 1$ ou $\rho = 0$, on s'adressera respectivement au polygone de $(p + 1)$ côtés ou au polygone de p côtés, et de même rang n.

APPLICATION. Soit, par exemple, à calculer le reste r de la division par 7 du 10e polygone de 101 côtés.

101 divisé par 7 donne pour reste 3.

Le 10e triangulaire est $55 = 7.7 + 6$; donc $r = 6$.

(G. DE ROCQUIGNY-ADANSON).

21. *Derniers chiffres des puissances.* Dans la livraison de juillet-août 1905 de *Mathesis* p. 176, je trouve un article intitulé *Questions d'arithmétique*, qui fait suite à une note publiée dans la livraison de décembre 1904.

Dans le petit périodique hollandais, *De Vriend der Wiskunde*, j'ai traité, dans les années 1904 et 1905, les sujets *Over de eindcijfers der vierkanten* et *Over de eindcijfers der derde machten*. Probablement ces deux articles ont échappé à votre attention (*). A propos des deux articles parus dans *Mathesis* je me permets de signaler mes deux notes, qui traitent partiellement le même sujet.

L'article sur les derniers chiffres des cubes renferme à la fin quelques vues et résultats qui me semblent nouveaux. (H. G. A. VERKAART).

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE MILITAIRE.

I.

(Voir *Mathesis*, (3) V, p. 84-88 et 180-186.)

On marque sur une circonférence (O) *de rayon* R *un point* A *et dans le plan de cette circonférence un point* P. *Inscrire dans la circonférence un*

(*) Le journal *De Vriend der Wiskunde* nous est inconnu. D'ailleurs possible de rester au courant de tout ce qui se publie? RÉDACT

triangle ABC *tel que le côté* BC *passe par le point* P *et que le produit des côtés* AB *et* AC *soit égal à un carré donné* k^2.

La circonférence (O) *et le point* A *étant fixés, on fait varier* k *de* 0 *à l'infini et l'on demande quelles sont, pour chaque valeur de* k, *les positions que le point* P *doit occuper, pour que le problème comporte soit deux solutions, soit une solution ou qu'il n'y en ait aucune.*

Solution par MM. H. Brocard et E. Weber. Laissant de côté le point P, étudions d'abord la question plus simple que voici :

On donne une circonférence (O) *et un point* A *de cette courbe, par lequel on mène deux cordes* AB, AC *dont le produit est constant. Quelle est l'enveloppe de la corde* BC?

D'après un théorème connu, si h est la hauteur du triangle ABC issue de A, on a $AB.AC = 2Rh$; par conséquent, $h = k^2 : 2R$. Il résulte de là que l'enveloppe de la corde BC est la circonférence (A, h).

Il reste à mener du point P des tangentes au cercle (A, h).

Discussion. 1° Soit A′ le symétrique de A par rapport au centre O du cercle donné. Si $h > AA'$, ce qui revient à $k > 2R$, le cercle (A, h) est entièrement extérieur au cercle (O) et aucune de ses tangentes ne coupe la circonférence donnée; le problème n'a pas de solution.

2° Si $k = 2R$ et si le point A est situé sur la tangente menée en A′ au cercle O, le problème admet une seule solution; les points B et C coïncident alors avec A′. Dans l'hypothèse du point A non situé sur la tangente en A′, le problème est impossible.

3° Supposons $k < 2R$. Les cercles (O, R), (A, h) se coupent en deux points réels N et N′; ils admettent deux tangentes communes extérieures dont les points de contact seront désignés par M_0, M'_0, M_A, M'_A et le point d'intersection par L.

Considérons d'abord le cas où les deux cercles sont égaux; le point L est alors à l'infini. Si le point P se trouve à l'intérieur du cercle (A, R), il n'y a pas de solution; s'il tombe dans l'espace compris entre les parallèles M_AM_0, $M'_AM'_0$ et l'arc $M_AOM'_A$, le problème admet deux solutions; s'il tombe en dehors des tangentes communes, on peut encore mener de P deux tangentes au cercle (A, R), mais une seule d'elles rencontre la circonférence (O, R); enfin, si P est dans la région non encore considérée, les tangentes menées de ce point à la circonférence (A, R) sont réelles, mais ne rencontrent pas la circonférence (O, R).

Soit maintenant $h < R$ et appelons LT, LT′ les prolongements de

M_AM_0, $M'_AM'_0$ au delà du point L. Il n'y a pas de solution si P se trouve dans la région limitée par les segments de droites LM_A, LM'_A et par l'arc de cercle $M_ANN'M'_A$; le problème admet une seule solution dans les angles M_0LT', M'_0LT ou sur l'arc $M_ANN'M'_A$; dans le reste du plan, il y a deux solutions.

La discussion du cas de $h > R$ ($t < 2R$) est analogue à la précédente.

II.

(*Mathesis*, (3) V. p. 87).

Si m est un nombre réel donné, déterminer les nombres a, b, c de manière que le polynome

$$x^2(a^3+b^3+a+b+c)-2x(a^3+b^3-a-b)+a^3+b^3+a+b-c$$

soit carré parfait et prenne pour $x=-1$ ***la valeur*** 2 ***et pour*** $x=+1$ ***la valeur m. Pour quelles valeurs de m les nombres a, b, c sont ils réels?***

Solution par M. H. Brocard. Le trinome proposé F deviendra un carré, sous les conditions.

$$a^3+b^3+a+b+c=A^2, \tag{1}$$
$$a^3+b^3+a+b-c=B^2, \tag{2}$$
$$a^3+b^3-a-b=AB, \tag{3}$$

et il sera le carré de $(Ax-B)$.

Pour $x=-1$, $F=(A+B)^2$.

Pour $x=+1$, $F=(A-B)^2$.

On aura donc

$$(A+B)^2=2, \tag{4}$$
$$(A-B)^2=m. \tag{5}$$

Des équations (4) et (5) on tirera A et B, et des équations (1), (2), (3), les valeurs de a, b, c. On a d'abord

$$c=\frac{A^2-B^2}{2}=\frac{m\sqrt{2}}{2}.$$

Puis on obtiendra

$$a^3+b^3+a+b=\frac{A^2+B^2}{2},$$
$$a^3+b^3-a-b=AB,$$

d'où

$$a^3+b^3=\left(\frac{A+B}{2}\right)^2=\frac{1}{2},$$

$$a+b=\left(\frac{A-B}{2}\right)^2=\frac{m}{4}.$$

On aura ab par la formule

$$ab=\frac{(a+b)^3-(a^3+b^3)}{3(a+b)}=\frac{m^3-32}{48m},$$

et, par suite, a et b seront les racines de l'équation du second degré

$$z^2-\frac{mz}{4}+\frac{m^3-32}{48m}=0,$$

d'où

$$(a,b)=\frac{m}{8}\pm\frac{1}{8}\sqrt{\frac{128-m^3}{3m}}.$$

La condition de réalité des valeurs de a, b, c est donc

$$0<m<4\sqrt[3]{2}.$$

Le *Journal de Vuibert* a publié de la même question la solution suivante :

Les trois conditions imposées au polynome proposé s'expriment par les égalités

$$\begin{aligned}(a^3+b^3-a-b)^2&=(a^3+b^3+a+b+c)(a^3+b^3+a+b-c)\\&=(a^3+b^3+a+b)^2-c^2,\end{aligned}$$

$$4(a^3+b^3)=2,\qquad 4(a+b)=m, \tag{1}$$

dont la première donne

$$c^2=4(a+b)(a^3+b^3),$$

ou en ayant égard aux deux autres,

$$c=\frac{m}{\sqrt{2}}.$$

Si l'on observe ensuite que

$$a^5+b^5=(a+b)^5-3ab(a+b),$$

on déduit des relations (1)

$$a+b=\frac{m}{4},\quad ab=\frac{(a+b)^5-(a^5+b^5)}{3(a+b)}=\frac{m^3-32}{48m},$$

et la solution s'achève comme ci-dessus.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1480.

(Voir *Mathesis*, (3), IV, p. 176).

On donne deux coniques C′, C″ *dont les axes de symétrie sont dirigés suivant les mêmes droites* Ox, Oy. *Soient* M′ *un point de* C′ *et* M″ *un point de* C″, *tels que les tangentes en ces points aux courbes correspondantes soient parallèles. Trouver l'enveloppe de la droite* M′M″. *Cas particulier ou les coniques* C′, C″ *sont homofocales.* (Abramescu).

Solution par M. H. Brocard. Je rencontre dans ce problème une nouvelle application de la méthode que j'ai proposée à maintes reprises pour l'étude ou la détermination d'une enveloppe de droites du plan, et qui consiste à définir l'enveloppe comme antipodaire relative à l'origine. Cette méthode présente en effet les avantages suivants : elle permet parfois de réduire l'équation de la droite mobile à une forme typique, non entièrement développée ; et elle a surtout le mérite de faire aboutir les calculs, là où l'élimination entre les équations normales ne pourrait être essayée ou introduirait des facteurs étrangers.

Les axes de coordonnées étant Ox et Oy, les coordonnées des deux points M′, M″ sont

$$M' \cdots a\cos\varphi,\quad b\sin\varphi;\quad M'' \cdots A\cos u,\quad B\sin u.$$

En ces points les tangentes sont parallèles, donc

$$\frac{b}{a}\cot\varphi = \frac{B}{A}\cot u,\quad \text{ou}\quad \operatorname{tg} u = \lambda \operatorname{tg}\varphi.$$

La droite M′M″ a une équation de la forme

$$y - b\sin\varphi = f(u,\varphi)(x - a\cos\varphi)$$

et la perpendiculaire abaissée de l'origine a pour équation

$$y = -\frac{1}{f(u,\varphi)}x.$$

En multipliant ces équations l'une par l'autre, on obtient une relation qui est vérifiée par les coordonnées d'un point de la podaire de l'enveloppe :

$$x^2 + y^2 = ax\cos\varphi + by\sin\varphi.$$

Cette égalité se ramène à

$$[(x^2+y^2)^2 - b^2y^2]\operatorname{tg}^2\varphi - 2abxy\operatorname{tg}\varphi + (x^2+y^2)^2 - a^2x^2 = 0. \quad (1)$$

On a évidemment, par analogie,

$$[(x^2+y^2)^2 - B^2y^2]\operatorname{tg}^2 u - 2ABxy \operatorname{tg} u + (x^2+y^2)^2 - A^2x^2 = 0. \quad (2)$$

L'équation de la podaire de l'enveloppe par rapport un point O s'obtient en éliminant tg φ et tg u entre les équations (1), (2) et tg $u = \lambda$ tg φ. Si l'on remplace dans (2) tg u par λ tg φ et qu'on t pour tg φ, la question revient à éliminer t entre deux équations du second degré :

$$Mt^2 + Nt + P = 0, \quad M't^2 + N't + P' = 0.$$

Le résultat sera

$$(MP' - M'P)^2 = (MN' - M'N)(NP' - N'P.$$

L'hypothèse de deux coniques homofocales n'apporte aucune simplification aux calculs. Même observation pour le cas où une des coniques serait un cercle.

Solution par M. Abramescu. Les équations des deux ellipses étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

et les coordonnées des points M', M'' étant désignées par (x', y'), (x'', y''), on a les équations de condition

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x''^2}{A^2} + \frac{y''^2}{B^2} = 1; \quad (1)$$

$$ux' + vy' + 1 = 0, \quad ux'' + vy'' + 1 = 0; \quad (2)$$

$$\frac{b^2x'}{a^2y'} = \frac{B^2x''}{A^2y''} = \lambda; \quad (3)$$

u et v sont les coordonnées de la droite M'M'', λ désigne une inconnue auxiliaire.

De (3) et (3), on déduit

$$x' = -\frac{a^2\lambda}{a^2\lambda u + b^2 v}, \quad y' = -\frac{b^2}{a^2\lambda u + b^2 v},$$

$$x'' = -\frac{A^2\lambda}{A^2\lambda u + B^2 v}, \quad y' = -\frac{B^2}{A^2\lambda u + B^2 v}.$$

Substituons ces valeurs dans les équations (1) ; il vient

$$a^2\lambda^2 - b^2 = (a^2\lambda u - b^2 v)^2,$$

$$A^2\lambda^2 - B^2 = (A^2\lambda u - B^2 v)^2,$$

ou

$$(1 - a^2u^2)\lambda^2 - 2a^2uv\lambda - b^2(1 - b^2v^2) = 0,$$

$$A^2(1 - A^2u^2)\lambda^2 - 2A^2B^2uv\lambda + B^2(1 - B^2v^2) = 0.$$

Il reste à éliminer λ entre ces deux équations. Le résultat est du huitième degré en u et v.

Les deux solutions qui précèdent, pourraient être plus *achevées*.

Pour trouver la classe de l'enveloppe, on peut raisonner comme il suit : P étant un point quelconque du plan des courbes C' et C'', cherchons la nature de la correspondance entre les faisceaux de sommet P et dont PM' et PM'' sont des éléments homologues. Un rayon du premier faisceau coupe C'' en deux points M' et M'_1 ; il existe deux tangentes à C'' qui sont parallèles à la tangente à C' en M', et deux tangentes à C'' qui sont parallèles à la tangente à C' en M'_1; donc à un rayon du premier faisceau correspondent quatre rayons du second. De même, à tout rayon du second faisceau correspondent quatre rayons du premier. La correspondance entre les deux faisceaux étant du genre (4, 4), présente 8 coïncidences; autrement dit, il passe huit droites M'M'' par un point quelconque P. L'enveloppe de ces droites est donc de la huitième classe.

Il resterait à étudier les hypothèses particulières qui diminuent cette classe. Par exemple, si C' et C'' sont des coniques concentriques et homothétiques, la droite M'M'' passe par le centre commun. (J. N.).

Question 1483.

(Voir *Mathesis*, (3), IV, p. 215).

Étant donné, sur une sphère, un angle droit AOB *formé par deux arcs de grand cercle, on mène par le point fixe* A *un arc de grand cercle qui coupe* OB *en* C, *et l'on prend sur cet arc les segments* CM = CN = CO. *Le lieu des points* M, N *peut être appelé strophoïde sphérique. Trouver l'équation de cette courbe, la tangente en un point quelconque et indiquer la forme de la courbe.*

Solution par M. Rose (Nivelles). Nous prenons pour axes coordonnés les tangentes Ox, Oy aux arcs OA, OB et le rayon Oω. Soient (x, y, z), $(a, 0, c)$, $(0, \beta, \gamma)$ les coordonnées des points M, A, C. Ces points étant sur la sphère, on a

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0, \tag{1}$$

$$\beta^2 + \gamma^2 - 2R\gamma = 0, \tag{2}$$

$$a^2 + c^2 - 2Rc = 0. \tag{3}$$

L'égalité CO = CM donne

$$\beta^2 + \gamma^2 = x^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2,$$

ou simplement

$$\beta y + z(\gamma - R) = 0. \tag{4}$$

Le point M appartient au plan CAω. Celui-ci a une équation de la forme

$$Ax + By + (z - R) = 0,$$

avec les conditions

$$Aa + (c - R) = 0, \qquad B\beta + (\gamma - R) = 0,$$

ou définitivement

$$\frac{c - R}{a} x + \frac{\gamma - R}{\beta} y - (c - R) = 0. \tag{5}$$

Entre les équations (4) et (5) on peut éliminer le rapport variable $\frac{\gamma - R}{\beta}$; on trouve

$$y^2 + z^2 - Rz - \frac{c - R}{a} xz = 0. \tag{6}$$

La strophoïde est représentée par l'ensemble des équations (1) et (6). La tangente a pour équations

$$Xx + yY + zZ - R(Z + z) = 0.$$

$$yY + zZ - R\left(\frac{Z + z}{2}\right) - \frac{c - R}{2a}(xZ + Xz) = 0,$$

où X, Y, Z sont les coordonnées courantes.

La courbe passe par les points O, A et par le point diamétralement opposé à A; O est un point double.

Note. Les égalités (2) et (3) ne sont pas intervenues dans le calcul, ce qui s'explique aisément : la condition CO = CM revient à exprimer l'égalité des angles CωO, CωM.

La méthode de la décomposition en carrés conduit à écrire l'équation (6) ainsi :

$$y^2 + \left[z - \frac{c - R}{2a} x - \frac{R}{2}\right]^2 - \frac{1}{4}\left[\frac{c - R}{a} x + R\right]^2 = 0$$

Cette forme montre que la strophoïde sphérique est située sur un cône du second ordre dont le sommet a pour coordonnées $\frac{aR}{(R - c)}$, 0, 0; ce point est à la rencontre de Ox avec le rayon ωA.

Si l'on soustrait (6) de (1), on trouve

$$x^2 - \frac{R - c}{a} xz - Rz = 0;$$

donc la strophoïde se projette sur le plan des xz suivant une hyperbole.

En soustrayant de (1) le double de (6) on obtient

$$x^2 - y^2 - z^2 + \frac{c - R}{a} xz = 0;$$

équation d'un cône ayant son sommet en O.

Il serait intéressant de chercher l'équation de la strophoïde en employant des coordonnées sphériques et de construire l'arc de grand cercle tangent à la courbe en un point donné. (J. Neuberg).

Question 1493.

(Voir *Mathesis*, (3), IV; p. 264).

D *étant un point quelconque d'une conique* Σ *circonscrite au triangle* ABC, *on mène les droites* AD, BD, CD *qui coupent respectivement* BC, CA, AB *aux points* A_1, B_1, C_1. *Démontrer que les côtés du triangle* $A_1B_1C_1$ *et l'axe d'homologie des triangles* ABC, $A_1B_1C_1$ *passent par des points fixes, et que les droites joignant* A, B, C *respectivement aux milieux* A_2, B_2, C_2 *des droites* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 *concourent en un point* P, *qui parcourt une droite.*

Énoncer la proposition corrélative de la première partie et examiner dans la nouvelle figure le lieu du point analogue à P. (Steiner).

Solution analytique par MM. Abramescu et Bastin. Rapportée au triangle ABC, la conique Σ a pour équation en coordonnées barycentriques

$$Pyz + Qzx + Rxy = 0. \qquad (1)$$

Soient α, β, γ les coordonnées de D; alors

$$P\beta\gamma + Q\gamma\alpha + R\alpha\beta = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{P}{\alpha} + \frac{Q}{\beta} + \frac{R}{\gamma} = 0. \qquad (2)$$

Les coordonnées des points A_1, B_1, C_1 sont $(0, \beta, \gamma)$, $(\alpha, 0, \beta)$, $(\alpha, \beta, 0)$. On en conclut les équations des droites B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 :

$$-\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0, \quad \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0, \quad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = 0.$$

En les comparant à l'égalité (2) on voit que ces droites passent respectivement par les points $(-P, Q, R)$, $(P, -Q, R)$, $(P, Q, -R)$, qui sont les pôles de BC, CA, AB par rapport à Σ.

L'axe d'homologie des triangles ABC, $A_1B_1C_1$ a pour équation

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=0;$$

il passe constamment par le point (P, Q, R), centre d'homologie du triangle ABC et du triangle des tangentes menées à Σ en A, B, C.

Les coordonnées barycentriques absolues doivent vérifier la relation $x+y+z=1$; par suite, celles de B_1 et C_1 sont

$$\frac{\alpha}{\alpha+\gamma},\quad 0,\quad \frac{\gamma}{\alpha+\gamma};\qquad \frac{\alpha}{\alpha+\beta},\quad \frac{\beta}{\alpha+\beta},\quad 0,$$

d'où celles de A_2

$$\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\alpha+\gamma}+\frac{1}{\alpha+\beta}\right),\quad \frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha+\beta},\quad \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}$$

et l'équation de la droite AA_2

$$\frac{y}{\beta(\alpha+\gamma)}=\frac{z}{\gamma(\alpha+\beta)}.$$

On voit facilement que les droites AA_2, BB_2, CC_2 se coupent en un point P ayant pour coordonnées

$$x=\alpha(\beta+\gamma),\quad y=\beta(\gamma+\alpha),\quad z=\gamma(\alpha+\beta). \qquad (3)$$

De (3) on conclut

$$2\alpha\beta=x+y-z,\quad 2\beta\gamma=-x+y+z,\quad 2\gamma\alpha=x-y+z.$$

Les valeurs de $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ étant substituées dans la première des équations (2), nous aurons pour le lieu de P la droite

$$P(-x+y+z)+Q(x-y+z)+R(x-y+z)=0.$$

La première partie de la question se transforme comme il suit par dualité :

Une conique Σ étant inscrite à un triangle ABC, *on mène une tangente quelconque d, qui rencontre les côtés en* A_1, B_1, C_1. *Les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *forment un triangle* A'B'C' *homologique avec* ABC. *Le centre d'homologie et les sommets* A', B', C' *décrivent des droites.*

M. Abramescu cherche par le calcul le lieu du point de concours Q des droites joignant A', B', C' aux milieux des côtés BC, CA, AB; ce lieu est une conique inscrite à ABC. Telle est l'interprétation qu'il donne de la finale de la question 1493. Comme Q est le centre d'une conique touchant les côtés du triangle A'B'C' en A, B, C, cette interprétation est probablement conforme à la pensée de Steiner; voir la solution ci-après.

Solution géométrique par M. BASTIN. $A_1B_1C_1$ est le triangle diagonal du quadrangle inscrit ABCD; il est donc autopolaire par rapport à Σ. Soit XYZ le triangle formé par les tangentes en A, B, C à Σ. A_1 étant sur BC, sa polaire B_1C_1 doit passer par le pôle X de BC; de même C_1A_1 et A_1B_1 passent respectivement par Y et Z.

Soient X′, Y′, Z′ les intersections des côtés homologues des triangles perspectifs ABC, $A_1B_1C_1$, ces points sont sur une même droite *m*. Lorsque les côtés de $A_1B_1C_1$ pivotent autour de X, Y, Z, les points X′, Y′, Z′ engendrent trois ponctuelles perspectives avec deux des ponctuelles $[A_1]$, $[B_1]$, $[C_1]$ et, par suite, projectives entre elles. Les ponctuelles [X′], [Y′], [Z′] sont même perspectives; car pour $D \equiv A$, A est un élément uni des ponctuelles [Y′], [Z′] et comme la droite Y′Z′ devient alors AA′, on conclut que la droite *m* passe constamment par le centre d'homologie des triangles ABC, XYZ.

Il existe une conique S touchant les côtés du triangle ABC en A_1, B_1, C_1; les diamètres AA_2, BB_2, CC_2 de S concourent au centre P. Les côtés homologues des triangles ABC, XYZ se coupant aux points X″, Y″, Z″, la droite X″Y″Z″ est tangente à S; car la conique inscrite au quadrilatère ABX″Y″ et touchant BC en A_1 doit toucher AC au point B_1 qui est sur la droite A_1Z passant par le point de concours Z des diagonales, de sorte qu'elle se confond avec S. Il résulte de là que D parcourant Σ, le point P décrit la droite unissant les milieux des diagonales du quadrilatère ABX″Y″.

Le point de contact de X″Y″ avec S se trouve sur la droite C_1Z.

M. Rose a donné une solution synthétique analogue à la précédente.

L'article de M. Servais (*Mathesis*, p. 115) renferme également une démonstration de la question.

×Question 1516.

(Voir *Mathesis*, (3); V, p. 111).

1° *Dans un triangle sphérique, que l'angle* A *soit droit ou que les angles* B *et* C *soient complémentaires, on a la relation*

$$\operatorname{tg} E = \operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

En déduire que la surface d'un triangle plan rectangle est donnée la formule $S = \frac{1}{2}bc$.

3° *Selon que dans un triangle sphérique, l'angle* A *est droit ou les angles* B *et* C *sont complémentaires, la médiane* m_a *est donnée par l'une des relations :*

$$\cos m_a = \cos\frac{a}{2}\cos 2E, \quad \text{ou} \quad \cos m_a = \frac{\cos\frac{a}{2}}{\cos 2E}.$$

(E. Barbette).

Solution par M. J. Rose. 1° La formule

$$\operatorname{cotg} E = \frac{\operatorname{cotg}\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\frac{c}{2} + \cos A}{\sin A},$$

pour $A = 90^\circ$, donne immédiatement

$$\operatorname{tg} E = \operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

Si B et C sont complémentaires, on a

$$A = 2E + 1dr,$$

et, par suite,

$$\operatorname{cotg} E = \frac{\operatorname{cotg}\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\frac{c}{2} + \cos(2E + 1dr)}{\sin(2E + 1dr)} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\frac{c}{2} - \sin 2E}{\cos 2E};$$

d'où

$$\operatorname{cotg} E \cos 2E + \sin 2E = \frac{\cos E}{\sin E} = \operatorname{cotg}\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\frac{c}{2}$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{tg} E = \operatorname{tg}\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

Soit R le rayon de la sphère; lorque R croît indéfiniment, le triangle sphérique tend vers un triangle plan rectangle.

On peut écrire la formule précédente sous la forme suivante :

$$\frac{\frac{ABC}{2}}{\operatorname{tg}\frac{ABC}{2R^2}} = \left(R\operatorname{tg}\frac{b}{2}\right)\cdot\left(R\operatorname{tg}\frac{c}{2}\right),$$

ou en passant à la limite

$$\frac{ABC}{2}\cdot 1 = \frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2} \quad \text{ou} \quad ABC = \tfrac{1}{2}bc.$$

2° Des analogies de Delambre :

$$\frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}},\qquad \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}},$$

on déduit, par multiplication,

$$\frac{\sin(B+C)}{\sin A}=\frac{\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{b+c}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}}.$$

Mais

$$\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{b+c}{2}=\cos m_a\cos\frac{a}{2};$$

donc cette formule peut s'écrire

$$\frac{\sin(B+C)}{\sin A}=\frac{\cos m_a}{\cos\frac{1}{2}a}.$$

Si $A=1dr$, on a

$$B+C=2E+1dr$$

et la formule devient

$$\sin(2E+1dr)=\cos 2E=\frac{\cos m_a}{\cos\frac{1}{2}a}\quad\text{ou}\quad\cos m_a=\cos\frac{1}{2}a\cos 2E.$$

Si $B+C=1d$, on a

$$A=2E+1d,$$

et il vient

$$\frac{1}{\sin(2E+1dr)}=\frac{\cos m_a}{\cos\frac{1}{2}a}\quad\text{ou}\quad\cos m_a=\frac{\cos a}{\cos 2E}.$$

La seconde partie de la question a été résolue de la même manière par MM. Abramescu, Dupont et Plakhovo.

Pour établir la première partie, MM. Abramescu et Plakhovo font le produit des valeurs

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin E\sin(B-E)}{\sin(A-E)\sin(C-E)}},\qquad \operatorname{tg}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin E\sin(C-E)}{\sin(A-E)\sin(B-E)}}.$$

M. Dupont part de l'analogie de Néper

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B+C)=\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}.$$

Il signale aussi les formules

$$\operatorname{tg}E=-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c,\qquad \cos 2E=\frac{\cos\frac{1}{2}a}{\cos m_a},$$

pour le cas où $B+C=3dr$.

Question 1526.

(Voir *Mathesis*, (3), V, p. 168).

On considère une arcade ABC *de cycloïde et un point* M *situé dans l'espace compris entre la courbe et les tangentes menées en* A *et* C *du côté opposé à la courbe. Trouver l'aire engendrée par la perpendiculaire abaissée de* M *sur une droite roulant sur l'arcade* ABC.

(E. N. Barisien).

Solution par M. E. Cesàro. Soit R le rayon du cercle générateur, φ l'inclinaison de la tangente sur l'axe des x. Si l'on prend comme axes la tangente et la normale au sommet (milieu de l'arcade complète), les coordonnées d'un point quelconque de la courbe sont

$$x=2R(\varphi+\sin\varphi\cos\varphi),\qquad y=2R\sin^2\varphi.$$

Il en résulte que la distance du point (a, b) à la tangente est $-a\sin\varphi+b\cos\varphi+2R\varphi\sin\varphi$. L'aire cherchée est donc

$$A=\tfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-a\sin\varphi+b\cos\varphi+2R\varphi\sin\varphi)^2\,d\varphi.$$

Il suffit de changer φ en $-\varphi$ dans la moitié gauche de l'intervalle d'intégration pour trouver

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[a^2\sin^2\varphi+(b\cos\varphi+2R\varphi\sin\varphi)^2]\,d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{4}(a^2+b^2)+4bR\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi+4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi^2\sin^2\varphi\,d\varphi.$$

On a d'ailleurs

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{8}.$$

La même intégrale devient, lorsqu'on la calcule par parties,

$$-\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\,\varphi^2 d\varphi=\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin^2\varphi-1)\,\varphi^2 d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi^2\sin^2\varphi d\varphi-\frac{\pi^3}{48}.$$

Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi^2\sin^2\varphi d\varphi=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi^3}{48}.$$

Enfin

$$A=\frac{\pi}{4}(a^2+b^2+2bR+2R^2)+\frac{\pi^3R^2}{12}.$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

(Voir *Mathesis*, (3) V, p. 199).

Démontrer que l'égalité $\sin B=\frac{1}{3}\sin(2A+B)$ *entraine la suivante :* $\operatorname{tg}(A+B)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}A$.

Solution par M. Abramescu. De la première égalité on déduit successivement

$$\sin B-\sin(2A+B)=-\tfrac{1}{3}\sin(2A+B),$$
$$2\cos(A+B)\sin A=\tfrac{1}{3}\sin(2A+B),$$
$$\cos(A+B)\sin A=\tfrac{1}{3}[\sin(A+B)\cos A+\cos(A+B)\sin A];$$
$$3\cos(A+B)\sin A=2\sin(A+B)\cos A,$$
$$\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}A=\operatorname{tg}(A+B).$$

Généralisation par M. Delahaye (Roye). L'égalité

$$\sin B=\frac{m}{n}\sin(2A+B) \qquad (1)$$

entraine la suivante

$$\operatorname{tg}(A+B)=\frac{n+m}{n-m}\operatorname{tg}A.$$

En effet, de (1) on déduit

$$\frac{\sin(2A+B)+\sin B}{\sin(2A+B)-\sin B}=\frac{n+m}{n-m};$$

d'après une formule connue

$$\frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-q)},\quad \text{etc.}$$

Autrement. L'égalité donnée peut s'écrire

$$\sin[(A+B)-A]=\tfrac{1}{5}\sin[(A+B)+A],$$

ou, successivement,

$$\sin(A+B)\cos A-\sin A\cos(A+B)=\tfrac{1}{5}\sin(A+B)\cos A+\tfrac{1}{5}\sin A\cos(A+B)$$

$$\tfrac{4}{5}\sin(A+B)\cos A=\tfrac{6}{5}\sin A\cos(A+B)$$

d'où aisément

$$\tan(A+B)=\tfrac{5}{2}\tan A.$$

Autres solutions par MM. Godeaux, Ch. Brignon (Epinal) et Plakhovo.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1236. Trouver l'aire de la courbe

$$[\lambda(x-2)+3y]^2+4(x+1)(x-2)=0.$$

(Barisien).

On a

$$y=-\frac{\lambda}{3}(x-2)\pm\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)(2-x)}.$$

La courbe est une ellipse comprise entre les droites $x=-1$, $x=2$; l'ordonnée à partir du diamètre

$$y=-\frac{\lambda}{3}(x-2) \quad \text{est} \quad \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)(2-x)}.$$

On voit facilement que

$$U=\frac{4}{3}\int_{-1}^{2}\sqrt{(x+1)(2-x)}\,dx.$$

Considérons le cercle qui a pour équation

$$y=\sqrt{(x+1)(2-x)} \quad \text{ou} \quad y^2+x^2-x-2=0;$$

comme il a pour rayon $\frac{3}{2}$ et que U vaut les $\frac{4}{3}$ de la moitié du cercle, on a $U=\frac{3\pi}{2}$.

1237. Soit un déterminant R de n^2 éléments, chaque élément étant fixé au tableau, mais pouvant toujours tourner librement sur lui-même, comme une rosette dans sa boutonnière.

On fait tourner le tableau dans son plan de 90°, ou de 180° ou de 270°, à droite par exemple. On renouvelle la même opération devant une glace. Démontrer que, dans les différents cas, le déterminant obtenu est toujours égal à $+R$ ou à $-R$. (G. de Rocquigny).

1238. Étant donné un angle xOy, on prend un point A sur Ox, un point B sur Oy tels, que $OA + OB = 2l$. 1° Lieu du centre ω du cercle circonscrit au triangle OAB. Montrer que ce cercle passe par un point fixe.

2° Lieu du centre de gravité G et lieu de l'orthocentre H du même triangle OAB.

On complète le parallélogramme OAMB. Lieux du centre de gravité G', du centre ω' du cercle circonscrit et de l'orthocentre H' du triangle AMB.

4° Enveloppe de la droite AB. (*Journal de Vuibert*, 1904, p. 128.)

1° Prenons sur Ox la longueur $OA' = l$, sur Oy la longueur $OB' = l$; les perpendiculaires en A' sur Ox, en B' sur Oy se coupent en un point P de la bissectrice de l'angle xOy. — Comme $PA' = PB'$, $AA' = BB'$, les triangles PA'A, PB'B sont égaux, et l'angle $PAA' = PBB'$. La circonférence OAB passe donc par P, et ω est sur la perpendiculaire élevée au milieu de OP. 2° Soit A'' le symétrique de A par rapport à A'; alors $OA'' = OB$, et A'B' parallèle à A''B passe au milieu D de AB. Le lieu de D est donc A'B' et le lieu de G sera une parallèle à AB. A cause de $\omega G : \omega H = 1 : 3$, H décrit une parallèle aux lieux géométriques de G et H. 3° Les points G', ω', H' décrivent les symétriques des droites parcourues par G, ω, H par rapport à A'B', lieu du point D, car D est le milieu des droites GG', $\omega\omega'$, HH'. 4° L'angle APB étant le supplément de xOy, AB enveloppe une parabole de foyer P et tangente à Ox, Oy.

1239. Le cercle inscrit I à un triangle ABC touche les côtés AC, AB en E et F, et le cercle exinscrit I' les touche en E', F'. La médiane AA' rencontre les cordes EF, E'F' en L, L'. Démontrer que la figure BLCL' est un parallélogramme. (Nesbitt).

Il suffit de démontrer que $AL = AL'$. De $BF = CE'$, $BF' = CE$ on déduit que A' est équidistant des parallèles EF, E'F'.

1240. Trouver un plan sur lequel un quadrilatère gauche donné ABCD se projette orthogonalement suivant un parallélogramme.

Les plans qui projettent AB et CD doivent être parallèles entre eux; il en est de même des plans qui projettent BC et DA. Le plan cherché est donc perpendiculaire à l'intersection de deux plans dont l'un parallèle à AB et CD, l'autre à AD et BC.

Autrement. Les projections des diagonales AC, BD doivent se diviser mutuellement en deux parties égales; donc les milieux de ces diagonales doivent être sur une même projetante, et le plan de projection est perpendiculaire à la droite joignant ces milieux.

1241. ABCDE étant un pentagone régulier, le quadrangle complet

ABCD jouit de la propriété que trois côtés AB, BC, CA sont égaux entre eux ainsi que les trois autres AD, AC, BD.

Réciproquement, si un quadrangle jouit de cette propriété, ses quatre sommets appartiennent à un pentagone régulier.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1536.** On donne dans un même plan deux parallèles m, n et un point A. Décrire une circonférence passant par A, ayant son centre O sur la perpendiculaire abaissée de A sur m et n, et qui coupe m en un point M, n en un point N tels, que l'angle MON soit égal à un angle donné α.

1537. Les hyperboles équilatères qui sont tangentes à une circonférence donnée et qui passent par deux points fixes de cette courbe sont tangentes à une seconde circonférence fixe. (É. N. Barisien).

1538. 1° On a approximativement

$$\sin x = \frac{8}{3}x - \frac{x}{3}\sqrt{25+5x^2},$$

l'erreur étant de la forme αx^7. Trouver, en valeur absolue, une limite supérieure de α quand x varie de 0 à $\frac{1}{3}\pi$.

2° On a approximativement, quand x^2 est inférieur à 5,

$$sh x = \frac{8}{3}x - \frac{x}{3}\sqrt{25-5x^2}$$

l'erreur commise étant de la forme βx^7. Trouver, en valeur absolue, une limite supérieure de β, quand x varie de 0 à 1.

1539. Si $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ homogènes et de même degré d'homogénéité m, rendent l'expression

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

différentielle totale exacte, l'on a

$$x^2\frac{dP}{dx} - y^2\frac{dQ}{dy} = m(xP - yQ),$$

et réciproquement. (S. Chassiotis).

×**1540.** Mener à trois sphères données A, B, C trois plans tangents qui soient parallèles entre eux et dont les distances à un point donné D soient proportionnelles à trois longueurs données a, b, c.

(J. Neuberg).

THÉORIE DE L'ÉQUATION DE PELL,

par M. A. Aubry.

1. L'entier y variant de 0 à n, et ω désignant un nombre irrationnel, appelons x l'entier immédiatement supérieur à $y\omega$, on aura $0 < x - y\omega < 1$. La valeur de $x - y\omega$ est comprise entre deux des fractions $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots \frac{n}{n}$. Comme il n'y a que n intervalles, et que y, et, par suite, $x - y\omega$, peuvent prendre $n+1$ valeurs, il y a au moins un intervalle comprenant deux valeurs de $x - y\omega$, et on peut écrire :

$$0 < (x' - y'\omega) - (x'' - y''\omega) < \frac{1}{n} \text{ ou } 0 < (x' - x'') - (y' - y'')\omega < \frac{1}{n};$$

$y' - y''$ est une des valeurs de y; donc, en écrivant $x' - x'' = x$, il vient

$$(\alpha) \qquad 0 < x - y\omega < \frac{1}{n} < \frac{1}{y}.$$

Prenons n' assez grand pour que la plus petite valeur de $x - y\omega$ soit $> \frac{1}{n'}$; on obtiendra de la même manière que tout à l'heure, un autre couple ξ, η, qui donnera une nouvelle solution de (α), et ainsi de suite.

On peut donc trouver une infinité de couples de valeurs de x et y, satisfaisant à la relation $x - y\omega < \frac{1}{y}$ (Lejeune-Dirichlet).

Corollaires I. Posons $\omega = \sqrt{k}$: on peut trouver une infinité de solutions de l'inégalité

$$(\beta) \qquad 0 < x - y\sqrt{k} < \frac{1}{y},$$

ce qui permet d'écrire

$$0 < x + y\sqrt{k} < \frac{1}{y} + 2y\sqrt{k},$$

et, en multipliant,

$$0 < x^2 - y^2 k < \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{k} < 1 + 2\sqrt{k}.$$

Ainsi, θ *désignant un certain entier compris entre* 0 *et* $1 + 2\sqrt{k}$, *l'équation* $x^2 - ky^2 = \theta$ a une infinité de racines (id.)

II. Soient $\omega = \frac{a}{b}$ et x et y tels qu'on ait :

$$0 < x - y\frac{a}{b} < \frac{1}{n}, \quad \text{d'où} \quad bx - ay < \frac{b}{n}.$$

Soit n l'entier immédiatement supérieur à $\sqrt{b}$. Comme $y < n$, on peut écrire $y^2 < b < n^2$ et de là

$$(bx - ay)^2 < \frac{b^2}{n^2} < b,$$

$$(\gamma) \qquad (bx - ay)^2 + ky^2 < b + ky^2 < (k+1)\,b.$$

Si donc $a^2 + k = \mathbf{b}$, le premier membre de (γ) est également **b**, et il est positif, à cause de sa forme : sa valeur est donc l'un des nombres $b, 2b, 3b, \ldots, kb$. Nous désignons par **b**, un multiple de b.

Soit $k = 1$; on aura $(bx - ay)^2 + y^2 = b$, puisque le premier membre a une valeur inférieure à $2b$. Donc *tout diviseur de* $a^2 + 1$ *est lui-même une somme de deux carrés* (Fermat). Cette démonstration est due à Hermite.

Faisant $k = 2$, puis $k = 3$, on démontrera de même, avec Lebesgue, que le premier membre de (γ) est b, et par suite, *les diviseurs de* $a^2 + 2$ *ou de* $a^2 + 3$ *sont respectivement de la forme* $\xi^2 + 2\eta^2$ *ou* $\xi^2 + 3\eta^2$ (Euler).

III. *L'égalité* $x^2 + 1 = ky^2$ *ne peut avoir lieu qu'autant que* k *est une somme de deux carrés*, puisqu'autrement il ne diviserait pas $x^2 + 1$ (Lagrange).

2. *Si* k *désigne un nombre non carré, l'équation* $t^2 - ku^2 = 1$ *a une infinité de solutions*. (Fermat)(*). Démonstration de Lejeune-Dirichlet : Parmi l'infinité de couples de solutions de $x^2 - ky^2 = \theta$, il ne peut se trouver plus de θ^2 couples tels que x et y divisés par θ, donnent pour restes toutes les combinaisons des nombres inférieurs à θ. Il existe donc une infinité de couples qui donnent les mêmes restes et on peut écrire :

$$x'^2 - ky'^2 = x''^2 - ky''^2 = \theta, \quad x'' = x' + \alpha\theta, \quad y'' = y' + \beta\theta,$$

d'où, en posant $1 + \alpha x' - k\beta y' = t$, $\alpha y' - \beta x' = u$,

$$(x' \mp y'\sqrt{k})(x'' \pm y''\sqrt{k}) = \theta\,(t \mp u\sqrt{k}),$$

ce qui conduit facilement à l'équation $t^2 - ku^2 = 1$, où u est différent

(*) « Dato quovis numero non quadrato, dantur infiniti quadrati qui in datum numerum ducti, adscita unitate, conficiant quadrato. »

de zéro, car autrement on aurait

$$t = \pm 1 \quad \text{et} \quad x' - y'\sqrt{k} = \pm (x'' - y''\sqrt{k}),$$

ou bien

$$x' = \pm x'' \quad \text{et} \quad y' = \pm y'';$$

or, x' et x'' peuvent être supposés positifs et inégaux, de même que y' et y''.

COROLLAIRES I. *Si un nombre* θ *peut se mettre sous la forme* $x^2 - ky^2$, *il le peut d'une infinité de façons.*

II. Soit $x = a$, $y = b$, une solution de $x^2 - ky^2 = 1$, les expressions

$$\left.\begin{aligned} x_n &= a^n + C_{n,2}a^{n-2}b^2k + C_{n,4}a^{n-4}b^4k^2 + \cdots \\ y_n &= na^{n-1}b + C_{n,3}a^{n-3}b^3k + C_{n,5}a^{n-5}b^5k^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (\partial)$$

en donneront une infinité d'autres, en faisant $n = 2, 3, 4, \cdots$ (EULER). En effet

$$x_n \pm y_n\sqrt{k} = (a \pm b\sqrt{k})^n \quad \text{d'où} \quad x_n^2 - ky_n^2 = 1.$$

La formule (∂) peut s'écrire

$$x_n = \frac{(a+b\sqrt{k})^n + (a-b\sqrt{k})^n}{2}, \quad y_n = \frac{(a+b\sqrt{k})^n - (a-b\sqrt{k})^n}{2\sqrt{k}}.$$

Les solutions forment deux séries récurrentes, dont l'échelle est $2a$ et $-(a^2 - kb^2) = -1$.

III. Soit (x_1, y_1) la solution en nombres minima et soit (u, v) une solution non comprise dans la série (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), $\cdots$ On peut écrire $x_n < u < x_{n+1}$ et il s'en suivra $y_n < v < y_{n+1}$.

Par suite, on aura

$$x_n + y_n\sqrt{k} < u + v\sqrt{k} < x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{k}.$$

Le dernier membre est égal à

$$(x_n + y_n\sqrt{k})(x_1 + y_1\sqrt{k}) = \frac{x_1 + y_1\sqrt{k}}{x_n - y_n\sqrt{k}};$$

on a donc

$$1 < (ux_n - kvy_n) + (vx_n - uy_n)\sqrt{k} < x_1 + y_1\sqrt{k};$$

or, $(ux_n - kvx_n)^2 - k(vx_n - uy_n)^2 = 1$. On aurait ainsi une solution en termes positifs et moindres que x_1, y_1 ce qui est contre l'hypothèse, laquelle est donc à rejeter.

PELL(*) a montré comment on peut trouver la plus petite solution en employant les fractions continues. LAGRANGE a démontré l'exactitude de ce procédé, qui paraît avoir été celui de FERMAT. Depuis, on a donné de nouveaux moyens d'obtenir la solution, fondés sur diverses sommations trigonométriques et sur certaines intégrales, inutiles à mentionner ici.

On a des tables des solutions jusqu'à $k = 1000$. Voici les premières, qui peuvent être utiles :

$k = 2$ $\left\{\begin{array}{l} x = 1, 3, 17, 99, 577, 3363, \ldots \\ y = 0, 2, 12, 70, 408, 2378, \ldots \end{array}\right.$ échelle 6, —5.

$k = 3$ $\left\{\begin{array}{l} x = 1, 2, 7, 26, 97, 362, 1351, 5042, \ldots \\ y = 0, 1, 4, 15, 56, 209, 780, 2911, \ldots \end{array}\right.$ échelle 4, —1.

$k = 5$ $\left\{\begin{array}{l} x = 1, 9, 161, 2889, \ldots \\ y = 0, 4, 72, 1292, \ldots \end{array}\right.$ échelle 18, —1.

$k = 6$ $\left\{\begin{array}{l} x = 1, 5. 49, 485, 4801, \ldots \\ y = 0, 2, 20, 198, 1960, \ldots \end{array}\right.$ échelle 10, —1.

On n'a pas toujours d'aussi petits nombres ; ainsi les plus petits nombres répondant à l'égalité $x^2 - 991y^2 = 1$ n'ont pas moins de trente chiffres.

4. *Équation* $x^2 + 1 = ky^2$. Élevons au carré les deux membres de $x^2 - ky^2 = -1$, il viendra

$$(x^2 + ky^2)^2 - k(2xy)^2 = 1,$$

d'où, en désignant par (a, b) une solution de $x^2 - ky^2 = 1$,

$$x^2 + ky^2 = \frac{(a + b\sqrt{k})^n + (a - b\sqrt{k})^n}{2}, \quad 2xy = \frac{(a + b\sqrt{k})^n - (a - b\sqrt{k})^n}{2\sqrt{k}}$$

$$(x \pm y\sqrt{k})^2 = (a - \sqrt{k}b)^n = 1.$$

On ne prendra donc que les valeurs impaires de n et on aura les solutions de l'équation $x^2 + 1 = ky^2$, s'il y en a (LAGRANGE).

COROLLAIRES I. Si (a', b') est la plus petite solution de $x^2 - ky^2 = -1$, la plus petite de $x^2 - ky^2 = 1$ est $a = 2a' + 1$, $b = 2a'b'$. Donc $x^2 + 1 = ky^2$ *a ou n'a pas de solution selon que la plus petite valeur a est ou n'est pas de la forme* $\frac{n^2}{2} + 1$ (REALIS).

(*) C'est Euler qui a attribué cette solution à Pell, mais elle est en réalité de Brouncker. Elle était du reste déjà connue des Indiens, comme on le voit dans le Libavati, de Bhâskara. Pell ne s'est jamais occupé de l'équation de Pell autrement que pour en publier la solution.

Ainsi la plus petite valeur de a pour

$$k = 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, \ldots$$

étant $\quad a = 3, 2, 9, 5, 8, 3, 19, 10, 7, 648, 15, 4, 33, \ldots$

l'équation $x^2 - ky^2 = -1$ est résoluble si $k = 2, 5, 10, 13, 17, \ldots$ auxquels cas correspondent les valeurs

$$a' = 7, 2, 3, 18, 4, \ldots$$
$$b' = 5, 1, 1, 5, 1, \ldots$$

On n'a pas de méthode pour discerner les valeurs de k qui rendent l'équation $x^2 + 1 = ky^2$ résoluble ; on n'a que quelques théorèmes particuliers, dont on verra ci-dessous les plus simples.

II. On a

$$(b^2n - a)^2 - (b^2n^2 - 2an + k)\, b^2 = -1.$$

Soit $a^2 - kb^2 = -1$; cela permet, connaissant une valeur de k conduisant à une solution, d'en trouver une infinité d'autres. La valeur $k = l^2 + 1$, par exemple, est dans ce cas, car on peut poser $x = k$, $y = 1$.

III. Soient $\alpha^2 - k\beta^2 = 1$ et $a^2 - kb^2 = \gamma$; les solutions de $x^2 - ky^2 = \gamma$ sont

$$x = a\alpha \pm kb\beta, \quad y = \alpha b \pm \beta a,$$

formules dues à Brahmagupta et retrouvées par Prestet et par Euler.

IV. Soit (a, b) la solution en moindres nombres de $x^2 - ky^2 = 1$. On aura $(a + 1)(a - 1) = ky^2$. Si k est un nombre premier, et qu'on fasse $b = fgh$, on aura l'une des relations

$$a + 1 = fg^2k \quad \text{et} \quad a - 1 = fh^2,$$

ou bien

$$a + 1 = fg^2 \quad \text{et} \quad a - 1 = fh^2k ;$$

d'où

$$f(h^2 - kg^2) = -2 \quad \text{ou} \quad f(g^2 - kh^2) = 2 ;$$

f ne peut donc avoir que l'une des valeurs 1 ou 2 ; de là quatre cas à examiner :

$$h^2 - kg^2 = -1 \quad (\alpha), \qquad g^2 - kh^2 = 1 \quad (\beta)$$
$$h^2 - kg^2 = -2 \quad (\gamma), \qquad g^2 - kh^2 = 2 \quad (\delta).$$

La supposition (β) est à écarter, car (a, b) ne serait pas la plus petite solution de l'équation proposée.

Si k est un nombre premier $4 + 1$, quelle que soit la parité de g et

de h, les relations (γ) et (δ) ne peuvent avoir lieu : la seule possible est donc (α), qui doit dès lors être toujours satisfaite, puisque $x^2 - ky^2 = 1$ admet toujours une solution.

Donc *si k est un nombre premier $4+1$, l'équation $x^2+1=ky^2$ est toujours possible.* En outre on voit que *le nombre premier $k=4+1$ divise un nombre de la forme x^2+1.* Cette dernière remarque est de Fermat.

Si k est de la forme $8+3$, (α) n'a pas lieu, d'après ce qui précède, et on démontrera aisément que (δ) non plus ne peut avoir lieu. La relation (γ) est seule dans ce cas, et on peut dire que *pour k premier, de la forme $8+3$, l'équation $x^2 - ky^2 = -2$ est possible*, ce qui montre en outre que *k divise un nombre de la forme x^2+2* (Euler).

Si k est de la forme $8+7$, on démontrera, par des moyens semblables, que la relation (δ) est la seule possible. Donc, *dans ce cas, l'équation $x^2 - ky^2 = 2$ est toujours résoluble et k divise un nombre de la forme x^2-2* (Id.).

Ces démonstrations sont dues à Legendre.

Applications. I. Les équations $x^2 - ky^2 = \pm 2$, $x^2 - ky^2 = \pm 4$ se ramènent à l'équation de Pell, en élevant au carré et posant dans la seconde $x^2 \mp 1 = 2q$, $x^2 \mp 3 = 2p$, ce qui donne

$$(x^2 \mp 1)^2 - k(xy)^2 = 1, \quad (p^2x^2 + kq^2y^2)^2 - k(2pqxy)^2 = 1$$

(Lagrange).

II. Les identités suivantes, de Realis,

$$(ba^2 \pm 1)^2 - b(ba^2 \pm 2)a^2 = 1, \quad (2ba^2 \pm 1)^2 - b(ba^2 \pm 1)(2a)^2 = 1$$

donnent la solution dans un grand nombre de cas. Euler, Degen et d'autres en avaient donné des cas particuliers.

III. Soit $ax^2 - by^2 = 1$, il viendra $(2ax^2-1)^2 - ab(2xy)^2 = 1$. De là le moyen de trouver les solutions de $x^2 - aby^2 = 1$ quand on connaît celles de $ax^2 - by^2 = 1$.

Si $ax^2 - by^2 = 2$, on aura $(ax^2-1)^2 - ab(xy)^2 = 1$: conclusion analogue (Realis).

IV. *Soit à trouver les triangulaires qui sont en même temps des carrés* (Euler). On a $x^2 + x = 2y^2$ ou $(2x+1)^2 - 2(2y)^2 = 1$.

V. *Trouver les nombres dont les carrés diminués de l'unité donnent des triangulaires* (Euler). Solution analogue.

VI. *Trouver deux nombres dont le produit, ajouté successivement*

chacun d'eux donne des carrés (DIOPHANTE). Posons $y = x - \lambda$, $z - w = 1$, l'égalité $xy + x = z^2$ devient

$$4x^2 - 4(\lambda - 1)x = (\lambda + 1)^2 \quad \text{d'où} \quad 2x = \lambda + 1 \pm \sqrt{2\lambda^2 + 2}.$$

On est conduit à résoudre $2\lambda^2 + 2 = (2u)^2$ ou $\lambda^2 - 2u^2 = -1$.

VII. *Soit r l'excès de x sur le plus grand carré qui y est contenu. Déterminer x de manière* 1° *que rx soit un carré;* 2° *que rx surpasse également de r le plus grand carré qui y est contenu* (BROCARD, IM, 1904, n° 2730).

1° On a : $x - r = y^2$, $r(y^2 + r) = z^2$.

Posant $z = rz'$, puis $y = ry'$, il vient $z'^2 - ry'^2 = 1$.

2° On a : $x - r = y^2$, $r(y^2 + r) = z^2 + r$.

Posant $z = rz'$, il vient

$$(\alpha) \qquad y^2 - rz'^2 = -r + 1.$$

Si (a, b) est une solution de $x^2 - ry^2 = 1$, $(rb \pm a, a \pm b)$ en est une de (α). D'ailleurs z^2 est le plus grand carré contenu dans $r(y^2 + r)$, car autrement on aurait successivement

$$r > 2z, \quad r^2 > 4(ry^2 + r^2 - r), \quad 3r + 4 > 4y^2 \quad \text{or} \quad r < 2y\ (*).$$

VARIÉTÉS.

A quoi servent les mathématiques.

1. **Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik,** von A. PRINGSHEIM, München, 1904, J. Roth. (In 4° de 44 pages.)

2. **Lehren und Lernen in der Mathematik,** von D^r F. LINDEMANN, München, 1904, C. Wolf und Sohn. (In 4° de 32 pages.)

Les discours prononcés par M. Pringsheim, le 14 mars 1904, à l'Académie royale de Bavière à l'occasion du 145^e anniversaire de la fondation de cette société savante, et par M. Lindemann, le 26 novembre de la même année, comme recteur de l'Université de Munich, renferment, sur la valeur éducative des mathématiques, des vues qu'il nous semble utile de faire connaître aux lecteurs de *Mathesis*. Nous ne séparons pas rigoureusement ce qui appartient à l'un ou l'autre de ces deux savants, d'ailleurs d'accord sur les points essentiels.

I. Les mathématiques jouissent vraiment d'une *brillante impopularité;* c'est la seule science, on peut le dire, que le journalisme comtemporain, *omniscient* dans tous les autres domaines, ignore complètement. On a bien prétendu que, les mathématiques, qui se déduisent logiquement d'un petit nombre de principes que tout le monde admet, constituent la *science de l'évident;* mais en

(*) Comparez BROCARD, Notes élémentaires sur l'équation de P[illegible] 1878, IV, 161, 193, 238, 337).

fait, même pour beaucoup d'hommes instruits, c'est la *science de l'incompréhensible;* témoins, par exemple, les philosophes Schopenhauer (1788-1860) et William Hamilton (1788-1856). Le premier, dans son ignorance radicale, s'imagine que la théorie des nombres, la géométrie analytique, l'analyse algébrique et l'analyse infinitésimale, se ramènent aux quatre règles de l'arithmétique élémentaire ! Il invoque l'autorité du second, qui en appelle lui-même, à tort ou à raison, à celle d'une foule d'auteurs anciens ou modernes, presque tous ignorants en mathématiques, pour établir que cette science ne peut en rien contribuer à la formation générale de l'esprit. Voici quelques-unes de ces prétendues autorités : Aristo de Chios; Philoponus; Fracastor; Klumpp; Kenelm Digby; Sorbière; Poiret; Budée; Barbeyrac; Salat; Kirwan; Monboddo; Gundling; Cicéron; Sénèque; Pline; Albert le Grand; Pic de la Mirandole; Coleridge; Gibbon; Madame de Staël; Walpole; les philologues Wolf et Bernhardi; Descartes. Pour ce dernier, M. Pringsheim montre que c'est en tronquant un passage de sa vie par Baillet, qu'on parvient à lui faire dire ce qu'on lui attribue contre les mathématiques. M. Pringsheim a aussi la bonté de réfuter en détail les rêveries de Schopenhauer et de Hamilton, en remarquant, bien entendu, que pareille réfutation est inutile pour quiconque connaît un peu les mathématiques.

II. Au point de vue réel, les mathématiques, telles qu'on les enseigne dans les gymnases, révèlent aux élèves ce qu'est une *vraie science :* un ensemble de connaissances bien coordonnées qu'ils peuvent posséder réellement; c'est d'ailleurs une science indispensable pour étudier la physique et la cosmographie autrement que d'une manière empirique; une science enfin dont les applications pratiques dans la vie sociale (arithmétique et algèbre commerciales, arpentage, etc.) sont de plus en plus nombreuses.

Au point de vue formel ou éducatif, les mathématiques habituent l'esprit à la déduction logique rigoureuse dans le domaine des idées de grandeur et à la précision du langage. Elles donnent enfin à l'étudiant l'occasion de se livrer à des recherches personnelles, de trouver, d'inventer pour son propre compte.

Tous les jeunes gens moyennement doués au point de vue de l'intelligence et de la volonté, sont susceptibles de recevoir la formation mathématique, contrairement à ce préjugé très enraciné qu'il faut pour cela des dispositions spéciales. Ce préjugé est soigneusement entretenu par les élèves paresseux, avec la complicité des parents trop faibles et de maints professeurs de langues anciennes qui croient naïvement que leur branche d'enseignement est seule éducative. Quant aux mathématiciens, ils regardent les mathématiques avec le latin et la langue maternelle comme les trois branches fondamentales des humanités. — Au point de vue utilitaire, il est à peine nécessaire de rappeler l'importance des mathématiques pour ceux qui font des études d'ingénieur; elles sont indispensables aussi comme science auxiliaire pour étudier l'astronomie, la physique, et bientôt (quoiqu'en ait dit Comte,— encore un philosophe) la chimie, l'économie sociale et qui sait, demain peut-être, la biologie. — A un point de vue plus idéal, les mathématiques, indépendamment de toute application, sont dignes, comme toute vérité, de l'enthousiasme qu'elles ont toujours excité depuis Platon, jusqu'à Gauss, Cauchy et Poincaré.

Car comme le dit Novalis, *der echte Mathematiker ist Enthusiast per se. Ohne Enthusiasmus keine Mathematik.*

III. Jusqu'où doit s'étendre l'enseignement mathématique dans les gymnases? M. Lindemann répond, comme M. F. Klein, avec les professeurs des écoles polytechniques allemands réunis à Munich en 1904, avec les mathématiciens assemblés à Breslau, la même année, que l'on doit enseigner, au moins dans la Realschule, la géométrie analytique et les éléments de l'analyse infinitésimale comme on le fait en France depuis longtemps. Sans cela, impossible de donner aux élèves un enseignement sérieux des grandes lois de la physique, puisqu'elles supposent connues avec précision les notions de fonction, de vitesse, d'accélération, d'énergie, de potentiel (*).

Quant aux professeurs de l'enseignement moyen, ils doivent avoir une connaissance solide des hautes mathématiques sans doute, mais aussi *de la méthodologie des mathématiques élémentaires*, de l'histoire de la science et, en particulier, des immortels éléments d'Euclide. Il y a donc lieu de créer dans les universités allemandes un cours de mathématiques élémentaires (**).

(P. M.)

SUR L'HÉLICOÏDE DÉVELOPPABLE,

par M. Gustave Gérard, ingénieur.

Soient (C) un cylindre de révolution autour de l'axe Oz, (H) une hélice tracée sur la surface, (Σ) l'hélicoïde développable engendré par les tangentes à (H).

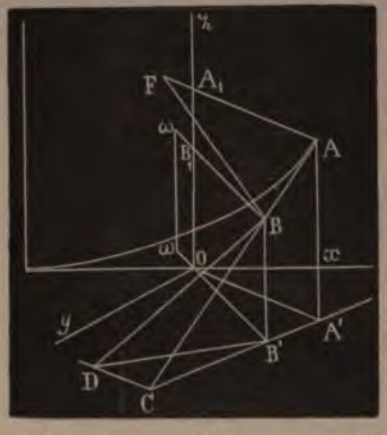
I. L'hélice (H) peut être décrite par un point A qui est animé de deux mouvements uniformes, l'un de rotation autour de Oz, l'autre de translation parallèle à Oz. Si le point A entraîne avec lui la tangente à sa trajectoire, un point déterminé B de cette droite est également animé de deux mouvements uniformes de rotation et de translation; par suite, il parcourt une hélice (H') de même pas que (H) et tracée sur un cylindre (C') de révolution autour de Oz.

Autrement dit, *un hélicoïde développable est coupé par un cylindre de révolution de même axe que le cylindre directeur, suivant une hélice.*

(*) Dans les universités belges, les cours de physique étant fréquentés à la fois par les aspirants candidats en sciences naturelles et par les aspirants ingénieurs, sont fatalement moins élevés, au point de vue mathématique que s'ils étaient destinés à la seconde catégorie seule.

(**) Le cours de méthodologie mathématique existe à l'université de Gand depuis 1850, celui d'histoire des mathématiques depuis 1884. Ces deux cours ont été créés dans les autres universités belges en 1890.

II. La tangente au point B de (H') est l'intersection du plan tangent à Σ le long de la génératrice AB avec le plan tangent mené en B au cylindre (C'). Le premier de ces plans passe par AB et par le rayon AA_1 de (C); soient, sur un plan quelconque xOy perpendiculaire à Oz, A' la projection de A, C la trace de AB; la trace CD du plan A_1AC sera parallèle à OA' et AA_1. Projetons B en B' sur le plan xOy et menons B'D perpendiculaire à OB' (ou tangente à la section de (C') par le plan xOy); le plan tangent au cylindre (C') sera le plan BB'D. On en conclut que la tangente en B à (H') est la droite BD.



III. *Lorsque le point* B *se déplace sur une tangente* AB *à* (H), *la tangente à l'hélice correspondante* (H') *roule sur une parabole, qui a pour foyer le centre de courbure de* (H) *en* A.

En effet, le point B' parcourt la droite A'C et l'angle OB'D est droit, donc B'D enveloppe une parabole de foyer O et ayant A'C pour tangente au sommet. Le plan tangent BB'D au cylindre variable (C') enveloppe un cylindre parabolique qui est coupé par le plan A_1ACD suivant une parabole; celle-ci est évidemment l'enveloppe de la droite BD.

Voici une autre démonstration qui fait connaître le foyer. La perpendiculaire à BD en B dans le plan A_1AC rencontre le rayon AA_1 en un certain point F. Les triangles FAB, BCD qui ont leurs côtés perpendiculaires, donnent

$$\frac{FA}{BC} = \frac{AB}{CD}.$$

Pour la même raison, on a

$$\frac{OA'}{B'C} = \frac{A'B'}{CD}.$$

Éliminant CD entre ces proportions on trouve

$$\frac{FA}{OA'} = \frac{BC.AB}{B'C'.A'B'}.$$

Or, si V est l'inclinaison de la tangente AB à (H) sur le plan horizontal, on a $A'B' = AB \cos V$, $B'C' = BC \cos V$; donc

$$FA = \frac{R}{\cos^2 V} = R(1 + \operatorname{tg}^2 V) = r,$$

r désignant le rayon de courbure de l'hélice (H).

On conclut de là que F est le centre de courbure de (H) en A et que BD enveloppe une parabole qui a pour foyer F et pour sommet A.

IV. Menons BB_1 perpendiculaire à Oz et soient $BB_1 = B'O = R'$ le rayon du cylindre (C'), $B\omega = r$ le rayon de courbure de l'hélice (H'), V' l'inclinaison de la tangente BD sur la base de (C'). On a

$$r' = R'(1 + \operatorname{tg}^2 V').$$

Les hélices (H'), (H) ont le même pas, d'où $R \operatorname{tg} V = R' \operatorname{tg} V'$.

Éliminant V', on trouve

$$r' = R' + \frac{R^2}{R'} \operatorname{tg}^2 V. \qquad (1)$$

Si l'on projette ω en ω' (*) sur le plan xOy, la dernière relation donne

$$O\omega' = \frac{R^2}{R'} \operatorname{tg}^2 V \quad \text{ou} \quad O\omega' . OB' = R^2 \operatorname{tg}^2 V.$$

Donc ω' et B' se correspondent dans une inversion de pôle O. Comme B' décrit une droite A'C, ω' parcourt une circonférence passant par O.

D'après cela, *les centres de courbure des hélices* (H'), *aux points d'une même génératrice* AC *de* (Σ) *sont situés sur une cubique gauche, intersection d'un cylindre droit passant par* Oz *avec un hyperboloïde équilatère qui a pour directrices* AC *et* Oz *et pour plan directeur le plan* xOy.

La tangente en ω à cette courbe est donc facile à déterminer.

V. Appelons ρ le rayon de courbure de la parabole de foyer F et de sommet A, au point de contact de la tangente BD. On a

$$\rho = \frac{\overline{FB}^3}{\overline{FA}^2}.$$

(*) Sur la figure, lire ω' au lieu de ω sur le prolongement de la droite B'O.

Mais

$$\overline{FB}^2 = \overline{FA}^2 + \overline{AB}^2 = \frac{R^2}{\cos^4 V} + \frac{\overline{A'B'}^2}{\cos^2 V}$$

$$= \frac{R^2}{\cos^4 V} + \frac{R'^2 - R^2}{\cos^2 V} = (1 + \operatorname{tg}^2 V)(R^2 \operatorname{tg}^2 V + R'^2);$$

d'où, eu égard à la formule (2) et à la valeur $FA = R(1 + \operatorname{tg}^2 V)$,

$$\overline{FB}^2 = (1 + \operatorname{tg}^2 V) R'r', \quad FB = \frac{(R'r')^{\frac{1}{2}}}{\cos V}, \quad \rho = \frac{(R'r')^{\frac{5}{2}}}{R^2} \cos V.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Dr Federico Amodeo, professore del Reale Istituto tecnico di Napoli, ecc. — **Aritmetica razionale** particolare e generale. Opera destinata alle scuole medie italiane. 2a ed. Napoli, tip. Luigi Pierro, 1903-1904. — Deux volumes in-12 de XVI-252 et XVI-280 pages. — Prix de chaque volume, 2 fr.; des deux volumes réunis, fr. 3-50.

Voici le détail des matières de ce remarquable traité d'arithmétique :

Première partie. Introduction. 1. Nombres entiers (positifs). 2. Principes fondamentaux d'arithmologie. 3. Nombres fractionnaires. 4. Nombres relatifs (c.-à-d. les nombres de la suite : ... -3, -2, -1, 0, $+1$, $+2$, $+3$ ...) et nombres rationnels (c.-à-d. les nombres entiers ou relatifs et les nombres fractionnaires ayant pour numérateurs les nombres relatifs et pour dénominateur un entier n différent de zéro). Ce chapitre comprend les opérations sur les polynomes, la divisibilité par $x - a$ et les exposants négatifs.

Deuxième partie. 1. Nombres réels (rationnels et irrationnels). Ce chapitre comprend le calcul des radicaux, à indices réels, même négatifs, et les logarithmes. 2. Limites, génératrices, ensembles. 3. Proportions, moyennes, progressions (arithmétique, géométrique, harmonique). 4. Mesure des grandeurs; problèmes divers. 5. Nombres imaginaires et complexes; vecteurs et quaternions. Appendice : Notions de Logique mathématique (d'après Peano).

Chacune des deux parties est suivie d'un certain nombre d'exercices.

L'ouvrage du Dr Amodeo est recommandable par sa rigueur et sa clarté, et on le lira avec d'autant plus d'intérêt que les théories arithmétiques y sont exposées d'une façon très différente de celle qui est communément suivie en France et en Belgique.

E. Gelin.

×NOTES MATHÉMATIQUES.

22. *Podaire de l'hypocycloïde de Steiner par rapport à un point de rebroussement* (*Mathesis*, (3) V. 1905, 206-207). Dans une note bibliographique, p. 206, M. J. Neuberg demande si la podaire étudiée par M. Jeřabek a été déjà signalée. Oui, certes, et précisément dans *Mathesis*, 1892, *Supplément* II : *Le Trifolium*, p. 25-27. Podaires particulières de l'hypocycloïde triangulaire (ou JMS, 1891, p. 83-85).

La définition donnée par M. Jeřabek (p. 206) s'y trouve aussi (JMS p. 57 ou *Supplément* p. 14).

Je ne connais pas l'étude de Münger; il s'agit sans doute de la Dissertation parue en 1894 : *Die eiförmigen Curven* (Les courbes ovoïdes). Il eût été bon de citer cette référence.

La courbe ovoïde susmentionnée (p. 207) a été signalée et étudiée, dès 1886, sous le nom de *folium simple*, par M. G. de Longchamps, qui a donné la construction CMNP de M. Jeřabek (JMS, 1886, p. 273-275 et *Géométrie de la Règle et de l'Equerre* 1890, p. 126-127) ainsi que celle de la normale en P (qui rencontre ON aux $\frac{3}{4}$ de cette ligne) (figure de la p. 206).

A l'occasion de ces mêmes recherches, j'avais, dès 1884, établi l'équation générale des podaires de l'hypocycloïde triangulaire par rapport aux divers points de ses axes de symétrie (voir *Le Trifolium loc. cit.*). Pour les points N de CO en deça du point O de rebroussement, la podaire a un point double en N; ce point double disparaît aussitôt que le point N vient en O ou au-delà. La podaire est alors une courbe ovoïde, tendant à devenir un cercle, à mesure que N s'éloigne sur l'axe.

Ces résultats m'engagèrent à proposer la question 346 (*Mathesis*, (1) IV, 1884. p 143) qui n'a pas été résolue, mais à laquelle la publication du *Supplément* (1893, p. 74) a servi de réponse.

Voir enfin le Répertoire de courbes : *Notes de bibliographie* etc., I, 1897, articles Folium simple, p. 145-146; Hypocycloïde à trois rebroussements, p. 171-172; Trifolium, p. 285-288. (H. Brocard).

23. *Sur une podaire.* La propriété de l'hypocycloïde de Steiner, d'être l'antipodaire par rapport à un rebroussement, d'un *folium simple* (eigentliches Oval, Eilinie) dont M. Jeřabek a donné récemment en ce Journal (1905, p. 206) une élégante démonstration géométrique, est déjà connue. On la trouve démontrée par l'analyse au § 5 (p. 30-31)

de la Dissertation inaugurale de M. Fritz Münger (*Die Eiförmigen Kurven*, Bern, 1894). Elle est signalée aussi par M. Brocard dans sa *Bibliographie des Courbes géométriques* (1897-1899), page 287 du 1er vol. (Art. *Trifolium*) et p. 104 du 2me vol. (Art. *Folium simple*). Une démonstration géométrique simple est aussi la suivante : l'hypocycloïde est l'enveloppe de la droite DN (voir la fig. de p. 206); l'angle MNC est droit, car CD = DM = DN, et, comme la perpendiculaire menée par O à DN coupe le cercle CMO au point symétrique de M par rapport au diamètre OC, le théorème est démontré.

La théorie de la transformation (M, P) est développée dans une note que j'ai publiée en 1902, ayant pour titre *Sopra una trasformazione Cremoniana del 3° ordine* (M. P. A., T. II); le cas particulier des courbes ovoïdales, du sixième et du quatrième ordre, est traité au § 9 où sont aussi rectifiés quelques résultats énoncés dans la Dissertation de M. Münger. (V. Retali.)

24. *Au sujet de l'article de M. E. Weber sur quelques coniques associées au triangle* (*Mathesis*, 1905, 148-151, 170-174). Un hasard de lecture vient de me faire constater que la conique [GK] représentée en coordonnées normales par l'équation (4) (p. 151) a été rencontrée par M. E. Lemoine (N. A. M. 1901, p. 390).

Cette coïncidence — pas plus que toutes celles qui se présentent fréquemment dans la Géométrie du Triangle, — ne porte aucun préjudice à l'originalité des résultats exposés dans l'étude précitée. (H. Brocard.)

CONCOURS GÉNÉRAL DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN, EN 1905.

Géométrie analytique.

OX, OY *étant les axes coordonnés, soient* A(0, *a*), B(0, *b*) *deux points fixes de l'axe* OY *et* $y = mx$ *l'équation d'une droite fixe* OZ :

1° *Former l'équation générale des hyperboles qui ont une asymptote parallèle à* Oz, *passent par les points* A, B *et rencontrent* OX *en deux points* C, D *tels que le produit* OC.OD *ait une valeur constante.*

En déduire que la seconde asymptote a également une direction invariable.

2° *Trouver l'équation du lieu du pôle de la corde* AB *par rapport à chacune des hyperboles.*

3° *Former l'équation du lieu du pôle de la droite* CD *par rapport aux mêmes hyperboles.*

Ce lieu est une hyperbole ; trouver les équations de ses asymptotes.

4° *Trouver l'équation du lieu des points de contact des tangentes menées aux hyperboles variables parallèlement à l'axe* OX.

Ce lieu est une conique ; rapporter cette courbe à deux diamètres conjugués dont l'un soit parallèle à l'axe OX.

Ce lieu peut-il dégénérer en un système de deux droites ?

Solution par M. PLOUMEN (Chimay) : 1° En appelant m' le coefficient angulaire de la seconde asymptote, l'équation générale des hyperboles est

$$(y - mx)(y - m'x) + Dy + Ex + F = 0.$$

Si l'on y fait $x = 0$, a et b seront les racines de l'équation résultante :

$$y^2 + Dy + F = 0,$$

ce qui donne $D = -(a + b)$, $F = ab$.

Si l'on y fait $y = 0$, le produit des racines de l'équation résultante

$$mm'x^2 + Ex + F = 0,$$

doit avoir une valeur constante k, c'est-à-dire $\frac{F}{mm'} = k$ ou $m' = \frac{ab}{mk}$.

Par suite, en remplaçant, on obtient pour l'équation générale demandée,

$$mky^2 - (m^2k + ab)xy + mabx^2 - mk(a + b)y + mkEx + mkab = 0, \quad (1)$$

où E est un paramètre variable.

On remarque que la seconde asymptote a une direction constante, dont le coefficient angulaire est $\frac{ab}{mk}$.

2° La polaire d'un point (x', y') par rapport à (1) est

$$2mkyy' - (m^2k + ab)(x'y + xy') + 2mabxx' - mk(a + b)(y + y') + mkE(x + x') + 2mkab = 0. \quad (2)$$

Pour que (2) représente AB il faut que le cœfficient de y et le terme indépendant soient nuls ou que

$$2mky' - (m^2k + ab)x' - mk(a + b) = 0,$$
$$-(a + b)y' + Ex' + 2ab = 0. \quad (3)$$

Ce qui montre que le lieu du pôle de la corde AB est la droite

$$2mky - (m^2k + ab)x - mk(a + b) = 0.$$

3 Pour que (2) représente CD, il faut que le cœfficient de x et le terme indépendant soient nuls; c'est-à-dire que l'on doit avoir la relation (3) et

$$-(m^2k + ab)y' + 2mabx' + mkE = 0. \qquad (4)$$

En éliminant E entre (3) et (4) on obtient l'équation du lieu du pôle de CD :

$$F(x,y) \equiv (m^2k + ab, xy - 2mabx^2 - mk(a + b)y + 2mkab = 0.$$

Ce lieu est une hyperbole ayant une asymptote parallèle à OY, savoir:

$$(m^2k + ab)x - mk(a + b) = 0.$$

Le cœfficient angulaire de l'autre asymptote est la racine de

$$(m^2k + ab)z - 2mab = 0 \quad \text{ou} \quad z = \frac{2mab}{m^2k + ab}.$$

Son équation est donc

$$\frac{2mab}{m^2k + ab} F'_y + F'_x = 0,$$

ou

$$2mab(m^2k + ab)x - (m^2k + ab)^2 y + 2m^2abk(a + b) = 0.$$

On pourrait aussi déterminer les asymptotes en résolvant l'équation $F(x, y) = 0$ par rapport à y ou x et en appliquant alors des règles connues.

4° Si (x', y') est un point d'une des hyperboles variables, l'équation (2) représente la tangente en ce point. Comme cette tangente doit être parallèle à OX, il faut que le coefficient de x dans (2) soit nul, d'où l'équation (4). Pour avoir l'équation du lieu des points de contact des tangentes menées aux hyperboles variables parallèlement à OX, il suffira donc d'éliminer E entre (4) et l'équation

$$mky'^2 - (m^2k + ab)x'y' + mabx'^2 - mk(a + b)y' + mkEx' + mkab = 0$$

qui indique que le point (x', y') se trouve sur l'hyperbole.

Cette élimination donne

$$ky^2 - abx^2 - k(a + b)y + kab = 0. \qquad (5)$$

Les quantités ab et k ne peuvent être nulles, car sans celà toutes les

hyperboles variables auraient au moins trois points en ligne droite. Par suite, (5) représente une conique du genre hyperbole ou du genre ellipse. Cette conique a deux diamètres conjugués dont l'un est OY et dont l'autre est une parallèle à OX. Son centre a pour coordonnées $x = 0$, $y = \frac{a+b}{2}$, c'est-à-dire se trouve au milieu M de AB. En transportant les axes coordonnés parallèlement à eux-mêmes au point M, on obtient :

$$ky^2 - abx^2 - \frac{k(a-b)^2}{4} = 0,$$

ou l'équation du lieu rapporté aux diamètres conjugués susdits. Le discriminant de (5) est $\Delta \equiv -h^2ab(a-b)^2$.

Si ab et k ont les mêmes signes, ou si l'on peut former constamment un quadrilatère convexe ayant pour sommets les points A, B, C, D. le lieu (5), du genre hyperbole, dégénère en deux droites sécantes réelles pour $a = b$, c'est-à-dire lorsque les hyperboles variables sont tangentes à l'axe OY en un point A déterminé.

Si ab et k sont de signes contraires, c'est-à-dire lorsque les points A, B, C, D sont constamment les sommets d'un quadrilatère à angle rentrant, le lieu (5), du genre ellipse, dégénère pour $a = b$ en un point réel ou, en d'autres termes, en deux droites imaginaires se coupant en un point réel.

Dans les deux cas, ces deux droites sont:

$$(y-a)\sqrt{k} + ax = 0,$$
$$(y-a)\sqrt{k} - ax = 0;$$

elles se coupent au point $(0, a)$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1503.

Soient M, N *deux points quelconques du plan d'un triangle* ABC *et soit* $A_1B_1C_1$ *un triangle variable homothétique à* ABC *par rapport à* M. *Les droites* AN, BN, CN *rencontrent respectivement* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1

points A_2, B_2, C_2. *Trouver les enveloppes des côtés du triangle* $A_2B_2C_2$ *et de l'axe d'homologie des triangles* $A_2B_2C_2$, ABC. (ABRAMESCU).

Solution partielle par M. J. ROSE. Appelons A', B', C' les points de rencontre de AN, BN, CN, et A_2, B_2, C_2 ceux de B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 respectivement avec BC, CA, AB.

Les côtés du triangle $A_1B_1C_1$ marquent sur les droites AM, BM, CM, AN, BN, CN des ponctuelles semblables (A_1), (B_1), (C_1), (A_2), (B_2), (C_2). On en conclut que les droites B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2, enveloppent trois paraboles P_a, P_b, P_c qui sont respectivement inscrites aux triangles NB'C', NC'A', NA'B' formés par les supports des ponctuelles (A_2), (B_2), (C_2) et par les côtés du triangle A'B'C' avec lequel se confond le triangle $A_2B_2C_2$ lorsque $A_1B_1C_1$ coïncide avec ABC.

NOTE. 1. Menons par N une parallèle à BC; soient B_1', C_1', les points où cette droite coupe MB, MC. Les parallèles à BA par B_1' et à CA par C_1' se rencontrent en un point A_1' de MA; appelons B_2', C_2' les points de rencontre de NB avec $A_1'C_1'$ et de NC avec $A_1'B_1'$; $NA_2'B_2'$ est une position du triangle $A_2B_2C_2$. Comme B_2' est la position de B_2 lorsque A_2 est en N sur AN, la parabole P_a touche BN en B_2'; semblablement P_b touche CN en C_2'. De là, une propriété assez curieuse des trois paraboles P_a, P_b, P_c; trois des tangentes communes à deux de ces courbes concourent en N et les droites joignant les points de contact de P_b avec NC et de P_c avec NB, par exemple, est tangente à P_a.

2. Cherchons la classe de l'enveloppe de la droite $A_2B_2C_2$. Si l'on prend arbitrairement A_2 sur BC, la droite B_2C_2 est l'une des deux tangentes menées de A_2 à P_a; de son point de rencontre B_2 avec NB on peut mener à P_a une tangente B_2A_2 autre que NB. Il passe donc par un point quelconque de BC, deux droites $A_2B_2C_2$. Mais la droite BC elle-même est l'axe d'homologie des triangles ABC, $NB_2'C_2'$. Il résulte de là que l'enveloppe considérée est de la troisième classe.

3. Soient (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ les coordonnées barycentriques des points M, N. Les côtés du triangle $A_1B_1C_1$ ont pour équations

$$x = k\alpha(x+y+z), \quad y = k\beta(x+y+z), \quad z = k\gamma(x+y+z);$$

k est ici un paramètre variable.

Le point A_2 étant sur la droite AN, on peut représenter ses coordonnées par $\alpha_1', \beta_1, \gamma_1$; en portant ces quantités dans l'équation de

B_1C_1, on trouve α_1'. On trouve ensuite pour l'équation de A_2B_2 :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \dfrac{k\alpha(\beta_1+\gamma_1)}{1-k\alpha} & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_1 & \dfrac{k\beta(\gamma_1+\alpha_1)}{1-k\beta} & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant et faisant $z=0$, on voit que le point A_3 vérifie l'équation

$$x\left(\beta_1-\frac{k\beta(\gamma_1+\alpha_1)}{1-k\beta}\right)+y\left(\alpha_1-\frac{k\alpha(\beta_1+\gamma_1)}{1-k\alpha}\right)=0,$$

d'où l'on conclut que les points A_3, B_3, C_3, appartiennent à la droite

$$\Sigma x\,\frac{1-k\alpha}{\alpha_1-k\alpha(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)}=0. \qquad (1)$$

L'équation (1) rendue entière est du troisième degré en k; donc l'enveloppe de la droite $A_3B_3C_3$ est de la troisième classe. (J. N.)

×Question 1528

(Voir *Mathesis* (3), IV, p. 168).

Sur les côtés BC, CA, AB *d'un triangle* ABC *on porte les longueurs* $BD=\lambda.AB$, $CE=\lambda.BC$, $AF=\lambda.CA$. *Peut-on choisir* λ *de manière que les points* D, E, F *soient en ligne droite ou que les droites* AD, BE, CF *concourent en un même point? Entre quelles limites peuvent varier l'aire du triangle* DEF *et les sommes*

$$\overline{DE}^2+\overline{EF}^2+\overline{FD}^2,\quad \overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2?$$ (J. Neuberg).

Solution par M. Abramescu (*). Désignons par a, b, c les longueurs des côtés et considérons λ comme positif ou négatif suivant que les longueurs BD, CE, AF sont portées vers C, A, B ou dans la direction opposée.

1. La condition que les points D, E, F soient collinéaires s'exprime par l'équation

$$\frac{\lambda^3abc}{(a-\lambda c)(b-\lambda a)(c-\lambda b)}=-1,$$

(*) Solution retouchée en quelques endroits. (J. N.)

ou

$$\lambda^2(b^2c+c^2a+a^2b)-\lambda(bc^2+ca^2+ab^2)+abc=0. \qquad (1)$$

Le discriminant de cette équation est

$$b^2c^4+c^2a^4+a^2b^4-2ab^2c^2-2bc^2a^2-2ca^2b^2,$$

ou, en posant $c\sqrt{b}=\alpha$, $a\sqrt{c}=\beta$, $b\sqrt{a}=\gamma$, (2)

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2$$
$$=-(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma);$$

pour qu'il soit positif, il faut et il suffit que la plus grande des quantités α, β, γ soit plus grande que la somme des deux autres. Cela revient à dire que α, β, γ ne peuvent représenter les côtés d'un triangle proprement dit, conclusion qu'on aurait pu deviner, car l'expression (2) changée de signe représente 16 fois le carré de la surface du triangle qui a pour cotés α, β, γ.

Exemple. Il existe un triangle avec les côtés $a=16$, $b=36$, $c=49$; mais il n'en existe pas avec les côtés $\alpha=49\times 6$, $\beta=36\times 4$, $\gamma=16\times 7$. Par suite, le triangle (16, 36, 49) admet deux solutions réelles du problème.

Si l'on conserve $a=16$, $b=36$ et qu'on prenne pour $\sqrt{c}$ la racine positive de l'équation $c\sqrt{b}-b\sqrt{a}-a\sqrt{c}=0$, on a les côtés d'un triangle pour lequel les deux racines de l'équation (1) sont réelles et égales.

L'équation (1) peut être considérée comme ayant une racine infinie puisque le cœfficient de λ^3 s'est réduit à zéro, et cette solution convient au problème.

2. Les droites AD, BE, CF concourent en un même point si

$$\frac{\lambda^3abc}{(a-\lambda c)(b-\lambda a)(c-\lambda b)}=+1,$$

ou

$$\lambda^3-\tfrac{1}{2}\lambda^2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)+\tfrac{1}{2}\lambda\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}\right)-\tfrac{1}{2}=0.$$

Cette équation ayant trois variations a trois racines positives ou une

racine positive et deux racines imaginaires. La discussion du discriminant est assez compliquée(*).

3. Soient S, S′ les surfaces des deux triangles ABC, A′B′C′. En appliquant la formule comme

$$S' = \frac{BD.CE.AF + DC.EA.FC}{abc}.$$

on trouve pour le rapport S′ : S

$$\frac{\lambda^2(a^2b + b^2c + c^2a) - \lambda(ab^2 + bc^2 + ca^2) + abc}{abc} \qquad (3)$$

On a $S' = S$ pour

$$\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{a^2b + b^2c + c^2a}.$$

Si l'on représente le numérateur de (3) par $A\lambda^2 - B\lambda + C$, on peut écrire

$$abc\frac{S'}{S} = A\left(\lambda - \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A}.$$

Un minimum de S′ correspond $\lambda = \frac{B}{2A}$; il est égal à $\frac{4AC - B^2}{4A}$, négatif ou positif suivant qu'il existe deux systèmes collinéaires réels des points D, E, F ou que ces systèmes sont imaginaires. La continuité de S′ avec λ explique l'existence d'un minimum négatif, lorsque S′ peut passer deux fois par la valeur 0.

4 On trouve aisément

$$\overline{DE}^2 = (a - \lambda c)^2 + \lambda^2 a^2 - 2(a - \lambda c)\lambda a \cos C, \text{ etc.}$$

d'où en posant $\overline{DE}^2 + \overline{EF}^2 + \overline{FD}^2 = \mu^2$:

$$\mu^2 = 2\lambda^2(\Sigma a^2 + \Sigma ac\cos C) - 2\lambda(\Sigma ac + \Sigma a^2\cos C) + \Sigma a^2.$$

(*) Si l'on divise $a - \lambda c$, $b - \lambda a$, $c - \lambda b$ respectivement λa, λb, λc et que l'on pose

$$\frac{1}{\lambda} = \rho, \quad \frac{c}{a} = \beta, \quad \frac{a}{b} = \gamma, \quad \frac{b}{c} = \alpha,$$

l'équation prend la forme

$$(\rho - \alpha)(\rho - \beta)(\rho - \gamma) - \alpha\beta\gamma = 0;$$

elle admet au moins une racine supérieure à α, si $\alpha > \beta > \gamma$ et les racines de l'équation dérivée sont positives, l'une comprise entre γ et β, l'autre entre β et α.

Un minimum de μ^2 correspond à

$$\lambda = \frac{\Sigma ac + \Sigma a^2 \cos C}{2\Sigma a^2 + 2\Sigma ac \cos C}.$$

5. Soit ν^2 la somme $\overline{AD}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CF}^2$. Comme

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2AB.BD \cos B = c^2(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos B), \quad \text{etc.}$$

on a

$$\nu^2 = \lambda^2 \Sigma a^2 - 2\lambda \Sigma c^2 \cos B + \Sigma a^2;$$

le minimum de ν^2, qui correspond à

$$\lambda = \frac{\Sigma \lambda^2 \cos B}{\Sigma a^2},$$

a pour expression

$$\frac{\Sigma^2 a^2 - \Sigma^2 c^2 \cos B}{\Sigma a^2} = \frac{4\Sigma a^2 \cos^2 \frac{1}{2} C \, \Sigma a^2 \sin^2 \frac{1}{2} C}{\Sigma a^2}.$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

1243. Résoudre le système

$$\cos \alpha + \cos(\alpha + x) + \cos(\alpha + y) = 0,$$
$$\sin \alpha + \sin(\alpha + x) + \sin(\alpha + y) = 0,$$

en le ramenant à la forme

$$1 + \cos x + \cos y = 0, \qquad \sin x + \sin y = 0;$$

et démontrer que sur le cercle trigonométrique les extrémités des arcs α, $\alpha + x$, $\alpha + y$ sont les sommets d'un triangle équilatéral.

1243. Résoudre l'équation

$$\sqrt{(a-x)(b-x)} + \sqrt{(a-x)(c-x)} + \sqrt{(b-x)(c-x)} = x,$$

et vérifier la solution.

Réponse :

$$x = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 2abc(a+b+c)}{4abc}.$$

1244. Résoudre l'équation

$$(x + \sqrt{x^2 - a})^4 (x - \sqrt{x^2 - a}) = b.$$

Elle se ramène à

$$(x + \sqrt{x^2 - a})^5 a = b.$$

1245. Résoudre le système

$$x^2 + y = x + y^2 = axy.$$

1246. Résoudre l'équation

$$(1) \qquad \sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} + \sqrt{a+b+c+x} = 0.$$

Transposons deux des radicaux, puis élevons en carré, etc.; il vient

$$(2) \qquad x = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 2abc\,(a+b+c)}{4abc}.$$

Cas particuliers : 1° $a+b+c=0$; les égalités (1) et (2) deviennent

$$\sqrt{x} + \sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{x-(a+b)} = 0,$$

$$(3) \qquad x = -\frac{(a^2+ab+b^2)^2}{4ab\,(a+b)}.$$

2° $c=0$; l'équation (1) devient

$$(4) \qquad \sqrt{x} + \sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{a+b+x} = 0,$$

et la formule (2) indique la solution $x=\infty$, tandis que l'équation (4) rendue rationnelle conduit à $0.x + A = 0$. Si l'on écrit l'équation proposée (1) ainsi :

$$\sqrt{\frac{a}{x}+1} + \sqrt{\frac{b}{x}+1} + \sqrt{\frac{c}{x}+1} + \sqrt{\frac{a+b+c}{x}+1} = 0$$

et qu'on prenne deux des radicaux avec le signe —, on voit que $x=\infty$ est une solution.

La vérification des solutions (2) ou (3) se fait facilement. (J. N.).

1247. Quel est le nombre auquel on ajoute *cent* en écrivant le chiffre *un* à sa droite?

QUESTIONS PROPOSÉES.

1541. On considère une ellipse E et un cercle C.

De chaque point M de l'ellipse comme centre on décrit un cercle Σ tangent au grand axe.

Le lieu des centres de similitude des cercles C et Σ se compose de deux coniques Γ, Γ'.

Si le centre de C reste fixe et si son rayon varie, le lieu des points d'intersection de Γ et Γ' se compose des deux sommets du grand axe de E, et d'une hyperbole H. (E. N. Barisien).

1542. Deux coniques K^2 et C^2 se touchent au point P et se coupent aux points 3, 4; on prend sur C^2 un point quelconque O et l'on détermine sur C^2 les deux points E, F qui sont séparés harmoniquement par les deux couples 3, 4; P, O.

Démontrer que les deux coniques qui passent par O et ont un double contact avec K^2 respectivement sur les droites PE, PF ont un contact du deuxième ordre avec C^2 au point P. (V. Retali).

×**1543.** On mène par les sommets d'un triangle ABC trois droites AA_1, BB_1, CC_1 faisant avec les côtés opposés des angles égaux dans le même sens. Les parallèles menées par le pied A_1 de la première oblique AA_1 aux droites BB_1, CC_1 rencontrent respectivement AC, AB aux points B_a, C_a. Soient C_b, A_b, A_c, B_c les points analogues déduits de BB_1, CC_1. Démontrer que les six points B_a, C_a, C_b, A_b, A_c, B_c sont situés sur un cercle de Tücker.

Cette construction d'un cercle de Tucker résulte de la question 2922 de l'*Intermédiaire des mathématiciens* (juin 1905). (J. N.).

×**1544.** Les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque M de la circonférence circonscrite au triangle ABC sur les côtés BC, CA, AB rencontrent respectivement ces côtés en α, β, γ et la circonférence en A_1, B_1, C_1.

1° La droite de Simson $\alpha\beta\gamma$ rencontre les côtés du triangle $A_1B_1C_1$ en des points α_1, β_1, γ_1 tels que les droites $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ concourent en un même point N.

2° Les droites AM, BM, CM rencontrent les côtés correspondants du triangle $A_1B_1C_1$ en des points α_2, β_2, γ_2 situés sur une même parallèle à la droite $\alpha_2\beta\gamma$. (Sollertinsky).

1545. De chaque point M (x, y) d'une courbe C on déduit un point M_1 (x_1, y_1) au moyen des formules

$$x_1 = ax + b, \quad x_1^2 + y_1^2 = a(x^2 + y^2) + c. \qquad (1)$$

Le point M_1 décrit une seconde courbe C_1. Démontrer que les normales aux points M, M_1 se coupent sur l'axe Ox.

Si l'on remplace les formules (1) par celles-ci :

$$x_1^2 + y_1^2 + 2ax_1 = ax - \beta, \quad x^2 + y^2 + 2a'x = \gamma x_1 + \delta,$$

les normales en M et M_1 rencontrent Ox en deux points correspondants de deux ponctuelles projectives. (J. Neuberg).

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE PASCAL,

par M. VENTURA REYES (Tolède).

La réciproque du théorème de Pascal peut être énoncée ainsi :

Si cinq sommets A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *d'un hexagone simple restent fixes et que le sixième* A_6 *se déplace de manière que les points de concours des côtés opposés*

$$(A_1A_2,\ A_4A_5) \equiv B_1, \quad (A_2A_3,\ A_5A_6) \equiv B_2, \quad (A_3A_4,\ A_6A_1) \equiv B_3$$

soient toujours en ligne droite, le sommet A_6 *décrit une conique qui passe par les autres sommets.*

On peut se demander quel sera le lieu (A_6) lorsque les points B_1, B_2, B_3 sont les sommets d'un triangle de surface constante.

I. Pour traiter la question par le calcul, représentons par x_i, y_i les coordonnées de A_i. Les équations des droites A_1A_2, A_4A_5 seront

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0,$$
$$x(y_4 - y_5) - y(x_4 - x_5) + x_4y_5 - x_5y_4 = 0,$$

ou en abrégé

$$xX_{12} + yY_{12} + Z_{12} = 0, \quad xX_{45} + yY_{45} + Z_{45} = 0.$$

On en déduit les coordonnées de B_1 :

$$x' = \frac{-Z_{12}Y_{45} + Y_{12}Z_{45}}{X_{12}Y_{45} - Y_{12}X_{45}}, \quad y' = \frac{-X_{12}Z_{45} + Z_{12}X_{45}}{X_{12}Y_{45} - Y_{12}X_{45}}.$$

Des permutations tournantes des indices font connaître les coordonnées des points B_2, B_3. Enfin, la condition de la question s'exprime par l'équation

$$\Delta = 2S(X_{12}Y_{45} - Y_{12}X_{45})(X_{23}Y_{56} - Y_{23}X_{56})(X_{31}Y_{61} - Y_{31}X_{61}),$$

où Δ est le déterminant

$$\begin{vmatrix} Y_{12}Z_{45} - Z_{12}Y_{45} & Z_{12}X_{45} - X_{12}Z_{45} & X_{12}Y_{45} - Y_{12}X_{45} \\ Y_{23}Z_{56} - Z_{23}Y_{56} & Z_{23}X_{56} - X_{23}Z_{56} & X_{23}Y_{56} - Y_{23}X_{56} \\ Y_{31}Z_{61} - Z_{31}Y_{61} & Z_{31}X_{61} - X_{31}Z_{61} & X_{31}Y_{61} - Y_{31}X_{61} \end{vmatrix}.$$

Les quantités X_{56}, X_{61}, Y_{56}, Y_{61}, Z_{56}, Z_{61} sont du pr
x_6, y_6 ; comme elles n'entrent que dans les deux derniè
l'équation du lieu (A_6) est du second ordre.

Le déterminant Δ ne peut différer que par le signe ou par un facteur numérique du déterminant du 6e ordre

$$\left| x_1^2 \quad x_1 y_1 \quad y_1^2 \quad x_1 \quad y_1 \quad 1 \right|,$$

qui égalé à zéro, exprime que l'hexagone est inscrit à une conique.

II. Pour traiter la question par la géométrie, observons que le point B_1 est fixe et que les points B_2, B_3 doivent se mouvoir sur les droites A_2A_3, A_3A_4 de manière que l'aire du triangle $B_1B_2B_3$ reste constante (et de même sens). Or, lorsqu'on se donne le point B_2, le point B_3 est déterminé et réciproquement; donc les points B_2, B_3 décrivent des ponctuelles homographiques et la droite B_2B_3 enveloppe une conique tangente à A_2A_3, A_3A_4.

Les droites A_5B_2, A_1B_3 qui se correspondent dans deux faisceaux homographiques, se coupent constamment sur une conique passant par les points A_5, A_1.

Pour exprimer que l'aire $B_1B_2B_3$ reste constante, on peut écrire en représentant par α, β les distances de B_1 aux droites A_2A_3, A_3A_4 :

$$S = A_3B_3.B_1 + A_3B_1B_2 + A_3B_2B_3$$

ou

$$2S = A_3B_3.\beta + A_3B_2.\alpha - A_3B_3.A_3B_2 \sin A_2A_3A_4;$$

cette relation étant du premier degré par rapport à chacune des distances variables A_3B_3, A_3B_2, les points B_2B_3 se correspondent dans deux ponctuelles projectives.

III. Pour avoir une équation plus simple du lieu (A_6), rapportons la figure au triangle de référence $A_1A_3A_5$ et soient $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ les coordonnées des points A_2, A_4, A_6. Les équations des droites A_1A_2, A_3A_4 étant

$$\frac{y}{\beta_1} = \frac{z}{\gamma_1}, \quad \frac{x}{\alpha_2} = \frac{y}{\beta_2},$$

on peut prendre pour coordonnées de B_1 : $\alpha_2\beta_1$, $\beta_1\beta_2$, $\beta_2\gamma_1$.

De même, les coordonnées de B_2, B_3 sont : $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_1\beta_3$, $\alpha_3\gamma_1$; $\alpha_2\gamma_3$, $\beta_3\gamma_2$, $\gamma_2\gamma_3$. En les réduisant à des coordonnées barycentriques absolues et en observant que le rapport entre l'aire d'un triangle et celle du triangle de référence est égal au déterminant formé avec les coordonnées absolues des sommets du premier triangle, on trouve pour l'équation

cherchée

$$(\alpha_2\beta_1+\beta_1\beta_2+\beta_2\gamma_1)(\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\beta_3+\alpha_3\gamma_1)(\alpha_2\gamma_3+\beta_3\gamma_2+\gamma_2\gamma_3)$$
$$=K\begin{vmatrix}\alpha_2\beta_1 & \beta_1\beta_3 & \beta_2\gamma_1\\ \alpha_1\alpha_3 & \alpha_1\beta_3 & \alpha_3\gamma_1\\ \alpha_2\gamma_3 & \beta_3\gamma_2 & \gamma_2\gamma_3\end{vmatrix}.$$

×PROPOSITIONS SUR LES QUATRIÈMES PUISSANCES DES COTÉS D'UN TRIANGLE,

par M. J. Neuberg.

Les développements qui vont suivre, sont empruntés en très grande partie à trois articles de M. Eckhardt, qui ont paru dans la *Zeitschrift für mathematischen und naturwisschenschaftlichen Unterricht* (t. 34, p. 335; t. 35, p. 123; t. 36, p. 84).

1. Soit ABC un triangle quelconque. Menons les tangentes en B et C au cercle circonscrit O; ces droites rencontrent en D et E la parallèle à BC par A.

Le trapèze isoscèle DBCE jouit de propriétés assez curieuses. D'abord, il est composé de trois triangles ABC, ECA, DAB qui ont même hauteur et dont les deux derniers sont inversement semblables au premier, trois côtés homologues étant CA, AB, BC.

En exprimant que les côtés homologues sont proportionnels, on trouve

$$BD=CE=\frac{bc}{a},\quad AE=\frac{b^2}{a},\quad AD=\frac{c^2}{a}. \tag{1}$$

Nous avons ainsi une construction assez simple d'une quatrième proportionnelle aux trois côtés d'un triangle et d'une troisième proportionnelle à deux côtés.

2. Soient F, G les milieux des droites BD, CE. Les relations $DE=DA+AE$, $FG=\frac{1}{2}(BC+DE)$ donnent

$$b^2+c^2=a.DE,\quad a^2+b^2+c^2=2a.FG. \tag{2}$$

Si l'on applique le théorème de Ptolémée au quadrilatère inscriptible BCED, on trouve

$$\overline{BE}^2=\overline{BD}^2+BC.DE,\quad \text{d'où}\quad a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=a^2.\overline{BE}^2. \tag{3}$$

Les aires des triangles semblables ABC, ECA, DAB étant proportionnelles aux carrés des côtés homologues, on a

$$aire\ \text{BCED} = aire\ \text{ABC}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}.$$

Les rayons des cercles circonscrits au trapèze BCED et au triangle ABC sont entre eux comme les cordes BE, BC qui sous-tendent des angles égaux.

3. Désignons par M, N, P, O les milieux de BC, FG, DE et le centre du cercle ABC; les droites BE, CD se rencontrent en un point Q de la droite MNP. De l'égalité

$$\text{MQ} : \text{QP} = \text{BC} : \text{DE},$$

on déduit

$$\text{MQ} = \frac{a^2 h_a}{a^2+b^2+c^2}.$$

Il en résulte que Q est un sommet du premier triangle de Brocard de ABC.

Comme l'angle BAC = ADB = AEC, les circonférences circonscrites aux triangles ABD, ACE touchent respectivement AC, AB. Leur point d'intersection U est un sommet du second triangle de Brocard; car l'angle AUC = 180° — E = 180° — A, d'où

$$\text{UAC} + \text{UCA} = 180° - \text{AUC} = \text{A}, \quad \text{UCA} = \text{UAB};$$

donc les triangles UCA, UAB sont équiangles et U est le centre de similitude de deux figures directement semblables, construites sur CA et AB.

Les circonférences DAB, EAC rencontrent BC en des points X, Y tels, que

$$\overline{\text{CA}}^2 = \text{CB.CX}, \quad \overline{\text{BA}}^2 = \text{BC.BY};$$

par suite, $\text{CX} = \frac{b^2}{a} = \text{AE}$, $\text{BY} = \frac{c^2}{a} = \text{AD}$ et AX, AY sont parallèles à CE, BD.

4. Soient D', E' les points de rencontre de AB avec la circonférence (N, NF); on a

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(a.\text{D'E'})^2.$$

En effet, en ayant égard aux égalités (2) et (3), on trouve

$$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$
$$= (2a.FG)^2 - 2(a.BE)^2 = 16a^2.\overline{NF}^2 - 8a^2.\overline{MG}^2$$
$$= 8a^2(2\overline{NF}^2 - \overline{MN}^2 - \overline{NG}^2) = 8a^2(\overline{ND'}^2 - \overline{MN}^2) = 2(a.D'E')^2.$$

5. Supposons NB $\lesseqgtr$ NF et désignons par p la tangente menée au plus petit des cercles (N, NB), (N, NF) et limitée à l'autre cercle. On a

$$a^4 = b^4 + c^4 \mp 2(ap)^2.$$

En effet,

$$b^4 + c^4 - a^4 = (b^4 + c^4 + a^4) - 2a^4 = 8a^2(\overline{MD'}^2 - \overline{MB}^2)$$
$$= 8a^2(\overline{ND'}^2 - \overline{NB}^2) = \pm 2(ap)^2.$$

6. Si NB = NF, on a

$$a^4 = b^4 + c^4,$$

et le triangle ABC peut être appelé *pseudo-pythagoréen*.

Pour construire un tel triangle, donnons arbitrairement la base BC et prenons sur la médiatrice MP deux distances égales, MN = NP, et décrivons la circonférence (N, NB), qui coupe en F, G la parallèle menée par N à BC. Les perpendiculaires élevées en B sur BF et en C sur CG se coupent en un point O de MN qui sera le centre du cercle circonscrit au triangle cherché. La circonférence (O, OB) rencontre la parallèle à BC par P en deux points A A_1; on peut prendre pour le triangle cherché soit ABC, soit A_1BC.

Le point O peut encore s'obtenir par l'intersection des droites BG, CF. L'angle inscrit GBC vaut la moitié de l'angle au centre GNC qui est égal à NCB = NB ; donc BO est la bissectrice de l'angle NBC.

D'après cela, on peut se donner le côté BC et le centre circonscrit au triangle ABC; les symétriques de BC par rapport à BO et CO se coupent en N ; MN est la moitié de la hauteur du triangle cherché.

7. L'angle MBN = 2MBO = 2(90° — BOM) = 180° — 2A.

Soit h la hauteur AA′ du triangle ABC. Le triangle MNB donne

$$MN = MB \operatorname{tg} MBN = -MB \operatorname{tg} 2A, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tg} 2A = -\frac{h}{a}.$$

Comme $a = BA' + A'C = h(\cot B + \cot C)$, la dernière égalité donne

$$\cot 2A + \cot B + \cot C = 0;$$

ce résultat peut aussi se déduire de la relation $\sin^4 A = \sin^4 B + \sin^4 C$.

Voici quelques autres relations se rapportant au triangle pseudo-pythagoréen :

$$2\sin^2 A = \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C, \quad \operatorname{tg}\omega = \sin 2A, \quad S = -\frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg} 2A,$$

$$a^2 \cos A = -bc \cos 2A, \quad \cos 2A = -\frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2}, \quad \overline{BC}^2 = \overline{DA}^2 + \overline{AE}^2.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Œuvres de Laguerre, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par MM. Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché, membres de l'Institut. Tome I. Algèbre. Calcul intégral. Tome II. Géométrie. Paris, Gauthier-Villars, 1898, 1905 (Grand in-8° de XV-471 pp. et 721 pp.). Prix : 15+22 fr.

Edmond Laguerre naquit à Bar-le-Duc le 9 avril 1834; il entra à l'École polytechnique en 1853, puis devint officier d'artillerie. En 1864, il fut nommé répétiteur à l'École polytechnique, et à partir de cette époque, jusqu'à sa mort, il publia un grand nombre de notes et de mémoires substantiels et suggestifs sur toutes les parties de l'analyse et de la géométrie. Le 11 mai 1883, il fut nommé correspondant de l'Institut et peu après suppléant de Bertrand pour la physique mathématique. Il mourut à Bar-le-Duc le 14 août 1886.

Edmond Laguerre fut, en Mathématiques, un des esprits les plus originaux de notre temps. Il s'est successivement attaché aux sujets les plus variés et sur chacun d'eux il a répandu les idées les plus neuves et les plus fécondes, traçant des voies auxquelles nul avant lui n'avait songé.

Peu soucieux de la renommée, il a semé ses découvertes en une foule de courtes notes éparses en divers recueils, sans se préoccuper de faire ressortir aux yeux du public l'ampleur et l'unité de son œuvre.

En outre, sauf en ce qui concerne la doctrine des imaginaires, à laquelle il a, en 1870, consacré quelques conférences libres, il n'a jamais eu occasion d'exposer publiquement ses idées personnelles.

Cette double circonstance explique comment celles-ci sont loin de jouir de la notoriété que devrait leur valoir leur importance intrinsèque et comment des ouvrages didactiques, pourtant excellents, publiés sur les branches de la science qu'a le plus enrichies Laguerre, mentionnent à peine ses admirables travaux.

On peut donc affirmer que la réunion des œuvres de Laguerre réserve de véritables surprises au public mathématique qui se trouvera, pour la première fois, à même de les juger dans leur ensemble et d'en mesurer toute la portée.

Elles sont précédées d'une notice sur Laguerre due à M. Poincaré, (pp. V-XV) où il signale ses principaux travaux. En voici une liste sommaire forcément incomplète.

Analyse. Détermination du nombre des racines réelles d'une équation algébrique et calcul de ces racines. Extension du théorème de Rolle et du théorème de Descartes à certaines fonctions transcendantes entières. Théorie des fractions continues algébriques. Sur les systèmes linéaires, généralisa-

tion des clefs de Cauchy, des imaginaires de Galois. Partition des nombres. Covariants des formes binaires. Multiplication et transformation des fonctions elliptiques Potentiel des ellipsoïdes. Equations différentielles ou aux dérivées partielles.

Géométrie. Théorie des foyers (1853 : l'idée fondamentale de Laguerre, permet l'extension du principe de dualité aux relations métriques et est le vrai commencement de la géométrie cayleyenne). Courbes et surfaces anallagmatiques. Représentation des imaginaires en géométrie. Normales aux coniques et aux quadriques. Géométrie de direction (demi-droites). Application des fonctions elliptiques et hyperelliptiques à la géométrie; etc. etc.

« On ne saurait trop recommander la lecture de ce recueil des œuvres de Laguerre où rien n'est banal, où tout porte la marque de réflexions profondes, où les vues nouvelles abondent, où les applications les plus ingénieuses et les mieux choisies sont de nature à intéresser le lecteur et à lui suggérer de nouvelles recherches ». Très souvent d'ailleurs, *le point de départ de Laguerre est dans l'algèbre ou la géométrie élémentaire.* (P. M.)

I. **Carl Gustave Jacob Jacobi,** von Leo Königsberger. Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages mit einem Bildniss und dem Faksimile eines Briefs. Leipzig, Teubner, 1904 (cartonné, in-8 de XVIII-554 pp. Prix : 16 marcs.

2. **Carl Gustave Jacob Jacobi.** Rede zu der von dem internationalen Mathematiker-Kongress in Heidelberg veranstalsten Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages, gehalten am 9 August 1904, von Leo Königsberger. Mit einem Bildnis C. G. J. Jacobis. Leipzig, Teubner, 1904 (In-4 de 40 pages).

Jacobi est né à Postdam le 10 décembre 1804; il fut élève au gymnase de sa ville natale de 1816 à 1821; étudiant à l'Université de Berlin de 1821 à 1825; privat docent à cette Université pendant le semestre d'hiver de 1825-1826, à celle de Königsberg de Pâques 1826 à décembre 1827; professeur extraordinaire de décembre 1827 à juillet 1832, professeur ordinaire depuis cette date jusqu'à la fin de l'année académique 1844 à cette Université de Königsberg; membre de l'Académie des Sciences de Berlin et professeur extraordinaire à l'Université de Berlin, depuis octobre 1844 jusqu'à sa mort, le 18 février 1861.

Jacobi a trouvé à peu près en même temps qu'Abel la théorie de la transformation des fonctions elliptiques, ainsi que celle de la multiplication et de leur expression au moyen des fonctions thêta; il a exprimé au moyen de celles-ci les intégrales elliptiques de seconde et de troisième espèce; il a rattaché à la théorie des fonctions thêta des questions ardues de la théorie des nombres. Il a le premier effectué l'inversion des intégrales abéliennes, dans un cas simple. Il est l'auteur d'une nouvelle méthode pour intégrer les équations aux dérivées partielles du premier ordre. On lui doit en outre les travaux remarquables sur toutes les parties des mathématiques : théorie des nombres, algèbre, calcul différentiel, calcul intégral, équations différentielles, calcul des variations, géométrie analytique, géométrie infinitésimale, mécanique et mécanique céleste.

M. Königsberger donne l'histoire scientifique et l'histoire intime, familiale de Jacobi sous une forme détaillée et vivante dans l'ouvrage extrêmement instructif et intéressant qu'il lui a consacré, sous une forme condensée dans le beau discours de Heidelberg. La place du livre de M. Königsberger est dans toutes les bibliothèques qui contiennent les œuvres de Jacobi(*). (P. M.)

La Mécanique. Exposé historique et critique de son développement par E. Mach, professeur émérite de l'Université de Vienne, etc. Traduit sur la quatrième édition allemande par E. Bertrand, professeur à l'Ecole des Mines du Hainaut, etc., avec une introduction de E. Picard, membre de l'Institut. Paris, Hermann, 1904 (In-8° de IX-498 pp.). Prix : 15 francs.

Die Mechanik in ihrer Entwickelung, historisch-critisch dargestellt von Dr E. Mach, em. Professor an der Universität zu Wien. Fünfte verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig, Brockhaus, 1904. (Cartonné petit in-8° de XVI-562 pp.).

Il est impossible de donner une analyse détaillée du livre de M. Mach dans un recueil aussi élémentaire que *Mathesis*. Nous renvoyons donc au compte rendu substantiel que M. Duhem en a fait dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (2e série, 1903, t. XXVII, 1re partie, pp. 261-283) et reproduit dans la *Revue des Questions scientifiques* (1904, t. LV, pp. 193-218).

Nous nous contenterons de faire les remarques suivantes :

1. La conclusion fondamentale de M. Mach, au terme de son histoire critique du développement de la mécanique, est celle à laquelle M. Duhem est parvenu de son côté, depuis longtemps(**) : Les sciences physiques sont des exposés condensés et ordonnés des faits constatés expérimentalement et généralisés par induction; exposés où l'on montre comment on est arrivé historiquement aux postulats fondamentaux sur lesquels ces sciences reposent actuellement. Nous ajoutons que dans l'évolution historique des sciences de la nature, il ne faut pas oublier les conceptions métaphysiques qui ont souvent aidé les savants à deviner ces postulats(***).

(*) M. Königsberger croit que Jacobi a trouvé la célèbre relation $sn(ui, k) = iln(u, k')$ sans avoir connaissance de la relation équivalente d'Abel, $i\lambda(ui, c, e) = i\lambda(u, e, c)$. Nous n'en sommes pas certain, le journal de Crelle qui contient la relation d'Abel étant arrivé à Königsberg avant la fin de septembre 1827 (voir p. 50, 62, 68).

(**) Dans la *Revue des questions scientifiques*, t. XXI, XXXI, XXXIII, XXXIV, XXXVI, XL, XLII, XLIV, XLVII, XLIX, L, et dans d'autres recueils. Il a exposé systématiquement l'ensemble de ses vues sur la matière, dans l'ouvrage intitulé : *La théorie physique, son objet et sa structure*. Paris, Chevalier et Rivière, 1906. In 8° de 450 pp.

(***) Même une théorie fausse en général, comme l'astrologie ou l'alchimie, peut avoir une influence utile, grâce à la part de vérité qu'elle contient. Ainsi, au 17e siècle, les astrologues ont défendu avec raison l'explication des marées par l'action de la lune, contre Galilée, qui voulait en faire une suite (et une preuve, la seule, selon lui) du mouvement de rotation et de révolution de la terre.

2. L'histoire de la mécanique, telle que l'expose M. Mach, est fortement simplifiée, en vue de conduire le lecteur, à peu près en ligne droite, au point de vue moderne sous laquelle cette science est actuellement considérée, ou plus exactement au point de vue de l'auteur. Dans une édition ultérieure, il y aura lieu évidemment de tenir compte des deux ouvrages de M. Duhem : *L'évolution de la Mécanique* (Paris, Hermann, 1903). *Les origines de la statique*, tome I (Paris, Hermann, 1905; in-8° de 360 pp.).

3. Quand l'auteur touche à la métaphysique (surtout au § 2 du ch. IV), il se place à un point de vue subjectif, quelque peu étroit et exclusif. Il semble ne pas comprendre les savants qu'il combat, Euler, par exemple, le seul esprit vraiment encyclopédiste du dix-huitième siècle. Il oublie que *c'est un fait* que jusqu'à présent, et surtout au XIX° siècle, des hommes illustres, des inventeurs, Ampère, Faraday, Pasteur, par exemple, sont aussi loin que possible des opinions négatives qui semblent être les siennes en métaphysique, et que cela n'a nui en rien à leur perspicacité scientifique.

4. Ces défauts du livre de M. Mach n'empêchent pas qu'il ne soit très intéressant et très instructif. Aussi a-t-il été accueilli par le public instruit avec faveur. La première édition allemande est de 1883; la seconde de 1887; la troisième de 1897; la quatrième de 1901. Dans la cinquième, l'auteur a tenu compte, dans une certaine mesure, de diverses critiques allemandes, de quelques travaux sur le principe de l'inertie et de récents écrits français sur la méthode en mécanique (de MM. Lechalas, Picard, Poincaré et surtout de M. Duhem).

5. Il n'est peut être pas inutile de remarquer, au point de vue historique, que la méthode déductive d'exposition des sciences physiques à partir des postulats, à laquelle on revient peu à peu sous l'influence des idées de MM. Mach et Duhem, est analogue à celle que l'on trouve chez les anciens, Euclide, Archimède, Ptolémée, et chez les modernes, Copernic, Stevin, Newton, avant que la philosophie terre à terre de Bacon et de Locke eût conquis une influence sérieuse. Mais les anciens ne laissaient en général, dans leurs livres, aucune trace du processus historique qui les avait conduits à admettre leurs postulats fondamentaux. (P. M.).

Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904. Herausgegeben von Dr A. Krazer, Professor an der technischen Hochschule Karlsrühe i. B. Leipzig, Teubner, 1905. (Cartonné in-8°, de x-756 pp.). Prix : 18 marcs.

Sommaire. I. Chronique du congrès (pp. 1-56). II. Communications scientifiques (pp. 57-756). III. Exposition de modèles mathématiques (pp. 717-755). Préface, table et index (I-X, 756). Soixante neuf géomètres ont fait au congrès 80 communications plus ou moins étendues, 53 en allemand, 18 en français, 7 en anglais, 2 en italien. Citons en quelques unes : *Königsberger.* Discours sur la vie et les travaux de Jacobi. *Painlevé.* Le problème moderne de l'intégration des équations différentielles. *Segre.* La géométrie actuelle et ses relations avec l'analyse. *Hilbert.* Sur les principes de la logique et de l'arithmétique. *G. Loria.* Sur l'histoire de la géométrie analytique, etc., etc. Nous publierons dans

Mathesis quelques extraits du savant recueil des travaux du congrès mathématique de Heidelberg; ils donneront une idée plus précise à nos lecteurs de ce qui y a été fait, au moins dans l'une des sections, celle d'histoire des mathématiques.

En tête du volume, on trouve une très belle vue de Heidelberg en héliogravure. La chronique du Congrès prouve qu'il a parfaitement réussi, mieux que le second (à Paris, en 1900) et même que le premier (à Zurich, en 1897).

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Édition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de J. Molk, professeur à l'Université de Nancy. Tome I, volume I, Fascicule 1. Paris, Gauthier-Villars; Leipzig, Teubner, 1904 (10 août). In-8 de 160 pages. Prix : 5 francs.

L'édition française de l'encyclopédie mathématique est, en réalité, une seconde édition de cet ouvrage si remarquable et si utile. Elle sera publiée en cinquante livraisons environ, de 10 feuilles grand in-8. Le prix de la livraison sera de 50 centimes par feuille de 16 pages. La première livraison contient: 1. Les principes fondamentaux de l'arithmétique par H. Schubert, J. Tannery et J. Molk. 2. L'analyse combinatoire et la théorie des déterminants par E. Netto et H. Vogt. 3. La théorie des nombres irrationnels et des limites, par A. Pringsheim et J. Molk (inachevé; la suite paraîtra dans la livraison suivante).

Nous recommandons chaleureusement ce premier fascicule à ceux qui veulent connaître, sous une forme claire et précise, les résultats acquis et l'histoire ou la bibliographie des recherches relatives aux trois sujets qui y sont abordés.

(P. M.).

La librairie Gauthier-Villars (55, quai des Grands Augustins) vient de publier, comme chaque année, l'**Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1906.** — Ce petit volume compact contient, comme toujours, une foule de renseignements indispensables à l'ingénieur et à l'homme de Science. Cette année, nous signalons tout spécialement la Notice de M. G. Bigourdan : **Les éclipses de Soleil.** *Instructions sommaires sur les observations que l'on peut faire pendant ces éclipses.* In-16 de près de 900 pages avec figures : fr. 1,50 (franco, fr. 1,85).

Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte gesammelt und herausgegeben von Dr. W. Ahrens in Magdeburg. Leipzig, Teubner, 1904 (cartonné, in-8 de X-522 pp.). Prix : 8 marcs.

Recueil extrêmement intéressant et instructif de pensées sur les mathématiques, les mathématiciens et leur histoire, beaucoup signées des plus grands noms de la science, surtout de la science allemande. C'est un vrai complément de toutes les histoires des mathématiques, que personne ne regrettera d'avoir mis dans sa bibliothèque. Chaque citation est faite dans la langue originale et

est accompagnée de références exactes. Deux passages malheureux (en français) qui n'ont rien à voir avec les mathématiques ni avec les mathématiciens, empêchent que, de ce côté du Rhin, on puisse laisser le livre entre de jeunes mains. (P. M.).

×NOTES MATHÉMATIQUES.

35. *Problème des pandectes et variantes.* M. Dressler, professeur à Dresde-Plauen a publié dans les *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften*, XI, pp. 81-85, les différentes formes d'un même problème qu'il a rencontrées dans les principaux recueils allemands. Nous résumons cet article.

1. A un repas commun, Caius fournit 7 plats, Sempronius 8; survient Titus qui, partageant avec eux le repas, remet à Caius 14 écus, à Sempronius 16. Ce dernier réclame contre cette répartition et défère la question au juge. Quel doit être le jugement?

C'est cette finale qui a valu au problème la dénomination de problème des pandectes.

2. Trois garçons ont respectivement 17, 14 et 11 prunes. Ils les mangent avec un quatrième garçon, qui leur remet 42 noix. Comment doit se faire le partage de ces noix?

3. A possède 5 pommes, B en a 7. C mange avec eux ces pommes et leur remet 12 noix. Comment doivent-ils se partager ces noix ?

4. Deux arabes voyageant ensemble avaient encore pour toute nourriture le premier trois figues, le second cinq figues. Ils rencontrent un étranger qui se traîne misérablement et leur demande de partager avec lui leurs provisions; ce qu'ils font. Ils rencontrent plus loin une caravane dont le chef veut récompenser leur bonne action en leur remettant 80 écus. Comment les deux arabes doivent-ils se partager cette somme?

5. Deux cultivateurs A et B ont respectivement 4 et 3 arpents de terre qu'ils labourent ensemble. Pour en finir plus vite, ils s'adjoignent un ouvrier C qui demande 7 écus. On demande ce que chacun d'eux doit payer à C.

6. A et B creusent ensemble un fossé qui traverse la propriété de A sur une longueur de 120 mètres, celle de B sur une longueur de 90 mètres. Ils se sont fait aider par un ouvrier qui réclame 7 écus Combien chacun d'eux doit-il payer à l'ouvrier?

7. Trois voyageurs A, B, C se rencontrent dans une forêt et mettent en commun leurs provisions. A possède quatre petits pains, B trois, C un; survient un quatrième voyageur qui partage avec eux ces provisions et leur remet quarante centimes pour sa part. Faites le partage de cette somme entre A, B et C.

8. Cinq personnes A, B, C, D, E utilisent ensemble un même atelier pour le chauffage duquel A, B, C, D ont fourni respectivement 9, 6, 3 et 2 sacs de charbon. E paye pour sa part 4 fr. Comment A, B, C, D doivent ils se partager cette somme?

26. *Un théorème chinois de géométrie.* M. Y. Mikami a envoyé de Tokyo, à la date du 29 mars 1905, à M. Gutzmer un théorème assez curieux qu'un mathématicien chinois avait proposé à un de ses amis. Une démonstration de ce théorème par M. Mikami vient de paraître dans le *Archiv der Mathematik und Physik*, (3) IX; nous allons la reproduire avec quelques légères modifications.

1. Si R et r désignent les rayons du cercle circonscrit et du cercle inscrit au triangle ABC, une formule connue donne

$$r = 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}. \qquad (1)$$

2. Soit ABCD un quadrilatère convexe inscrit dans une circonférence de centre O; appelons 2α, 2β, 2γ, 2δ les arcs moindres qu'une demi-circonférence sous-tendus par les cordes AB, BC, CD, DA, et r_a, r_b, r_c, r_d les rayons des cercles inscrits aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC. On a

$$r_a + r_c = r_b + r_d. \qquad (2)$$

En effet, d'après la formule (1)

$$r_a = 4R \sin\beta \sin\gamma \sin(\alpha + \delta), \quad r_c = 4R \sin\alpha \sin\delta \sin(\beta + \gamma),$$

d'où l'on déduit

$$r_a + r_c = 4R\Sigma \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \cos\delta.$$

De la symétrie du second membre on conclut aisément la relation (2).

3. Considérons maintenant un polygone $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ inscrit dans un cercle, et appelons S_r la somme des rayons des cercles inscrits aux triangles qui ont pour sommet commun le point A_r et pour côtés opposés les côtés du polygone à l'exception de ceux qui aboutissent en A_r. Il faut démontrer que

$$S_1 = S_2 = S_3 = \cdots = S_n.$$

En effet, si les sommes S_1, S_r sont égales dans le polygone $A_1A_2 \dots A_r \dots A_nA_1$, les sommes analogues S'_1, S'_r dans le polygone $A_1A_2 \dots A_r \dots A_nA_{n+1}A_1$ sont encore égales. En effet

$$S'_1 = S_1 + r_1, \quad S'_r = S_r + r_2 + r_3 - r_4,$$

r_1, r_2, r_3, r_4 désignant les rayons des cercles inscrits aux triangles $A_1A_nA_{n+1}$, $A_rA_nA_{n+1}$, $A_rA_{n+1}A_1$, $A_rA_nA_1$. Or, dans le quadrilatère $A_rA_nA_{n+1}A_1$ on a $r_1 + r_4 = r_2 + r_3$, et par hypothèse $S_1 = S_r$; par conséquent $S'_1 = S'_r$. (J. N.)

Mathesis **publiera plus tard une démonstration géométrique du n° 2.**

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1453.

(Voir *Mathesis*, (3); IV, p. 32).

Les pieds des normales abaissées d'un même point à une conique sont les sommets d'un quadrangle d'Apollonius (*dénomination proposée par* M. BRICARD, NAM, septembre 1903).

Pour qu'un quadrangle donné ABCD *soit un quadrangle d'Apollonius, il faut et il suffit que l'hyperbole équilatère circonscrite passe par le symétrique de son centre par rapport au centre des moyennes distances des points* A, B, C, D.

Les trois sommets A, B, C *restant fixes, trouver le lieu décrit par le quatrième sommet* D. (J. NEUBERG).

Solution partielle par M. E. BASTIN. Soit

$$E \equiv a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$$

l'équation d'une ellipse donnée. Les points d'incidence des normales menées d'un point $P(\alpha, \beta)$ à cette courbe sont situés sur l'hyperbole équilatère

$$H \equiv c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0.$$

L'élimination de y entre les équations $E = 0$, $H = 0$ conduit à l'équation aux abcisses des points d'incidence

$$b^2c^4x^4 - 2a^2b^2c^2\alpha x^3 \dots = 0.$$

Les coordonnées du centre G des moyennes distances de ces points sont donc

$$x_1 = \frac{a^2\alpha}{2c^2}, \quad y_1 = -\frac{b^2\beta}{2c^2}.$$

D'autre part, celles du centre O′ de H sont

$$x' = \frac{a^2\alpha}{c^2} = 2x_1, \quad y' = -\frac{b^2\beta}{c^2} = 2y_1.$$

Donc O′ est le symétrique de l'origine O des coordonnées par rapport à G, et comme H passe par O, la condition énoncée est nécessaire.

2. Démontrons maintenant que cette condition est suffisante.

A cet effet, considérons sur l'hyperbole équilatère $H \equiv xy - 1 = 0$ quatre points $A\left(a, \frac{1}{a}\right)$, $B\left(b, \frac{1}{b}\right)$, $C\left(c, \frac{1}{c}\right)$, $D\left(d, \frac{1}{d}\right)$. Les équations des droites AB, BC,... seront

$$d_1 \equiv x + aby - (a + b) = 0, \quad \ldots$$

Toute conique Σ circonscrite au quadrangle ABCD peut être représentée par l'équation

$$d_1 d_3 + \lambda d_2 d_4 = 0. \tag{1}$$

Si les axes de cette courbe sont parallèles aux asymptotes de H, le coefficient de xy de son équation est nul ; d'où

$$\lambda = -\frac{ab + cd}{bc + da}.$$

L'équation (1), développée et divisée par $1 + \lambda$, devient

$$x^2 + abcdy^2 - x\Sigma a - y\Sigma abc \ldots = 0. \tag{2}$$

Exprimons que le symétrique du centre de H par rapport au centre des moyennes distances des points A, B, C, D est situé sur H ; nous aurons

$$\Sigma a \; \Sigma abc = 4abcd. \tag{3}$$

Observons aussi que ce symétrique est précisément le centre de la conique (2).

Cela posé, le coefficient angulaire de la normale en A à la courbe (2) est, eu égard à la relation (3),

$$\frac{2bcd - \Sigma abc}{2a - \Sigma a} = -\frac{2bcd}{\Sigma a}.$$

L'équation de la normale sera donc

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{2bcd}{\Sigma a}(x - a)$$

ou

$$ay\Sigma a + 2abcdx = \Sigma a + a^2bcd.$$

Elle admet la solution

$$y = \frac{2abcd}{\Sigma a}, \quad x = \frac{\Sigma a}{2abcd}, \tag{4}$$

dont la symétrie montre que les quatre normales en A, B, C, D à Σ passent par le point (4).

NOTE. La première partie de la question peut être énoncée ainsi : Le centre de l'hyperbole équilatère circonscrite à un quadrangle d'Apollonius ABCD et le centre de la conique circonscrite dont les normales en A, B, C, D concourent en un même point, sont diamétralement opposés sur la conique des neuf points du quadrangle.

La dernière partie de la question est loin d'être nouvelle ; nous en ferons l'historique et la traiterons dans un article spécial. (J. N.).

Question 1487.

(Voir *Mathesis*, (3); IV, p. 216).

Les tangentes aux points A', B', C' *d'un parabole* P *forment un nouveau triangle* ABC ; *soit* Q *le point de concours des droites* AA', BB', CC'. *Lorsque le point* Q *est fixe, le centre de gravité* G *du triangle* ABC *décrit une droite, et l'ellipse qui est circonscrite*(*) *au triangle* ABC *et a pour centre* G *passe constamment par* Q *et reste homothétique à elle-même.*

(STEINER.)

Solution analytique par M. P. BASTIN. 1. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des points A', B', C'. Les tangentes en ces points ont pour équations

$$t_1 \equiv 2px - 2yy_1 + y_1^2 = 0, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 0.$$

La droite AA' a une équation de la forme $t_2 + mt_3 = 0$; en exprimant qu'elle passe par A' on trouve m et par suite l'équation de AA' est

$$(y_3 - y_1)^2 t_2 = (y_1 - y_2)^2 t_3.$$

On voit immédiatement que les droites AA', BB', CC' se coupent en un point Q qui satisfait aux égalités

$$(y_2 - y_3)^2 t_1 = (y_3 - y_1)^2 t_2 = (y_1 - y_2)^2 t_3. \tag{1}$$

(*) La question 1487 se trouve dans les *Œuvres de Steiner*, t. I, p. 208 et les *Annales de Gergonne*, XIX. Une erreur s'était glissée dans la transcription de l'énoncé (*inscrite* pour *circonscrite*). (J. N.)

Si les quantités x, y restent fixes, les équations (1) définissent une infinité de triples de points A'B'C' de la parabole qui admettent le même point Q. Un point d'un tel triple peut être pris arbitrairement et il détermine complètement les deux autres.

Pour trouver les équations des droites AA', BB', CC', nous pouvons d'abord chercher les coordonnées des points A, B, C en résolvant les équations $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, $t_3 = 0$ deux à deux, ce qui donne

$$A\left(\frac{y_2y_3}{2p}, \frac{y_2+y_3}{2}\right), \quad B\left(\frac{y_3y_1}{2p}, \frac{y_3+y_1}{2}\right), \quad C\left(\frac{y_1y_2}{2p}, \frac{y_1+y_2}{2}\right);$$

puis écrire les équations des droites joignant ces points aux points A', B', C'. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
2px(y_2+y_3-2y_1)+2y(y_1^2-y_2y_3) &= y_1(y_1y_2+y_1y_3-2y_2y_3),\\
2px(y_3+y_1-2y_2)+2y(y_2^2-y_3y_1) &= y_2(y_2y_3+y_2y_1-2y_1y_3),\\
2px(y_1+y_2-2y_3)+2y(y_3^2-y_1y_2) &= y_3(y_3y_1+y_3y_2-2y_1y_2).
\end{aligned}$$

Ces trois équations doivent se réduire à deux. Pour en tirer deux relations symétriques en y_1, y_2, y_3, nous les additionnons membre à membre, puis combinons deux d'entre elles par soustraction, ce qui donne

$$2y(\Sigma y_1^2 - \Sigma y_2y_3) = \Sigma y_1^2y_2 - 6y_1y_2y_3, \tag{2}$$

$$6px - 2y\Sigma y_1 + \Sigma y_1y_2 = 0. \tag{3}$$

Les équations (2) et (3) définissent les triples A'B'C' qui correspondent à un même point Q (x, y) La dernière s'interprète très simplement; les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC étant

$$\alpha = \frac{\Sigma y_2y_3}{6p}, \quad \beta = \frac{\Sigma y_1}{3},$$

l'équation (3) revient à $\beta y - p(x+x) = 0$. On en conclut que G décrit la polaire de Q par rapport à la parabole.

2. L'ellipse qui passe par A, B, C et a pour centre G peut être représentée par l'équation

$$L_1t_2t_1 + L_2t_3t_1 + L_3t_1t_2 = 0$$

ou

$$\Sigma L_1(2px - 2yy_1 + y_2^2)(2px - 2yy_3 + y_3^2) = 0,$$

pourvu que le point x, y) vérifie les équations du centre qui sont

$$\Sigma L_1(t_2+t_3) = 0, \quad \Sigma L_1(y_2t_3 + y_3t_2) = 0.$$

Or, pour $x=\frac{\Sigma y_2 y_3}{6p}$, $y=\frac{\Sigma y_1}{3}$, on trouve

$$t_1=\tfrac{1}{3}(y_1-y_2)(y_1-y_3),\quad t_2=\tfrac{1}{3}(y_2-y_1)(y_2-y_3),$$
$$t_1+t_2=\tfrac{1}{3}(y_1-y_2)^2,\quad y_1t_2+y_2t_1=\tfrac{1}{3}y_3(y_1-y_2)^2;$$

par conséquent

$$\Sigma L_1(y_2-y_3)^2=0,\quad \Sigma L_1y_1(y_2-y_3)^2=0,$$

et les coefficients L_1, L_2, L_3 sont inversement proportionnels aux différences y_2-y_3, y_3-y_1, y_1-y_2.

L'équation de l'ellipse est donc définitivement

$$\Sigma(y_1-y_2)(y_1-y_3)(2px-2yy_2+y_2^2)(2px-2yy_3+y_3^2)=0.$$

Appelons A, B, C les coefficients de x^2, xy, y^2; nous aurons

$$A=4p^2(\Sigma y_1^2-\Sigma y_1y_2),\quad B=-4p(\Sigma y_1^2y_2-6y_1y_2y_3)$$
$$C=4(\Sigma y_2^2y_3^2-y_1y_2y_3\Sigma y_1).$$

D'autre part, les équations (2) et (3) donnent pour les coordonnées de Q

$$Y=\frac{\Sigma y_1^2y_2-6y_1y_2y_3}{2(\Sigma y_1^2-\Sigma y_1y_2)},\quad X=\frac{\Sigma y_1^2y_2^2-y_1y_2y_3\Sigma y_1}{2p(\Sigma y_1^2-\Sigma y_2y_3)};$$

il en résulte

$$\frac{B}{A}=-\frac{2Y}{p},\quad \frac{C}{A}=\frac{2X}{p}.$$

Comme ces rapports ne dépendent que du point Q, l'ellipse est toujours homothétique à elle-même.

D'après les équations (1), les valeurs de t_1, t_2, t_3 au point Q sont inversement proportionnelles à $(y_2-y_3)^2$, $(y_3-y_1)^2$, $(y_1-y_2)^2$; on constate facilement qu'elles vérifient l'équation de l'ellipse.

Solution synthétique par M. Cl. Servais, voir *Mathesis*, p. 91.

×Question 1514.

(Voir *Mathesis*, (3), V, p. 110).

Pour toute valeur entière de n, le nombre

$$m^n-(m-1)n-1$$

est divisible par $(m-1)^2$; le nombre

$$m^n+(m+1)n-1$$

si n est pair ou le nombre

$$m^n - (m+1)n + 1$$

si n est impair, par $(m+1)^2$. (E. Barbette).

Solution par MM. Abramescu, Barisien, Dupont, Godeaux (Ath), Claro Allué (Saragosse), Plakhowo, Prange et Ch. Brignon (Epinal). Le quotient de $m^n - 1 - (m-1)n$ par $m-1$ étant $m^{n-1} + m^{n-2} + \cdots + 1 - n$, on voit que si l'on fait $m = 1$, on obtient un résultat identiquement nul.

De même, si n est pair, le quotient de $m^n - 1 + (m+1)n$ par $m+1$ est $m^{n-1} - m^{n-2} + \cdots - 1 + n$, nombre qui à son tour s'annule pour $m = -1$.

Enfin, si n est impair $m^n + 1 - (m+1)n$ divisé par $m+1$ donne pour quotient $m^{n-1} - m^{n-2} + \cdots + 1 - n$, nombre qui lui-même se réduit à zéro, quand on y fait $m = -1$.

Note. Le passage de n à $n+1$ donne la solution la plus naturelle de toutes les questions de ce genre.

M. Demeyer (Gand) remplace m^n respectivement par les développements de $[(m-1)+1]^n$ et de $[(m+1)-1]^n$ d'après la formule de binôme, ce qui fait apparaître immédiatement le facteur $(m-1)^2$ ou $(m+1)^2$.

×Question 1515.

(Voir *Mathesis*, (3), V, p. 84).

Soient d, d_a, d_b, d_c *les distances d'un point quelconque* M *du plan du triangle* ABC *aux centres* I, I_a, I_b, I_c *des cercles tritangents. Démontrer la relation*

$$\frac{d_a^2}{r_a} + \frac{d_b^2}{r_b} + \frac{d_c^2}{r_c} - \frac{d^2}{r} = 8R,$$

R *désignant le rayon du cercle circonscrit et* r, r_a, r_b, r_c *les rayons des cercles tritangents.* (Verraart).

Solution par MM Fr. Dupont et Delahaye. Soit $MC = \delta$. En appliquant le théorème de Stewart aux triangles MI_aI_b, MI_cC on trouve

$$d_a^2 . CI_b + d_b^2 . CI_a = \delta^2 . I_aI_b + I_aI_b . CI_a . CI_b, \qquad (1)$$

$$d_c^2 . CI + \delta^2 . II_c = d^2\, CI_c + CI_c\, II_c . IC. \qquad (2)$$

Observons que

$$CI_a = \frac{r_a}{\cos\frac{1}{2}C}, \quad CI_b = \frac{r_b}{\cos\frac{1}{2}C}, \quad CI_c = \frac{r_c}{\sin\frac{1}{2}C}, \quad CI = \frac{r}{\sin\frac{1}{2}C};$$

les égalités (1) et (2) pourront prendre la forme

$$\frac{d_a^2}{r_a}+\frac{d_b^2}{r_b}=\partial^2\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)+\frac{I_aI_b}{\cos\frac{1}{2}C},$$

$$\frac{d_c^2}{r_c}+\partial^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c}\right)=\frac{d^2}{r}+\frac{II_c}{\sin\frac{1}{2}C}.$$

En additionnant ces égalités, ∂^2 s'élimine en vertu de la relation $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$, et il reste

$$\frac{d_a^2}{r_a}+\frac{d_b^2}{r_b}+\frac{d_c^2}{r_c}-\frac{d^2}{r}=\frac{I_aI_b}{\cos\frac{1}{2}C}+\frac{II_c}{\sin\frac{1}{2}C}. \qquad (3)$$

I étant l'orthocentre du triangle $I_aI_bI_c$ dont les angles sont égaux à $90°-\frac{1}{2}A$, $90°-\frac{1}{2}B$, $90°-\frac{1}{2}C$ et dont le rayon du cercle circonscrit est égal à 2R, on a

$$\frac{I_aI_b}{\cos\frac{1}{2}C}=4R, \quad \frac{II_c}{\sin\frac{1}{2}C}=4R;$$

donc le second membre de (3) est égal à 8R.

Solution analogue par M. N. Demeyer (Gand).

MM. Abramescu et Droz-Farny ont résolu la même question par la géométrie analytique.

Si l'on retranche de l'égalité de M. Verkaart celle de Bobillier : $r_a+r_b+r_c-r=4R$, on trouve

$$\frac{P_a}{r_a}+\frac{P_b}{r_b}+\frac{P_c}{r_c}-\frac{P}{r}=4R,$$

où P_a, P_b, P_c, P sont les puissances de P par rapport aux cercles tritangents (Droz-Farny).

Question 1534 (*).

(Voir *Mathesis*, (3), V; p. 2).

Trouver les formules de transformation les plus générales

$$x_1=f_1(x, y),\ y_1=\varphi(x, y),$$

qui changent une courbe quelconque Δ_1 *en une autre courbe* Δ *telle, que*

(*) La question 1534 nous a été suggérée par des questions analogues sur les sous-tangentes et sur les sous-normales que M. Haton de la Goupillière a proposées dans les NAM, 1867, p. 141 et qui ont été résolues dans ce journal, 1868, p. 318

La solution de M. Sterckens est plus rapide parce qu'elle s'appuie sur

si la tangente en un point quelconque M_1 *de* Δ_1 *coupe l'axe* Ox *en* T *et que la normale au point correspondant* M *de* Δ *coupe l'axe* Oy *en* N, *le rapport* OT : ON *ait une valeur constante* k. (J. NEUBERG).

Solution par M. STERCKENS. En désignant par y', y_1' les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy_1}{dx_1}$, on a la condition

$$x_1 - \frac{y_1}{y_1'} = k\left(y + \frac{x}{y'}\right). \tag{1}$$

Or,

$$dx_1 = \frac{dx_1}{dx}dx + \frac{dx_1}{dy}dy, \quad dy_1 = \frac{dy_1}{dx}dx + \frac{dy_1}{dy}dy,$$

d'où

$$y_1' = \left(\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_1}{dy}y'\right) : \left(\frac{dx_1}{dx} + \frac{dx_1}{dy}y'\right).$$

L'égalité (1) peut donc s'écrire

$$y'x_1\left(\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_1}{dy}y'\right) - y'y_1\left(\frac{dx_1}{dx} + \frac{dx_1}{dy}y'\right) =$$
$$k(yy' + x)\left(\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_1}{dy}y'\right).$$

Elle doit avoir lieu quelle que soit la courbe Δ et par suite pour toutes les valeurs de y' ; donc elle se décompose en trois autres :

$$\frac{dy_1}{dx} = 0, \quad (2); \quad y_1\frac{dx_1}{dx} + kx\frac{dy_1}{dy} = 0, \tag{3}$$

$$x_1\frac{dy_1}{dy} - y_1\frac{dx_1}{dy} - ky\frac{dy_1}{dy} = 0. \tag{4}$$

La relation (2) montre que y_1 est fonction de y seulement. En éliminant $\frac{dy_1}{dy}$ entre (3) et (4) on trouve l'équation aux dérivées partielles de x_1 :

$$(x_1 - ky)\frac{dx_1}{dx} + kx\frac{dx_1}{dy} = 0. \tag{5}$$

---

l'intégration des équations aux dérivées partielles; celle de M. G. LORIA emploie des moyens qui méritent également de fixer l'attention.

Dans le but d'abréger ou d'être plus clair, nous avons légèrement modifié les rédactions de ces deux solutions. Les notations primitives ont été changées pour la facilité de l'impression. (J. N.)

Pour l'intégrer, nous posons le système différentiel

$$\frac{dx}{x_1 - ky} = \frac{dy}{kx} = \frac{dx_1}{0},$$

ou

$$dx_1 = 0, \quad k(xdx + ydy) = x_1 dy;$$

le système intégral correspondant est

$$x_1 = \alpha, \quad \alpha y = \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \beta.$$

L'intégrale générale de (5) s'obtient en égalant β à une fonction arbitraire de α; elle est donc

$$x_1 y = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + F(x_1) \tag{6}$$

On en déduit

$$y\frac{dx_1}{dx} = kx + F'(x_1)\frac{dx_1}{dx}. \tag{7}$$

En éliminant $\frac{dx_1}{dx}$ entre (3) et (7) on trouve

$$\frac{\frac{dy_1}{dy}y + y_1}{\frac{dy_1}{dy}} = F'(x_1). \tag{8}$$

Comme y_1 ne dépend que de y et $F'(x_1)$ de x_1, x_1 étant fonction de x et y, les deux membres de (8) doivent être égaux à une même constante $-c_0$. Ainsi.

$$F'(x_1) = -c_0, \quad \frac{dy_1}{dy}y + y_1 = -c_0\frac{dy_1}{dy},$$

d'où

$$F(x_1) = c_1 - c_0 x_1, \quad y_1 = \frac{c_2}{y + c_0}.$$

Remplaçons dans (6) $F(x_1)$ par $c_1 - c_0 x_1$ et résolvons ensuite par rapport à x_1; nous aurons définitivement

$$x_1 = \frac{c_1 + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)}{y + c_0}, \quad y_1 = \frac{c_2}{y + c_0}.$$

Solution par M. Gino Loria, professeur à la Faculté des Sciences de Gênes. La condition du problème donne

$$x_1 - y_1 \frac{dx_1}{dy_1} = k\frac{yy' + x}{y'},$$

ou en vertu des formules de transformation

$$y'f(x, y)(\varphi'_x + \varphi'_y y') - y'\varphi(x, y)(f'_x + f'_y y') = k(yy' + x)(\varphi'_x + \varphi'_y y').$$

Elle doit être identique par rapport à y'; donc le coefficient de y'^2, celui de y' et le terme indépendant sont séparément nuls. En égalant à zéro le terme indépendant, on obtient $\varphi'_x = 0$, de sorte que φ est une fonction de y seulement; nous écrirons donc $\varphi(y)$ au lieu de $\varphi(x, y)$. Ensuite

$$f(x, y)\varphi'(y) - \varphi(y)f'_y = ky\varphi'(y), \tag{1}$$

$$-\varphi(y)f'_x = kx\varphi'(y). \tag{2}$$

Ce système peut s'écrire

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \frac{f'_y}{f(x, y) - ky} = -\frac{f'x}{kx},$$

où en posant $\varphi'(y) : \varphi(y) = \Psi(y)$:

$$f'_x = -kx\Psi(y), \quad (3); \quad f'_y = (f - ky)\Psi(y), \quad (4);$$

on en déduit

$$f''_{x,y} = -kx\Psi'(y), \quad f''_{y,x} = f'_x\Psi(y) = -kx\Psi^2(y);$$

d'où successivement

$$\frac{\Psi'(y)}{\Psi^2(y)} = 1, \quad -\frac{1}{\Psi(y)} = y - a, \quad \Psi(y) = -\frac{1}{a - y},$$

a étant une constante. Par conséquent,

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \frac{1}{a - y}, \quad \varphi(y) = \frac{b}{y - a}. \tag{5}$$

Les équations (3) et (4) deviennent

$$f'_x = \frac{kx}{y - a}, \quad (6); \quad f'_y = \frac{ky - f(x, y)}{y - a}. \tag{7}$$

De (6) on conclut

$$f(x, y) = \frac{kx^2}{2(y - a)} + F(y). \tag{8}$$

$F(y)$ qui tient lieu de constante d'intégration se détermine au moyen de (7); on trouve en remplaçant $f(x, y)$ par la valeur (8) :

$$(y - a)F'(y) + F(y) = ky. \tag{9}$$

L'intégration de (9) donne

$$(y-a)\mathrm{F}(y) = \tfrac{1}{2}ky^2 + \tfrac{1}{2}c. \qquad (10)$$

De (5), (8) et (10) on conclut que les formules cherchées sont

$$x_1 = \frac{k(x^2+y^2)+c}{2(y-a)}, \quad y_1 = \frac{b}{y-a}.$$

La transformation est algébrique ; à un point de Δ correspond un seul point de Δ_1, mais à un point de Δ_1 correspondent sur Δ deux points qui sont symétriques par rapport à Oy. Si le point (x_1, y_1) décrit une droite non parallèle à l'axe Ox, le point (x, y) décrit une circonférence.

Solution partielle par M. Abramescu.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1248. Soient A′, B′, C′, H les pieds et le point de concours des hauteurs du triangle ABC. Démontrer les relations

$$\frac{1}{\mathrm{HA}.\mathrm{HA}'} = \frac{1}{\mathrm{HB}.\mathrm{HB}'} = \frac{1}{\mathrm{HC}.\mathrm{HC}'} = \frac{1}{\mathrm{AA}'.\mathrm{HA}} + \frac{1}{\mathrm{BB}'.\mathrm{HB}} + \frac{1}{\mathrm{CC}'.\mathrm{HC}}.$$

Les quadrilatères inscriptibles BCB′C′, CAC′A′ donnent HA.HA′ = HB.HB′ = HC.HC′. Si l'on multiplie les trois dernières fractions respectivement par HA.HA′, HB.HB′, HC.HC′, la somme devient $\frac{\mathrm{HA}'}{\mathrm{AA}'} + \frac{\mathrm{HB}'}{\mathrm{BB}'} + \frac{\mathrm{HC}'}{\mathrm{CC}'}$ ou 1.

1249. Déterminer les constantes A, B, α, β, de telle façon que le polynome

$$x^3 - 6x^2 + 15x + 14 \qquad (1)$$

soit, égal à l'expression $\mathrm{A}(x+\alpha)^3 + \mathrm{B}(x+\beta)^2$, quel que soit x. — Déduire du résultat la résolution de l'équation (1).

(*Agrégation de l'enseignement secondaire des jeunes filles*, 1904).

1250. On a identiquement

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x+1)}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{1\cdot 2\cdots n} = \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{1\cdot 2\cdots n}.$$

Rectification. Supprimer la dernière ligne de la note de la page 236 (Voir Enestrom, *Bibliotheca mathematica*, (3), III, 204-207).

QUESTIONS PROPOSÉES.

1546. L'équation indéterminée

$$x^4 = 1 + ay^2$$

est impossible en nombres entiers si a est de l'une des deux formes

$$(10m - 3)(10m - 1), \qquad (5m - 2)(5m - 1)$$

débarrassées des facteurs carrés, m étant positif ou négatif. Exemples : $a = 2, 3$ (cas connus), 7, 17, 33, 37, 38, 42, 47, ... (A. Boutin).

1547. On considère une conique variable Γ passant par quatre points fixes A, B, C, D et une conique Σ donnée. Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle conjugué commun aux coniques Γ et Σ.

(Abramescu).

×**1548**. M étant un point quelconque du plan du triangle ABC, soient α, β, γ les milieux des droites MA, MB, MC. La parallèle menée par α à BC rencontre AC en B_a, AB en C_a; une construction analogue effectuée sur β et γ détermine les points C_b, A_b, A_c, B_c.

1° Démontrer que les droites B_aC_a, C_bA_b, A_cB_c forment un triangle $A_1B_1C_1$ égal à ABC ; 2° les côtés opposés de l'hexagone $B_aC_aC_bA_bA_cB_c$ sont égaux; 3° Les droites AA_1, BB_1, CC_1, B_aA_b, C_aA_c C_bB_c se coupent en un même point Γ qui divise la droite MG dans le rapport 3 : 1 (G est le barycentre de ABC). 4° Pour que l'hexagone $B_aC_aC_bA_bA_cA_c$ soit circonscriptible d'un cercle, il faut et il suffit que M soit situé sur la droite joignant G au centre I d'un cercle tritangent et que l'on ait GM = 4 GI.

(Sollertinsky).

1549. Soient A, B, C, D les pieds des quatre normales à une ellipse issues d'un point M de son plan. Trouver les lieux des points M tels que : 1° la somme des carrés des diamètres de l'ellipse passant par A, B, C, D soit constante; 2° la somme des carrés des diamètres conjugués de ceux passant par A, B, C, D soit constante. Trouver aussi, dans ces deux cas, les enveloppes des hyperboles d'Apollonius relatives à M, et les lieux de leurs centres. (E. N. Barisien).

×**1550**. Partager un trapèze donné par une droite parallèle aux bases en deux trapèzes partiels qui en tournant autour de cette droite engendrent des solides terminés par des surfaces équivalentes.

Même question pour une transversale perpendiculaire aux bases.

(J. Neuberg).

TABLE DES MATIÈRES (*).

×ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉ.

Pages.

Sur les triangles rectangles en nombres entiers, par M. Aubry 6

Sur les solutions entières et positives de l'équation $ax + by + cz = d$ par M. E. Barbette 125

Questions d'arithmétique par M. T. Hayashi et Verkaart 176, 215

Sur les nombres polygones, par M. de Rocquigny 215

Théorie de l'équation de Pell, par M. A. Aubry 283

Problème des pandectes et variantes, par M. Dressler 267

Question 1420; solution par M. Plakhovo 100

Question 1505; solution par MM Weber, Rose, etc. 138

Questions du concours d'admission à l'École militaire I, II; solutions par MM. Seam, Godeaux, etc. 181

Question 1514; solution par MM. Dupont, Prange, etc. 278

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

Les centres isodynamiques dans la résolution de l'équation du 3e degré, par M. Krahé. 61, 96

×Exercices de trigonométrie sphérique, par M. E. Barbette 93

×Problème de trigonométrie, par M. Delahaye 122

×Question 1466; solution par MM. Weber, Delahaye, etc. 17, 123

×Question 1490; solutions par MM. Barbette, Rose, etc. . . 23, 67. 101

×Questions des concours d'admission à l'École militaire III, V, VI; solutions par MM. Plakhovo, Seam 181, 183, 184

×Autre question du même concours; solution par M. Brocard 217

×Question 1516; solution par M. Rose 225

×Question du concours d'admission à l'École Polytechnique; solutions par Abramescu, Delahaye, etc 239

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE; MÉTAGÉOMÉTRIE.

Progrès de la géométrie élémentaire, par M. Darboux 41

Transformation d'un polygone en un carré, par M. Barbette. 59

Sur le pentagone inscriptible à une circonférence 66

(*) Pour les rectifications, voir pp. 95 144, 200, 279. — Les articles marqués d'une croix n'exigent pour être compris que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Pages.

Pro domo. Le point de Kariya (J. N. et V. Retali) 171, 158
Le théorème de Ménélaus en géométrie générale, par M. Ventura y Reyes 125
Sur les centres de similitude de deux cercles, par M. E. N. Barisien . . 156
Sur les médianes d'un triangle sphérique (A. C.). 157
Symétries successives par rapport à des axes concourants (J. N.) . . . 178
Sur le théorème de Pythagore (P. M.) 207
Propositions sur les quatrièmes puissances des côtés d'un triangle, par M. J. Neuberg. 259
Un théorème chinois de géométrie 268
Sur les principes de la géométrie, par M. P. Mansion. Supplément 2, pp. 1-5
Question 1478; solution par M. Emmerich. 20
Question 778; solution par M. J. Neuberg 71
Question 1471; solutions par MM. Emmerich, Weber, etc. 79, 96
Question 1501; solution par M. Dupont 136
Question 1410, 1412; solution par M. Déprez 156
Question IV du concours d'admission à l'École militaire; solution par M. Godeaux 182
Autre question du même concours; solution par MM. Brocard et Weber. 215
Question 1502; solutions par MM. Laisant, Dupont 198
Question 1528; solution par M. Abramescu 251
Question 1515; solution par MM. Dupont, Delahaye. 274

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Quelques théorèmes de Steiner; par M. Cl. Servais 90, 114
Sur les hyperboles circonscrites au triangle, par M. J. Neuberg. . . . 118
Sur les triangles autopolaires par rapport à une ellipse (J. N.) 125
Sur quelques coniques associées au triangle, par M. E. Weber, note de M. Brocard 148, 170, 246
Deux théorèmes sur les coniques (J. N.) 218
Sur une généralisation du théorème de Pascal, par M. Ventura y Reyes . 257
Sur un hexagone particulier, par M. J. Neuberg. Supplément 3, pp. 1-11
Solutions des questions de géométrie analytique posées au concours de 1904 et de 1905 en Belgique, par MM. Lez, Ploumen, etc. 43, 246
Question 1485; solution par M. Lez 50
Question 1489; solution par M. Dupont 53
Question 1160; solution par M. J. Neuberg. 98
Question 1491; solution par M. Lez. 102
Question 1495; solutions par MM. Lez, Sterkens, etc. 133
Question 1510; solution par MM. Lez, Rose, etc. 165
Question VII du concours d'admission à l'École militaire; solution par M. Weber 185

Pages.

Question 1493; solutions par MM. Abramescu et Bastin 223
Question 1508; solutions par MM. Rose et Neuberg. 249
Question 1453; solution par MM. Bastin et Neuberg 269
Question 1487; solutions par MM. Servais et Bastin 91, 271

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR; COURBES ET SURFACES TRANSCENDANTES; COMPLEXES.

Podaire de l'hypocycloïde de Steiner, par M. V. Jêrabek. Notes de MM. Brocard et Retali 206, 245
Une application de la théorie des réseaux. 213
Sur l'hélicoïde développable, par M. G. Gérard 241
Question 1365; solution par M. J. Neuberg 72
Questions 1415, 1416; solution par M. Gob. 76, 77
Question 1428; solution par M. Déprez 95
Question 1497; solutions par MM. Bastin Barrau, etc. 105
Question 1297; solutions par M. Meurice 128
Question 1311; solution par M. Brocard 129
Question 1443; solutions par MM. Emmerich, Déprez 131
Question 1498; solution par M. Abramescu 135, 179
Question 1357; solutions par MM. Rose, Bastin 159
Question 1476; solution par M. Orasanu 161
Question 1469; solution par M. Jêrabek 186
Question 1491; solutions par MM. Déprez, Dupont 191
Question 1480; solutions par MM. Brocard, Abramescu 219
Question 1483; solution par M. Rose 221
Question 1526; solution par M. Cesáro 228

CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; SÉRIES.

Sur l'aire linéaire de la surface engendrée par une figure invariable, par M. Wasteels 34
Exercices de calcul intégral, par M. E. N. Barisien. 58, 146, 175
Sur une transformation des figures sphériques, par M. Wasteels . . . 203
Question 1482; solution par MM. Abramescu et Rose 21
Question 1506; solution par MM. Abramescu 139
Question 1504; solution par MM. Abramescu, H. Brocard, etc 164
Question 1526; solution par M. E. Cesáro 229
Question 1534; solution par M. MM. Sterkens et Gino Loria 275

HISTOIRE; BIBLIOGRAPHIE; VARIÉTÉS.

Mémorial mathématique 1, 33, 57, 89, 113, 145, 169, 201
Notice sur les travaux de P. Tannery, par H. Bosmans, S. J. Suppl. 1, pp. 1-32
F. Klein. Umgestaltung des mathematischen Unterrichts (P. M.) . . . 13

Page

G. Lechalas. Géométrie générale (P. M.) 14
A. Liasse. Géométrie imaginaire et géométrie positive (P. M.) . . . 14, 67
G. de Galdeano. Calculo differential 15
L. Kiepert. Integral-Rechnung 15
Schlömlich. Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis I . . . 15
J. A. Serret-Bohlmann. Integral-Rechnung 16
Annuaire du bureau des longitudes (1905 et 1906) 17, 266
I. Fisher-N. Pinkus. Einleitung in die Infinitesimal-Rechnung (P. M.) . 49
G. Holzmüller. Einleitung in die Raumlehre 49
E. Netto. Elementare Algebra (J. N.) 68
Bardey-Seyffart. Aufgaben aus der Elementar-Arithmetik . . . 68
L. Lercangée et L. Libois. Résolution géométrique des formules de trigonométrie (J. N.) 69
G. Holzmüller. Lehrbuch der Elementar-Mathematik (J. N.) 69
H. Müller-Kutnewsky. Aufgaben aus der Arithmetik, etc. 70
Riemann's Werke. Nachträge 96
E. Czuber Wahrscheinlichkeitsrechnung 97
Alexandroff. Aufgaben aus der niederen Geometrie. 97
E. Barbette. Cours de trigonométrie (H. Mandart) 97
H. Poincaré-Lindemann. Wissenschaft und Hypothese (P. M.) . . . 151
J. Richard. Notions de mécanique 153
R. Marcolongo. Meccanica razionale 154
A. Fuhrmann. Aufgaben aus der analytischen Mechanik 154
G. Webster. The Dynamics 155
E. T. Whittaker. Analytical Dynamics 155
G. O James. Kinematics of a Point and Mechanics of a Particle. . . . 155
E. Picard, G. Darboux, H. Poincaré. Analyse, géométrie, physique mathématique (P. M.) 209
Allan Cunningham. Quadratic partitions 210
Fr. Haacke. Arithmetischer Lehrgang (J. N.) 211
R. Baire. Nombres irrationnels, limites, continuité (J. N.) 211
R. Gans. Einleitung in die Vektoranalysis (J. N.) 212
Variétés. A quoi servent les mathématiques (P. M.)? 239
F. Amodeo. Aritmetica razionale (E. Gelin) 244
Laguerre. Oeuvres (P. M) 263
L Königsberger. Jacobi (P. M) 263
E. Mach. La mécanique (P. M.) 264
Mathematiker-Kongress in Heidelberg 265
Encyclopédie des sciences mathématiques 266
W. Ahrens. Scherz und Ernst in der Mathematik 266

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 1191-1197, 1198, 1199-1203, 1204-1212, 1213-1222, 1223-1224, 1225-1235, 1236-1241, 1242-1247, 1248-1250 :

page 27, 55, 82, 109, 126, 141, 167, 195, 230, 254, 279.

Concours de l'enseignement moyen en Belgique (1904 et 1905). Questions de géométrie analytique 42, 245

Questions du concours d'admission à l'École militaire de Bruxelles. 84, 180, 215,

École polytechnique. Concours d'admission (1905) 128, 229

SUPPLÉMENTS (48 pages).

1 Notice sur les travaux de P. Tannery, par H. Bosmans, S. J. (32 pages)

2, Sur les principes de la Géométrie, par Paul Mansion (5 pages.)

3. Sur un hexagone particulier, par J. Neuberg (11 pages).

QUESTIONS.

Solutions de questions posées dans les deux premières séries.

778	XII,	176	71	1297	XX,	276	128
1160	XVIII,	56	98				

Questions résolues et non résolues des tomes I à V de la troisième série.

R = Résolue; NR = Non résolue.

Tome I

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
1311	88	129	1338	240	NR
1335	215	NR			

Tome II

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
1357	56	159	1374	152	NR
1365	104	72	1378	184	NR
1371	128	NR			

Tome III

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
1410,1412	56,80	156	1429	184	NR
1415bis	128	76	1443	264	131
1416	104	77	×1447	280	NR
1420	128	100	1448	280	NR
1428	194	95			

Tome IV

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
1451	32	NR	1476	152	161
1453	32	269	×1478	176	29
×1466	103	17, 123	1480	176	219
1467	104	NR	1481	215	NR
1469	128. 161	186	1482	215	21
×1471	128	79	1483	215	221

	POSÉE	RÉSOLUE
1485	216	50
1487	216	271
×1488	216	NR
1489	240	53
×1490	240	23, 67, 101
1491	240	102
1492	240	NR
1493	264	223
1494	264	191
1495	264	133
×1496	264	NR
1497	280	105
1498	280	135, 179
×1499	280	NR
1500	280	NR

Tome V

	POSÉE	RÉSOLUE
×1501	29	136
×1502	29	193
1503	29	249
1504	29	164
×1505	29	138
1506	55	139
1507	56	NR
1508	56	R
1509	56	R
×1510	56	165
1511	83	NR
1512	83	NR
1513	83	R
×1514	83, 110	273
×1515	84	R
×1516	111	225
×1517	111	R
1518	111	R
1519	112	R
1520	120	R
1521	144	R
1522	144	R
×1423	144	R
1524	144	R
×1525	144	NR
1526	168	228
×1527	168	R
1528	168	261
1529	168	R
1530	168	R
×1531	200	R
1532	200	R
1533	200	R
1534	200	275
×1535	200	R
×1536	232	R
1537	232	R
1538	232	NR
1539	232	R
×1540	232	R
1541	255	R
1542	256	R
×1543	256	R
×1544	256	R
1545	256	R
1546	280	NR
1547	280	NR
×1548	280	NR
1549	280	NR
×1550	280	NR

Questions des deux premières séries résolues mais non publiées.

(I-X) 358, 597. (XI-XX) 876, 892bis, 953, 1046, 1057, 1079, 1087, 1101, 1107, 1177, 1275.

Questions non résolues des deux premières séries (voir pp. 30 et 113).

(I-X) 513, 598. (XI-XX) 825, 905, 1123, 1144, 1220, 1225, 1228, 1233, 1240, 1246, 1247, 1271.

TABLE DES NOMS.

Cette table ne renferme pas tous les noms cités dans les comptes rendus d'ouvrages; quand un nom revient plusieurs fois dans un article, il n'est indiqué qu'une seule fois dans cette table.

Abel, 263.
Abramescu, 21, 25, 29, 56, 76, 78, 83, 105, 108, 129, 133, 135, 139, 144, 162, 164, 193, 219, 223, 227, 229, 250, 251, 274, 275, 279, 280.
Ahrens, 266.
Alba (De), 28, 198.
Alexandroff, 97.
Allué (Claro), 274.
Al-Karhi, 7.
Amodeo, 244.
Angelescu, 18.
Apastamba, 208.
Apollonius, 61, 77, 269.
Aubry, 6, 233.
Baire, 211.

Barbarin, 111.
Barbette, 23, 29, 45, 59, 84, 93, 97, 111, 125, 138, 226
Barisien, 29, 52, 55, 58, 83, 99, 103, 107, 123, 129, 131, 136, 139, 143, 144, 146, 156, 165, 168, 175, 196, 197, 200, 228, 230, 232, 255, 274, 280.
Bardey, 68.
Barlow, 177.
Barrau, 108.
Bastin, 21, 43, 54, 105, 134, 160, 165, 224, 269, 271.
Beltrami, 96.
Bertrand (E.). 264.
Bhaschara, 7, 236.
Bobillier, 275.
Bosmans, Suppl. 1.
Bohlmann, 16.
Boutin, 7, 32, 118, 178, 280.
Brahmagupta, 237.
Bricard, 269.
Brignon, 230, 274.
Brocard 217, 239, 245, 246.
Brounker, 236.
Bücherer, 212.
Cambier (A.), 20, 26, 67, 124, 144, 158, 197, 200.
Cantoni, 117, 159.
Cardoso-Laynes, 66.
Carnot, 148.
Catalan, 7, 30, 157.
Catania, 158.
Cavalieri 70.
Cauchy, 42.
Cesàro (E.), 31, 32, 96, 228.
Chassiotis, 232.
Claeys, 54.
Couvert, 96.
Cunningham, 210.
Cwojdzinski, 148.
Czuber, 97.
Dalle, 26.
Daniels, 159.
Darboux, 41, 209.
Degueldre, 111.
Delahaye, 18, 123. 229, 274.
Demeyer, 274, 275.
Demoulin, 117.
Déprez (J.), 30, 46, 71, 93, 112, 132, 157, 190, 191.
Despretz (R.), 21, 27, 45.
De Roy, 164.
Desboves, 82.
Descartes, 138.
De Vries, 96.
Dirichlet, 8 233.
Diophante, 6 239.
Dressler, 267.
Droz-Farny, 98, 275.
Duhem, 264.
Dupont (Fr.), 18, 25, 45, 53, 105, 108, 136, 138, 164, 165, 192, 194, 227, 274.
Eckhardt, 259.
Emmerich, 18, 20, 31, 73, 79, 95, 128, 131, 195.
Escott, 12, 137.
Euclide, 6, 14, 41, 98, 207.
Euler, 6, 31, 234.
Faure (P.),
Fermat, 8, 234.
Fibonacci, 6.
Fisher, 49.
Folie, 97.
Föppl, 212.
Francke, 117,
Frenicle, 6.
Fuhrmann (A.), 154.
Fuhrmann (W.), 55.
Galdeano (de), 15.
Galilée, 264.
Ganz, 212.
Gauss, 8.
Gelin, 244.
Gennäs, (B. A. F.), 9.
Gerard (Gustave), 241.
Gergonne, 20.
Giraud, 49.
Gisolff, 46.
Gob, 31, 76, 77.
Godaux, 180, 182, 230, 274.
Godt, 61.
Götting, 13.
Gournerie (de la), 159.
Gutzmer, 176, 268.
Haag, 83, 109.
Haake, 211.
Harnack, 16.
Haton de la Goupillière, 275.
Hatt, 17.
Hayashi, 176.
Hermite, 234, 262.
Heiberg, 266.
Hilbert, 265.
Hilton, 117.
Hoffmann, 176.
Holzmuller, 49, 69.
Houssais, 117.
Jacobi (C. G. J.), 263.
James, 155.
Janisch, 109.
Jeřabek, 187, 206, 245.
Kariya, 117, 158,
Kiepert (L.). 15, 171.
Klein (Felix), 13.
Königsberger, 263, 265.
Krahé, 61, 96.
Krazer, 265.
Kutnewsky, 70.

L. (G.), 43.
Lagrange, 8, 236.
Laguerre, 262.
Laisant, 193.
Lamé, 8.
Lebesgue, 8.
Lechalas, 14, 265.
Legendre, 8, 41.
Lemoine (E.), 20, 30, 118, 120, 171, 246.
Lenthéric, 6.
Lercangée, 69.
Lez (H.), 43, 50, 67, 82, 103, 107, 133, 137, 165, 193, 200.
Liasse, 14, 67.
Libois, 69.
Lieber, 79.
Liebmann, 16,
Liénard, 101.
Lindemann, 151, 239,
Lindt, 266.
Longchamps (G. de), 206, 213, 245.
Loria, 265, 276.
Lucas (Ed.), 8.
Lühmann, 79.
Mach, 264.
Mackay, 206.
Majcen, 41.
Mandart, 98, 118.
Mansion, 14, 15, 16, 49, 68, 98, 153, 208, 210, 241, 263, 264, 265, 266, suppl. 2
Marcolongo, 154.
Merrifield, 28.
Meurice (L.), 128.
Meyer (A.), 97.
Mikami, 268.
Möbius, 42.
Molk, 266.
Monge, 196,
Morel, 176.
Morley, 31.
Müller (C. H.), 266.
Müller (H.), 70.
Münger, 207, 245.
Naetsch, 16.
Nanson, 50.
Nesbitt, 195, 231.
Netto, 68, 266.
Neuberg, 10. 18, 21, 29, 32, 41, 56, 68, 69, 70, 72, 76, 83, 100, 105, 118, 124, 128, 135, 158, 162, 165, 168, 172, 179, 180, 187, 191, 193, 198, 200, 211, 212, 214, 221, 223, 232, 251, 255, 256, 259, 269, 276, 280, Suppl. 3.
Nicolescu, 213.
Nöther, 96.
Orasanu, 107, 125, 162.
Painlevé, 265.
Pascal, 257.
Paulmier, 100.
Pell, 233.
Picard (E.), 209, 264.
Plakhovo, 96, 100, 187, 139, 165, 190, 181, 227, 230, 274.
Ploumen, 25, 45, 247.
Poincaré, 151, 209, 262.
Poinsot, 42
Prange, 274.
Prestet, 237.
Pringsheim, 239, 266.
Proth, 9.
Ptolémée, 153.
Puydt (Ed. De), 110, 111, 114.
Pythagore, 207.
Realis, 10, 236.
Retali, 158, 246, 256.
Richard, 153.
Riemann, 96, 98.
Roberts,
Rocquigny (de), 9, 31, 215, 230.
Rose, 21, 26, 29, 56, 105, 110, 112, 139, 141, 159, 164, 165, 195, 196, 206, 221, 226, 250.
Rouché, 100, 262.
Ruff, 109.
Saint-Venant, 207.
Sanjana, 141, 167.
Schlömilch, 15.
Schoute, 125.
Schubert, 266.
Schuster, 97.
Seam (Erelav), 180, 183, 194, 186.
Segre, 265.
Serret (A.), 16.
Servais (Cl.), 80, 90, 114, 135, 273.
Seyffarth, 68.
Simson, 99, 256.
Sollertinsky, 30, 256, 280.
Speckman, 118.
Staudt (von), 42.
Steiner, 31, 53, 90, 98, 114, 148, 223, 245, 271.
Sterkens, 134, 276.
Stolp, 159.
Stuyvaert, 96.
Tannenberg, 96.
Tannery (Jules), 14, 266.
Tannery (Paul), 14, Suppl. 1.
Tücker, 21.
Van Aubel (H.), 168,
Van Dinter, 43, 165.
Ventura y Reyes, 125, 257.
Verkaart, 84, 215, 274.
Vogt. 266.
Vuibert, 27, 28, 96, 143, 218, 231.
Wasteels, (C. E.), 34, 208.
Weber (E), 18, 21, 79, 138, 148, 170, 18 184, 216, 246.
Webster, 155.
Whittaker, 155.
Wirtinger, 96.
Zeeman, 125.
Zermelo, 16.
Zeuthen, 16.

NOTICE

SUR LES

TRAVAUX DE PAUL TANNERY

Paul Tannery naquit à Mantes le 20 décembre 1843. Après de brillantes études d'humanités classiques, il entra à l'École Polytechnique, en 1861, âgé de dix-sept ans seulement, et en sortit dans le corps des Ingénieurs des Manufactures de l'État, dont il gravit successivement tous les échelons. Il était à Paris au commencement du siège et commanda, comme capitaine, la 2^{me} batterie du corps franc d'artillerie (service des mitrailleuses). Nommé, à la fin de sa vie, directeur de la Manufacture des tabacs à Pantin, il y est mort, muni des secours de la religion, le 27 novembre 1904.

Tannery avait fait deux parts de sa vie : les journées étaient données à son métier, les soirées consacrées à l'histoire des sciences. C'est dans ces veillées qu'il accumula tant de travaux si érudits et si divers. Très remarqués dès le principe, ils ne tardèrent pas à valoir à leur auteur une renommée européenne.

Comme historien des mathématiques et des sciences, Tannery était absolument sans rival en France, où nous chercherions vainement un nom qui pourrait, même de fort loin, lui être comparé. Peu connu, il est vrai, de la foule, il était apprécié à sa valeur par ceux dont le jugement importe. C'est ainsi que, malgré les devoirs de sa

charge d'ingénieur, on n'hésita pas, pendant cinq ans, de 1892 à 1896, à lui offrir au Collège de France la chaire de philosophie grecque et latine, en remplacement de M. Charles Lévêque ; Tannery accepta.

Récemment le Collège de France, à une grande majorité, l'Académie des Sciences, à la presque unanimité des suffrages, l'avaient désigné en première ligne pour occuper la chaire d'Histoire générale des sciences créée jadis pour M. Pierre Laffitte. C'était justice ; quand un pays possède un Paul Tannery, a dit, devant l'Académie de Padoue, l'illustre éditeur de Galilée, M. Favaro (1), il devrait se faire un honneur de créer, s'il le fallait, une chaire pour fournir à un savant d'une telle autorité l'occasion d'y monter : aussi, dans l'Europe entière, tous ceux qui s'intéressaient à la nomination de Tannery la regardaient-ils comme faite. Il n'en fut rien : pour des raisons d'antipathie politique et d'intrigue auxquelles la science n'avait rien à voir, M. Chaumié, ministre de l'Instruction publique, lui préféra M. Georges Wyrouboff, cristallographe de valeur et bon chimiste, dit-on, mais historien, à coup sûr, parfaitement inconnu.

Tannery supporta chrétiennement et dignement l'épreuve, mais il y fut fort sensible, et ses intimes nous apprennent qu'elle ne fut pas sans influence sur sa fin prématurée. Les témoignages unanimes de regrets et de sympathie que lui envoyèrent de partout les savants de toute opinion lui adoucirent cependant la déception, en lui montrant à l'évidence à quel point l'acte d'injustice qu'il venait de subir était universellement blâmé.

(1) *Paolo Tannery*. Nota commemorativa letta alla R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova, nell' adunanza del 15 Gennaio 1905, da Antonio Favaro.

Voir aussi, sur l'évincement de Paul Tannery, le jugement non moins sévère de M. G. Enestrŏm, dans son journal, BIBLIOTHECA MATHEMATICA (3. Folge, 5. Band, Leipzig, 1904, pp. 64-67).

I

Les premiers travaux de Tannery ont la plupart pour objet l'histoire scientifique, philosophique et littéraire de la Grèce ancienne. Ils débutèrent, à quelques années de distance, dans quatre recueils périodiques où chacun d'eux forme une longue série d'articles : le BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES de Darboux, les MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES DE BORDEAUX, les ANNALES DE LA FACULTÉ DES LETTRES DE BORDEAUX, la REVUE PHILOSOPHIQUE DE LA FRANCE ET DE L'ÉTRANGER.

On remarquera de prime abord la diversité de ces recueils.

C'est que Paul Tannery était un esprit vraiment universel. Les questions philosophiques eurent toujours pour lui un attrait singulier. Passionné en même temps pour son métier d'ingénieur, il était en outre passé maître dans la connaissance des langues anciennes. C'était bien plus qu'un géomètre qui se serait assez perfectionné dans l'étude du latin et du grec pour lire couramment les auteurs écrits dans ces langues ; sa maîtrise y était si complète qu'il faisait autorité même parmi les hellénistes de profession et que ceux-ci n'hésitèrent pas à l'élever à la présidence de la Société des Études grecques de France.

Le premier travail publié par Paul Tannery, dans le BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, date de 1879 et depuis lors sa collaboration y fut incessante. Ces articles sont souvent indépendants les uns des autres ; d'autres fois ils se font suite pour former un travail d'ensemble. C'est ainsi que l'une des séries les plus intéressantes a été réunie en volume sous le titre : *La Géométrie grecque. Comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons* (1).

(1) Première Partie (la seule qui ait paru), *Histoire générale de la Géométrie élémentaire*. Paris, Gauthier-Villars, 1887.

On est parfois soi-même son meilleur juge. Tannery a apprécié avec une admirable vérité ce volume et je ne puis mieux faire que de le résumer ici.

Et tout d'abord le titre pourrait faire illusion et laisser croire à une analyse des principaux ouvrages des géomètres grecs échappés aux invasions des Barbares et aux ruines accumulées à la fin de l'Empire romain. Tout autre est le but poursuivi par l'auteur. Il cherche à retracer l'histoire des précurseurs d'Euclide et à retrouver les étapes qui ont dû être parcourues pour pouvoir aboutir à la composition de cette œuvre hors de pair, les *Éléments*.

Pour connaître la géométrie grecque elle-même, il faut évidemment l'étudier dans les travaux originaux d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius et de Pappus, ou tout au moins dans leurs traductions. Mais indispensables pour nous mettre au courant des méthodes propres à la science grecque, ils sont insuffisants à qui veut connaître son origine, ses développements, en un mot, sa formation. L'histoire de la géométrie grecque, telle que l'entend Tannery, doit donc faire appel à d'autres sources.

Cette histoire avait jadis été écrite par Eudème. Malheureusement le récit d'Eudème est perdu et, seul, un fragment, assez considérable il est vrai, nous a été conservé par Proclus, dans son prologue au commentaire sur le premier livre des *Éléments* d'Euclide. C'est une étude approfondie du fragment d'Eudème qui fait le fond principal de la *Géométrie grecque* de Paul Tannery. Aidé d'une lecture immense, doué d'un sens critique très sûr, c'est merveille de voir les aperçus ingénieux qu'il a su y découvrir. Moins que tout autre cependant, il se faisait illusion sur leur valeur absolue : il reconnaissait que c'étaient souvent des conjectures et avouait leur caractère aléatoire et peu définitif. C'est ici surtout qu'il est aussi curieux qu'instructif de l'entendre se juger lui-même :

« Il faut, dans la critique d'érudition, dit-il (1), borner

(1) *La Géométrie grecque*, pp. 2 et 3.

son ambition au présent, et, sans trop préjuger l'avenir, s'efforcer d'assurer à ses opinions le plus possible de probabilité actuelle. Or à quoi se mesure cette probabilité ? En fait, c'est dans la proportion plus ou moins considérable d'adhésions rencontrées dans le cercle, d'ailleurs fort restreint, des érudits vivants s'occupant des questions dont il s'agit. A peine est-il besoin d'ajouter que, pour une évaluation effective, il conviendrait d'introduire des coefficients personnels. Un savant comme Moritz Cantor, comme Friedrich Hultsch, comme J. L. Heiberg, en vaut plusieurs autres ; mais il ne réclame, ni ne peut réclamer l'infaillibilité. Quant à ceux qui ont disparu de la scène et que parfois on invoque encore, ils ne comptent plus guère, ils n'ont pu peser les nouveaux arguments, enfin et surtout, ils n'étaient pas dans le courant d'idées actuel.

» Pourquoi insisté-je sur ce dernier point ? Je vais chercher à l'expliquer, d'autant plus qu'il s'agit d'un élément considérable dans l'appréciation des opinions.

» Voici déjà la dixième année depuis que j'ai commencé à publier sur l'histoire des sciences quelques-unes de mes conjectures personnelles. A partir du moment où mes humbles essais ont commencé à attirer l'attention, il est une question que j'ai souvent eu à me poser : pourquoi telle hypothèse, que j'émettais presque sans preuves, souvent à titre de simple possibilité, rencontrait-elle un assentiment général ? Comment telle autre, au contraire, que je m'étonnais d'être le premier à soutenir, tant elle me semblait naturelle, tant elle ressortait invinciblement pour moi de l'ensemble des faits, comment trouvait-elle des adversaires ? Étudiais-je des travaux étrangers, je voyais surgir devant moi le même problème : tel point qui à mes yeux ne faisait pas l'ombre d'un doute, telle question qui me semblait devoir se régler en quelques mots devenait l'objet de discussions approfondies, de polémiques sérieuses et prolongées.

» Comment expliquer tout cela, du moins dans une certaine mesure ? »

La cause en est, répond Tannery, dans l'état des idées prédominantes. De là, ces brusques variations dans les courants d'opinion ; ces changements imprévus qui se produisent « par suite du travail interne accompli chez chaque érudit, ou en raison du renouvellement continu des savants qui attirent le plus l'attention par leurs travaux » (1).

Hâtons-nous de le dire, exactes en ce qui concerne sa *Géométrie grecque*, ces réflexions, écrites par Tannery d'un ton un peu découragé et pessimiste, ne sauraient être généralisées ni s'étendre à l'ensemble de ses travaux. Dans sa *Géométrie grecque*, il se mouvait sur le terrain le moins solide de l'histoire de la science, mais ailleurs le sol se raffermit singulièrement sous ses pieds. C'est, par exemple, le cas pour les études qu'il donnait vers la même époque aux MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES DE BORDEAUX.

Ces études, d'un tout autre caractère que les précédentes, sont d'un bien plus grand intérêt pour le mathématicien. Tannery y aborde les ouvrages des géomètres grecs eux-mêmes, y expose leurs méthodes, y critique leurs démonstrations, dans des pages auxquelles seules les discussions de l'illustre Zeuthen sur les *Coniques dans l'antiquité* (2) peuvent être comparées. Les méthodes du calcul arithmétique de Héron, celles de Pappus, la quadrature du cercle d'Archimède, les lunules d'Hippocrate de Chio, la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide, le système astronomique d'Eudoxe, enfin et surtout l'*Almageste* de Ptolémée en font les principaux frais. Cette étude sur l'*Almageste* parut aussi en volume

(1) *O. c.*, p. 4.

(2) *Die Lehre von den Kegelschnitte im Altertum*, von Dr H. G. Zeuthen. Deutsche Ausgabe... besorgt von Dr R. V. Fischer-Benzon. Kopenhagen, 1886.

séparé sous le titre : *Recherches sur l'Histoire de l'Astronomie ancienne* (1). Ingéniosité des aperçus, richesse d'érudition, sûreté de critique, tout contribue à en faire le travail le plus original et le plus approfondi qui ait paru sur la *Grande Composition* de Ptolémée depuis Delambre.

Écrits par un ingénieur doublé d'un helléniste, tous les morceaux dont je viens de parler se distinguent par ce cachet particulier qu'un technicien imprime naturellement à l'explication d'un texte qui ne saurait lui cacher de secrets de métier. Ce mérite, le lecteur s'attendait à le trouver chez Tannery. Mais il en découvre bientôt un autre plus imprévu, je veux dire : une connaissance universelle de la littérature grecque dont Tannery fait preuve à tout instant. Philosophes, historiens, poètes même lui sont aussi familiers que les géomètres et les astronomes. Aussi est-ce sans surprise qu'on le voit pendant longtemps apporter sa contribution annuelle aux ANNALES DE LA FACULTÉ DES LETTRES DE BORDEAUX. Voici quelques échantillons des sujets qu'il y traite : la Chronologie des Philosophes antésocratiques, le Noyau de l'Iliade, la Géographie de l'Odyssée, la Question de l'authenticité des manuscrits de Tacite. Mais je ne veux rien exagérer : si ces petites notes sont parfois tracées de main d'ouvrier, elles n'atteignent cependant ni les travaux de grande envergure nommés ci-dessus, ni ceux qui vont suivre.

Il en va tout autrement des articles publiés dans la REVUE PHILOSOPHIQUE DE LA FRANCE ET DE L'ÉTRANGER. Ces articles ont eu pour ainsi dire deux éditions. Écrits d'abord sous forme de notes détachées, tantôt plus courtes, tantôt plus longues, jetées sur le papier au fur et à mesure que les idées de l'auteur se classaient et se précisaient, leur première rédaction laissait difficilement entrevoir soit un plan d'ensemble, soit même une idée

1) Paris, Gauthier-Villars, 1893.

dominante. Or cette idée dominante existait cependant, mais il fallait la mettre en lumière. Tannery retravailla donc son œuvre, la corrigea et la compléta, pour finir par en composer ce beau volume intitulé : *Pour l'Histoire de la Science Hellène* (1).

« La Science Hellène ! J'entends par là, dit-il, celle qui naquit et grandit dans les pays de langue grecque, pendant la période d'environ trois siècles qui s'écoule depuis l'époque des âges légendaires, jusqu'à celle des conquêtes d'Alexandre. » Les premiers penseurs grecs sont, de par la tradition, considérés comme philosophes. Leurs opinions ont donc été étudiées surtout par les philosophes. Quant aux historiens des sciences particulières, physique, médecine, astronomie ou autres, ils ont d'ordinaire admis, sans plus ample informé, les conclusions des historiens de la philosophie. C'est à tort. Jusqu'à Platon, les penseurs hellènes n'ont pas été des philosophes dans le sens actuel de ce mot, mais des *physiologues* comme on disait alors, c'est-à-dire des savants. Le noyau des systèmes des anciens *physiologues* n'a jamais été une idée métaphysique, mais bien la conception générale que chacun d'eux se faisait du monde. C'est de leur conception concrète du monde qu'ils s'élevèrent peu à peu aux abstractions qui devinrent plus tard le domaine propre de la philosophie, tandis que les savants s'en désintéressaient de plus en plus. Dès lors, pour reconstituer ce noyau, il faut faire passer en première ligne les opinions spéciales des *physiologues* sur les divers points de la physique, les rattacher entre elles et expliquer, s'il se peut, leur filiation historique.

C'est, on le voit, un ordre d'idées à suivre aussi contraire que possible à celui que réclame l'histoire de la philosophie, dans lequel les opinions des philosophes sont mises au dernier rang et par conséquent plus ou moins négligées.

(1) Paris, Alcan, 1887.

Sans être le moins du monde un ouvrage à thèse, *Pour l'Histoire de la Science Hellène* est le développement de cette pensée. Tannery s'y attache d'autant plus que cette idée n'avait germé chez lui que peu à peu, qu'elle était née à la lecture des textes, avait mûri par la réflexion et ne procédait d'aucun système préconçu, ni formé *à priori*.

II

Ces premiers travaux de Tannery furent fort remarqués et mirent immédiatement leur auteur en évidence, surtout à l'étranger. Cependant, malgré leur variété, ils ne laissaient guère entrevoir l'infatigable chercheur de manuscrits et de documents inconnus, le savant éditeur de tant d'auteurs anciens et de géomètres du XVII^e^ siècle qui devaient être son principal titre de gloire.

A ce point de vue, l'année 1886 marque une date dans sa vie.

Il donne d'abord, dans l'ANNUAIRE DE L'ASSOCIATION POUR L'ENCOURAGEMENT DES ÉTUDES GRECQUES EN FRANCE, le *Traité de Manuel Moschopoulos sur les carrés magiques* (1). Ce traité, adressé à un certain Nicolas Rhabdas, est un essai byzantin du XIV^e^ siècle, dans lequel Manuel explique un genre de récréations mathématiques, dont plusieurs savants se sont encore occupés de nos jours et notamment Ahrens et Édouard Lucas. Le *Traité* de Moschopoulos n'était pas inconnu. La Hire, l'ayant rencontré accidentellement dans le manuscrit 2448 de la Bibliothèque Nationale, l'avait analysé (2); plus récemment Siegmund Günther en avait même publié le texte grec (3);

(1) 20^e^ année, pp. 88-118.

(2) MÉMOIRES DE MATHÉMATIQUE ET DE PHYSIQUE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, année 1709, p. 162.

(3) *Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, Leipzig, Teubner, 1876, pp. 195-203; les variantes sont p. 267 et 268.

mais malheureusement le manuscrit de Munich dont s'était servi Günther était si défectueux, qu'il rendait une réédition désirable. Tannery la donna d'après le manuscrit « Supplément grec, n° 652 » de la Bibliothèque Nationale, dont le texte était particulièrement correct.

En cette même année 1886, Tannery publiait son premier document ancien, dans ces NOTICES ET EXTRAITS DES MANUSCRITS DE LA BIBLIOTHÈQUE NATIONALE (1) qui allaient désormais recevoir de sa plume tant d'œuvres remarquables. C'étaient les *Deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas*, dont il donnait le texte grec et la traduction française, avec une introduction, des notes et des commentaires. Pièces curieuses, s'il en fût, uniques en leur genre ! Par quelle fatalité sont-elles restées si peu connues ?

Qu'on ouvre cependant les MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES DE BORDEAUX, qu'on y lise les recherches de Tannery sur l'arithmétique des Grecs dans Héron et dans Pappus, on le verra : l'*arithmétique* des Grecs, c'est-à-dire leur théorie des nombres, est assez bien connue ; mais pour leur *logistique* au contraire, c'est-à-dire l'art du calcul élémentaire, on en est réduit aux conjectures. Or c'est précisément un traité de *logistique* que l'on trouve dans les deux lettres de Rhabdas.

Le problème n'en est pas pour cela complètement résolu, car Rhabdas, nous venons de le dire, ne vécut qu'au XIV^e^ siècle de notre ère. Mais il écrivit à Constantinople, loin de toute influence étrangère à l'hellénisme, fidèle à l'ancienne numération écrite et parlée des Grecs. Sa première lettre est un traité élémentaire des quatre opérations fondamentales de l'arithmétique, la deuxième contient des considérations à peine un peu plus relevées. C'est le seul ouvrage connu de tout le moyen âge byzantin qui puisse passer pour un traité de calcul, et par conséquent un témoin hors de pair de la tradition ancienne.

(1) Tome XXXII, 1^e^ partie, pp. 121-252.

Toujours en 1886, Tannery donne encore aux NOTICES ET EXTRAITS DES MANUSCRITS ses *Fragments d'onomatomancie arithmétique* (1). Ces fragments sont des morceaux étranges et difficiles à analyser en peu de mots. Leur but est de faire connaître un mode de divination d'après les noms propres. L'intérêt du procédé qui y est indiqué est de constituer un argument sérieux pour établir, chez les Grecs, la connaissance de la *preuve dite par neuf*.

Dès l'année suivante, en 1887, Tannery entreprend de nouveau dans l'ANNUAIRE DE L'ASSOCIATION POUR L'ENCOURAGEMENT DES ÉTUDES GRECQUES EN FRANCE, la publication d'un texte fort étendu, mais d'un genre très différent des précédents, le *Traité sur le grand et le petit, par Théodore Prodrome, à Italicos* (2).

Théodore Prodrome est bien connu par tous ceux qui se sont occupés des auteurs byzantins. Mais avant la publication de Tannery on n'en possédait que quelques vers et des opuscules en prose. Le *Traité sur le grand et le petit* le montre sous une autre face et le fait connaître comme commentateur d'Aristote.

Voilà donc une série d'ouvrages importants, aussi variés que nombreux, mais qui s'adressaient tous au monde des érudits. Intéressant un public aussi restreint, leur mise au jour ne pouvait guère prendre les proportions d'un événement littéraire. Il allait bientôt en être autrement, et c'est le moment de nommer les *Œuvres de Diophante*.

III

Les *Diophanti Alexandrini Opera omnia* (3) sont le chef-d'œuvre de Paul Tannery. Et tout d'abord, mieux encore que pour les *Œuvres de Fermat* ou *de Descartes*,

(1) Tome XXXI, 2e partie, pp. 231-260.
(2) 21e année, pp. 104-119.
(3) Lipsiae, in aedibus B. G. Teubneri, vol. I, 1893 ; vol. II, 1895.

une longue suite de travaux préparatoires nous permettent de deviner quelle ténacité il a dû déployer pour mener à bien une entreprise aussi ardue.

Une question préliminaire se présentait : vers quelle date vivait l'algébriste grec ? C'est l'objet d'une note publiée, en 1879, dans le BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES : *Sur l'époque où vivait Diophante*. Tannery le croit contemporain de Pappus, ce qui le reporterait au III^e^ siècle de notre ère.

Mais c'était là un problème secondaire et il y en avait un autre tout autrement malaisé à résoudre : arriver à comprendre, parfois même à deviner Diophante. On sait combien les erreurs des copistes l'avaient rendu inintelligible.

Tannery fit des méthodes de Diophante l'objet d'une série de quatre études, intitulées respectivement : *Les problèmes déterminés ; L'analyse indéterminée algébrique ; Les problèmes indéterminés des livres II et III ; Les problèmes indéterminés des quatre derniers livres*. C'est un commentaire magistral du mathématicien grec, le seul digne de ce nom écrit en français. Malheureusement il parut à Stockholm, et la BIBLIOTHECA MATHEMATICA (1), si connue depuis qu'elle s'édite à Leipzig, n'avait pas encore la notoriété dont elle jouit aujourd'hui. Le commentaire de Tannery passa à peu près inaperçu.

Cependant, tout en étudiant le fonds même de l'algèbre de Diophante, l'infatigable travailleur réunissait lentement, mais avec persévérance, les éléments d'une édition critique. Dès 1884, dans le BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, il faisait connaître son sentiment *Sur la perte de sept livres de Diophante* et réfutait les savants qui niaient cette perte.

En cette même année 1884, il résumait dans les ANNALES DE LA FACULTÉ DES LETTRES DE BORDEAUX, le

(1) Stockholm, année 1887, pp. 37-43, 81-88 et 103-108 ; année 1888, pp. 3-6.

résultat de ses recherches *sur les manuscrits de Diophante qui sont à Paris*. Ces manuscrits, au nombre de cinq, ne sont pas les plus importants. Tannery se voyait dans la nécessité de les collationner avec d'autres et notamment avec les manuscrits du Vatican et celui de l'Escurial.

Pour remplir la première partie de ce programme, il se fit donner par le Gouvernement français une mission d'un mois en Italie, qui dura du 24 janvier au 24 février 1886. Il en rendit compte, suivant l'usage, dans les Archives des Missions (1). Au moment où il écrivait ce rapport, il ne connaissait encore le manuscrit de l'Escurial que par les catalogues et des renseignements de seconde main. Il est vrai que, parmi ceux-ci, il y avait ceux de J. L. Heiberg. A sa demande, le savant danois avait examiné le manuscrit de l'Escurial et le faisait remonter au XIII^e^ siècle ; dès ce moment, Tannery en soupçonna l'importance. Un voyage qu'il fit plus tard, en Espagne, le confirma dans son opinion et c'est ce manuscrit qu'il se décida à prendre comme base de son édition de Diophante.

Il y a deux manières de concevoir la publication d'un manuscrit. Chacune d'elles a ses avantages et ses inconvénients, mais, à un moment donné, l'une des deux méthodes peut s'imposer à l'exclusion de l'autre.

On peut publier le texte d'un manuscrit *diplomatiquement*, c'est-à-dire brutalement, tel qu'il est, en conservant ses imperfections et ses fautes. C'était la méthode invariablement suivie par Curtze. C'est aussi par moments celle de Tannery lui-même dans ses *Œuvres de Fermat* et *de Descartes*. Cette méthode s'impose chaque fois qu'on veut dégager, avec ses nuances, l'idée personnelle d'un écrivain, des transformations que lui ont fait subir les éditeurs successifs. Dès lors, c'est presque toujours la meilleure pour les éditions savantes.

(1) 3^e^ série, t. XIII, 1889.

Encore faut-il qu'elle soit possible. Et qui n'aperçoit la première des conditions qu'elle suppose : l'existence d'un autographe, ou tout au moins d'une copie fidèle ? Or c'est rarement le cas pour les classiques grecs et latins.

Tenons-nous-en à Diophante. Il en existe une vingtaine de manuscrits, tous incomplets, tous plus défectueux les uns que les autres, tous rendus parfois inintelligibles grâce aux fautes accumulées par des copistes distraits et ignorants. Ce n'est plus une édition *diplomatique*, c'est une édition *critique* qui est nécessaire alors, pour connaître la pensée de l'auteur. Il faudra donc commencer par se livrer à un travail minutieux de comparaison et de contrôle et tâcher de reconstituer le texte. Or si l'on veut remarquer que deux conditions au moins sont indispensables pour cela — comprendre la pensée de l'écrivain et en manier la langue comme sa langue maternelle — je n'hésite pas à l'affirmer, seul en France, seul peut-être en Europe, Tannery était capable de donner une édition critique de Diophante.

Le premier volume contient les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones, en un mot, tout ce qui nous reste, à proprement parler, de Diophante lui-même. Mais il fallait les mettre à la portée des mathématiciens. Tannery imagina pour cela une traduction à sa façon. Se contentant de suivre phrase par phrase le texte grec, il en exprime la pensée en langage algébrique moderne. « Les philologues, disait-il, préféreront toujours l'original grec à une traduction. » Ce n'était donc pas pour eux qu'il écrivait. Quant aux mathématiciens, leur donner une version latine servile, c'était, d'après lui, obscurcir encore davantage les passages peu clairs. Il avait raison et la preuve en était faite dans les éditions anciennes de Xylander, de Bachet, de Méziriac et de Samuel Fermat. Quoi qu'il en soit, c'est plaisir de suivre les raisonnements

de Diophante dans les égalités et les équations de Tannery.

Le second volume ne renferme plus une ligne de Diophante lui-même, mais il est formé par un recueil de textes en partie inédits, tous fort utiles pour l'appréciation de son ouvrage. Ce sont, dans l'ordre suivi par Tannery : 1° Des fragments mathématiques anciens faussement attribués à Diophante par trois manuscrits de Paris ; 2° La collection peu nombreuse (ils sont seulement au nombre de quatre) des *testimonia* anciens sur Diophante. On y remarquera la longue et curieuse lettre de Psellus, découverte par Tannery et donnée d'après les manuscrits de Madrid et de Paris ; 3° Les épigrammes arithmétiques de l'*Anthologie* avec leurs scolies ; 4° La paraphrase du Livre I de Diophante par Georges Pachymère ; 5° Le commentaire de Maxime Planude ; 6° Un choix de *Scholia Vetera* du manuscrit de Madrid et de ceux de sa famille.

Ces documents, destinés exclusivement aux historiens de la science, étant sans grand intérêt au point de vue des mathématiques pures, Tannery a cru, avec raison, superflu d'y ajouter une traduction latine.

IV

Mais comment préparer une édition de Diophante sans se laisser séduire par son immortel annotateur Fermat (1) ? Tannery ne résista pas au charme, et ses premières études sur Fermat sont presque contemporaines de ses plus anciens travaux sur Diophante. Elles ne parurent pas, il est vrai, sous son nom personnel, mais on en a la substance dans le *Supplément* au travail intitulé *Recherches*

(1) Voir sur Fermat : *Précis des Œuvres Mathématiques de Fermat*, par P. Brassinne. Paris, Mallet Bachelier, 1853 (Extrait des MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE TOULOUSE).

sur les Manuscrits de Pierre de Fermat, suivis de Fragments de Bachet et de Malebranche, publié par Ch. Henry, dans le BULLETTINO du prince Boncompagni (1).

Charles Henry, un nom à retenir, à associer à celui de Paul Tannery, car bientôt ils vont collaborer ensemble, pour nous donner les *Œuvres de Fermat*.

Les vicissitudes subies, dès l'origine, par la publication des *Œuvres de Fermat* sont connues. Lorsque, le 12 janvier 1665, Pierre de Fermat mourut à Castres, où l'avait appelé son service de conseiller au Parlement de Toulouse, il était tenu pour le plus grand géomètre de l'Europe; mais ce n'était guère par les livres que son nom s'était répandu dans le monde savant. Lui-même, d'ailleurs, n'avait fait imprimer qu'une seule dissertation géométrique et encore avait-il gardé l'anonyme. Cet opuscule parut en 1660, comme annexe d'un volume publié à Toulouse, sur la cycloïde (2), par le Père jésuite Lalouvère. Ce dernier faisait en même temps connaître, comme étant dues à Fermat, mais publiées sans son aveu, diverses autres propositions intéressantes. Annexe et propositions passèrent à tel point inaperçues, que Samuel Fermat les oublia dans l'édition des *Œuvres* de son père. Tannery les découvrit et appela, le premier, l'attention sur elles dans son article *Pascal et Lalouvère* (3).

(1) BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, t. XIII, Rome, 1880, pp. 437-470.

(2) Veterum geometria promota in septem de Cycloide libris, et in duabus adjectis Appendicibus. Autore Antonio Lalovera Societatis Jesu, Tolosae, apud Arnoldum Colomerium, Regis et Academiae Tolosanae Typographum. M.DC LX. Cum privilegio.

Ce morceau figure comme *Pars Prior* de l'*Appendix secunda*, pp. 391-395.

(3) MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES DE BORDEAUX, 3e série, t. V, 1890, pp. 55-84.

Quelques années plus tard cet article fut suivi d'un second publié dans le même recueil (4e série, t. IV, 1894, pp. 251-259) sous le titre : *Pascal et Lalouvère, 2e note*, par Paul Tannery. L'occasion lui en fut fournie par les *Fragments inédits de Pascal*, publiés dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, (t. V, 1879, pp. 693-698) et que Tannery ne connaissait pas lorsqu'il écrivait le premier article.

Les *Œuvres de Fermat* parurent en 1679, à Toulouse, sous le titre de *Varia Opera D. Petri de Fermat Senatoris Tolosani* (1). C'était un monument de la piété filiale élevé à la mémoire paternelle par Samuel Fermat. Mais sept ans auparavant Samuel Fermat avait déjà publié, à ses frais et sans privilège, une réédition du *Diophante, par Bachet*, avec les notes et commentaires de son père. Il y donnait, en même temps, le *Doctrinae analyticae inventum novum, collectum ex variis D. de Fermat Epistolis, par de Billy.*

Quant aux lettres de Fermat, on n'en avait pas, à proprement parler, d'édition. Plusieurs d'entre elles étaient célèbres. Grâce à Mersenne elles avaient circulé entre savants, et ce mode de publicité remplaçait, au XVII^e^ siècle, celui des recueils périodiques. Quelques-unes avaient été publiées de côtés divers, parfois du vivant même de l'auteur, notamment dans le *Commercium epistolicum* de Wallis ; mais le plus grand nombre s'était perdu.

Varia Opera, notes sur Diophante et lettres, devinrent bientôt fort rares. C'était un malheur, mais ce qui était plus regrettable encore, on savait que c'était loin d'être tout ce qu'avait écrit Fermat. Si le conseiller au Parlement de Toulouse rédigeait peu, il lisait et annotait ses livres. Or, quand un lecteur annote ses livres, c'est chez lui une habitude, dit quelque part Tannery. C'était dans les marges et au bas des pages que Fermat avait annoté Diophante, et ces notes prouvaient le prix des réflexions qu'il écrivait au courant de ses lectures. La correspondance de Fermat était, elle aussi, bien loin d'avoir été imprimée en entier. Le besoin d'une réédition des *Œuvres complètes de Fermat* se faisait donc sentir depuis longtemps et, dès le 28 avril 1843, Villemain, alors ministre de l'Instruction publique, prenait l'initiative d'un projet

(1) Cette édition a été reproduite par la photogravure en 1861 : « Novo invento usi expresserunt R. Friedlander et Filius, Berolini, MDCCCLXI. »

de loi pour faire cette publication aux frais de l'État. La direction en fut confiée à Libri.

Je n'ai pas à redire ici comment ce projet échoua à la suite de l'obscure affaire des vols du trop fameux bibliomane. Mais, ce qui concerne plus spécialement les vicissitudes des manuscrits de Fermat, leur perte momentanée, l'heureux concours de circonstances par lesquelles plusieurs d'entre eux devinrent la possession du prince Boncompagni, l'édition de quelques autres par M. Ch. Henry, dans le BULLETTINO du prince (1), tout cela a été raconté par Tannery lui-même, dans l' « Avertissement » des *Œuvres complètes de Fermat*.

Dans le plan primitif, les *Œuvres de Fermat* (2) avaient trois volumes. On a reconnu depuis la nécessité d'alléger les tomes II et III, et, pour être complètes, les *Œuvres* doivent en comprendre un quatrième qui n'a pas encore paru. Il contiendra des suppléments et les tables.

En ouvrant le tome I, l'œil est d'abord arrêté par deux belles gravures hors texte : le portrait de Fermat et un fac-similé du titre des *Varia Opera* de 1659. Vient ensuite, sous le nom d' « Avertissement », l'histoire complète des manuscrits et des ouvrages imprimés de Fermat, par Paul Tannery. Les éditeurs y ont joint la photogravure hors texte d'une page de l'écriture du conseiller géomètre.

Le corps même du tome I a deux parties. La première, intitulée *Œuvres diverses*, est, somme toute, la réédition des *Varia Opera* de 1659, mais avec quelques modifications de détail. C'est que dans les *Varia Opera* on n'apercevait guère la classification adoptée par Samuel Fermat, ou, pour mieux dire, il n'y en avait pas. Les nouveaux éditeurs groupent les pièces par ordre de matières.

(1) *Recherches sur les manuscrits de Fermat, suivis de fragments inédits de Bachet et de Malebranche*. BULLETTINO, tome XII, 1879, pp. 477-568 et 619-740.

(2) Paris, Gauthier-Villars, tome I, 1891 ; tome II, 1894 ; tome III, 1896.

Autre innovation heureuse : au lieu de réunir à la fin des volumes toutes les pièces nouvelles, ils les ajoutent au fur et à mesure aux pièces anciennes à leurs places naturelles. Ce sont : la *Loci ad tres lineas demonstratio*, l'*Isagoge ad locos ad superficiem* adressé à Carcavi, la *Methodus de Maxima et Minima*, l'*Ad Methodum de Maxima et Minima Appendix*, le problème envoyé à Mersenne le 10 novembre 1642, la lettre écrite à Huygens sur l'équation du 45e degré d'Adrien Romain, la réponse aux Questions de Cavalieri, les propositions envoyées à Lalouvère dont nous avons parlé ci-dessus, enfin le *De cissoide fragmentum*.

La deuxième partie de ce volume est consacrée aux *Observations sur Diophante*, rééditées sans le texte assez inutile du géomètre d'Alexandrie, texte qui laissait d'ailleurs par trop à désirer dans l'édition de Samuel Fermat.

Vient enfin un « Appendice » de plus de cent pages, vraie troisième partie, dans laquelle on a réuni, d'une part tous les fragments de Fermat qui ne trouvaient pas leur place naturelle dans les deux premières, d'autre part un certain nombre de documents qui le concernent. Remarquons-y l'« *Éloge de Monsieur de Fermat, Conseiller au Parlement de Tolose*, du JOURNAL DES SÇAVANTS, du Lundy 9 février 1665 ».

Sauf ce dernier morceau et un autre, toutes les pièces du premier volume sont en latin.

Mais les *Varia Opera* sont d'une singulière incorrection au point de vue typographique. Les originaux font défaut, à une seule exception près, qui permet d'ailleurs de constater que Fermat écrivait assez rapidement pour ne pas éviter certains *lapsus calami*. Enfin, les quelques copies du temps qui nous ont été conservées laissent également à désirer.

Dans ces conditions, que faire ?

Donner avant tout un texte correct, soit pour le fond, soit pour la forme ; le restituer au besoin, en corrigeant

les fautes grossières, en ne reculant même pas devant certaines additions de mots ou de membres de phrases omis. Tannery et son savant collaborateur les ont cependant placés entre crochets d'intercalations facilement reconnaissables. Même règle pour les passages qui semblaient interpolés ; ils ont été mis aussi entre crochets, mais d'une autre forme.

La ponctuation des *Varia Opera* est aussi défectueuse que possible ; les éditeurs n'en ont tenu aucun compte. Ils n'ont pas davantage conservé la division en alinéas que comporte cette édition ; mais, recherchant avant toutes choses la facilité de la lecture, ils ont adopté une ponctuation conforme aux habitudes modernes et multiplié les alinéas. Dans le même but, ils ont mis à la ligne tout ce qui est équation ou peut être considéré comme tel.

Tannery ne s'était pas complètement rallié à certaines tentatives récentes de réforme de l'orthographe latine. Il conserve donc ici la distinction entre l'*i* et le *j*, l'*u* et le *v*, conformément à ce qui est resté, malgré tout, le plus en usage aujourd'hui. C'est d'ailleurs ce que faisaient les Elzevier, par exemple, dans l'édition de Viète de 1646.

La nouvelle édition de Fermat devait cependant pouvoir en tout remplacer l'ancienne ; l'orthographe des *Varia Opera* et celle des autres sources a donc été scrupuleusement notée dans les variantes rejetées à la fin du volume.

Dans tout ce travail Paul Tannery s'était spécialement chargé de l'établissement du texte et de la rédaction des notes, tandis que Charles Henry s'était plus particulièrement occupé de recueillir et de classer les documents.

Le second volume est consacré à la correspondance de Fermat et contient 118 pièces dont 81 lettres de Fermat, les unes en latin, d'autres en français. Tannery s'était réservé le soin des lettres des années 1636 à 1645 ; Charles Henry, celui des lettres des années 1646 à 1664. La traduction des lettres latines se trouve au tome III.

Ce tome III renferme, nous apprend le titre, les tra-

ductions, par Paul Tannery : 1° des écrits et fragments latins de Fermat, 2° de l'*Inventum novum* de Jacques de Billy, 3° du *Commercium epistolicum* de Wallis.

Je n'ai rien à dire, ni de la traduction de l'*Inventum novum* du Jésuite de Billy, ni de celle du *Commercium epistolicum* de Wallis, si ce n'est qu'elles sont parfaites.

Ce sont là, on le sait, deux pièces indispensables à l'intelligence des écrits de Fermat.

L'*Inventum novum* fait connaître toute cette partie, si négligée aujourd'hui, des recherches arithmétiques de Fermat qui intéressait le plus ses contemporains. Il donne la clef d'un grand nombre d'*Observations sur Diophante* et présente la solution de problèmes numériques vraiment difficiles. Peu abordable dans le texte latin, l'*Inventum* est néanmoins un complément indispensable des *Œuvres* de Fermat et ne vaut guère que par là. En soi, c'est un ouvrage de second ordre. Une réédition du texte original eût été sans objet, une traduction pouvait rendre de véritables services.

En ce qui concerne le *Commercium* de Wallis, il ne s'agissait que de faire mieux connaître en France une série de lettres très importantes pour l'histoire de la science, lettres dans lesquelles Fermat et ses découvertes jouent le principal rôle. Suffisamment répandu, soit dans l'édition *princeps*, soit dans celle des *Œuvres* de Wallis, une réédition présentait de nouveau peu d'intérêt, tandis qu'une traduction était des plus utiles.

Reste la partie la plus importante du volume : la traduction des écrits latins de Fermat lui-même.

A ce propos, Tannery réclame l'indulgence du lecteur. Sa version, assure-t-il, n'est pas ce qu'elle aurait pu être. Sans doute il y avait mis tous ses soins et il avait fait de son mieux ; mais on lui avait doublé la difficulté en l'obligeant à la publier en volume séparé. Quant à lui, il eût voulu la donner en regard du texte latin.

Je ne saurais lui donner tort et si, comparant Tannery

à Tannery, je rapproche sa traduction de Diophante de celle de Fermat, je ne fais pas difficulté de reconnaître que la première est effectivement encore supérieure à la seconde.

Surtout ne lui en faisons pas de reproches.

Lorsque texte et traduction peuvent se lire en regard, il est permis de sacrifier franchement à la clarté. C'est tout gain pour le mathématicien, c'est sans sérieux inconvénient pour l'historien de la science qui doit, par nécessité professionnelle, être assez philologue pour pouvoir contrôler par lui-même l'exactitude de la version qu'on lui présente. Dans une traduction séparée, il faut suivre l'original de plus près au risque d'être obscur. La difficulté est de trouver le juste milieu.

Tannery a donc dû traduire Fermat dans de fâcheuses conditions, obligé qu'il était de choisir à chaque instant entre deux tendances opposées, dont aucune ne pouvait être sacrifiée en principe : chercher à être clair en tenant compte des habitudes modernes, suivre assez fidèlement le texte pour ne pas en donner une simple paraphrase.

Pourquoi ces réflexions ? Ce n'est certes pas pour déprécier la traduction de Tannery. Mais, ayant fait un ouvrage excellent, il s'est attaché à nous apprendre lui-même, et avec insistance, ce qui l'avait empêché de le rendre meilleur encore : « Je ne me dissimule pas, dit-il, que du compromis que j'ai essayé entre ces deux tendances, il ne pouvait sortir une œuvre complètement satisfaisante (1). » Il convient de lui donner acte de cette déclaration.

Après cela, il ne faudrait pas prendre trop à la lettre les réserves qu'un excès de modestie lui a arrachées. Étant données les conditions qu'on lui imposait, on ne pouvait mieux réussir. Des multiples travaux de notre regretté confrère, le tome III des *Œuvres de Fermat* est même un

(1) *Œuvres de Fermat*, tome III, p. XI.

des meilleurs et en tous cas celui qui intéressera le plus le très grand nombre des mathématiciens.

V

Les *Œuvres de Descartes* (1), publiées par Charles Adam et Paul Tannery sous les auspices du Ministère de l'Intérieur et de l'Instruction publique, égalent au moins en importance les *Œuvres de Fermat* et les dépassent en étendue. Mais je ne veux pas encourir les reproches des lecteurs de la Revue, en leur répétant ce que M. G. Lechalas leur a déjà dit, mieux que je ne pourrais le faire. Je les renvoie aux savants comptes rendus qu'il a donnés des divers volumes de cette grande publication au fur et à mesure de leur apparition (2). Qu'il me suffise de rappeler en quelles circonstances la réédition des *Œuvres de Descartes* fut décidée.

La première édition des *Œuvres de Descartes* offrant quelque unité était celle de Victor Cousin (3), car les éditions précédentes, même celle de Blaeu en Hollande (4), n'étaient que des recueils factices conçus sans plan d'ensemble. Malgré le renom de l'éditeur, les *Œuvres de Descartes* par Victor Cousin n'étaient pas un chef-d'œuvre. Dans cette publication, faite tout entière en français, Cousin avait laissé de côté les textes originaux latins, il avait travaillé vite ; aussi les exigences de la critique, les progrès de l'érudition, lui firent bientôt reconnaître à lui-même (il en convenait de bonne grâce à la fin de sa vie) que son œuvre avait besoin d'être reprise.

(1) Paris, Cerf, in-4°, tome I, 1897 ; tome II, 1898 ; tome III, 1899 ; tome IV, 1901 ; tome V, 1903 ; tome VI, 1902. Les tomes I-V contiennent la correspondance qui est complète. Avec le tome VI commencent les œuvres.

(2) Revue des Questions scientifiques, t. XLIII, pp. 591-603 ; t. XLVI, pp. 236-241 ; t. XLVIII, pp. 272-280 ; t. L, p. 652-656.

(3) Onze vol. in-8°. Paris, Levrault, 1824-1826.

(4) Neuf vol. in-4°. Amsterdam, 1682-1701.

Plusieurs essais furent faits en ce sens sans aboutir. Il me faut rappeler au moins l'un d'eux, celui de M. Louis Liard, alors professeur à la Faculté des Lettres de Bordeaux. C'était vers les années 1874 à 1880. Si j'en parle ici, ce n'est pas que cet essai ait eu plus de succès que d'autres, mais Tannery s'y intéressa et dès lors il avait songé sérieusement à rééditer, avec l'aide de M. Liard, les *Œuvres de Descartes* (1).

Sur ces entrefaites, en 1884, la direction de l'Enseignement supérieur au Ministère de l'Instruction publique échut à M. Louis Liard et lui imposa d'autres devoirs. Ce premier projet n'eut pas de suites.

Cependant les recherches nécessitées par son édition des *Œuvres de Fermat* avaient conduit Tannery à faire une étude approfondie de la correspondance inédite de Mersenne. Il n'eut garde d'y négliger les lettres de Descartes. C'est ce qui lui permit d'apporter bientôt deux contributions de premier ordre à la correspondance et à l'histoire littéraire du philosophe français. D'une part il publiait, dans l'ARCHIV FÜR GESCHICHTE DER PHILOSOPHIE (2), quatorze lettres inédites de Descartes à Mersenne, soigneusement triées parmi les cinquante-sept pièces manuscrites que possèdent à elles trois, la Bibliothèque Nationale, la Bibliothèque Victor Cousin et la Bibliothèque de l'Institut (3) ; d'autre part il donnait, dans le BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, une étude magistrale sur ces mêmes lettres. Cette dernière existe aussi en volume séparé sous le titre : *La correspondance de Descartes, dans les inédits du fonds Libri, étudiée au point de vue de l'Histoire des Mathématiques* (4).

(1) L'ouvrage intitulé *Descartes*, par Louis Liard, recteur de l'Académie de Caen, Paris, Germer Baillière, 1882, in-8°, subsiste comme un témoignage durable de ces premiers travaux.

(2) Berlin, Reimer, 1891, t. IV, pp. 442-449 et 529-536 ; 1892, t. V, pp. 217-222 et 469-477.

(3) Années 1891 et 1892.

(4) Paris, Gauthier-Villars, 1893.

Mais le troisième centenaire de Descartes approchait. On ne pouvait mieux le célébrer que par une réédition de ses œuvres. M. Émile Boutroux l'annonça dans la Revue de Métaphysique et de Morale du 15 mai 1894, et le directeur de cette Revue, M. Xavier Léon, se fit le promoteur de l'entreprise. Paul Tannery était l'homme désigné pour en prendre la direction ; il se réserva surtout la partie scientifique. M. Charles Adam, après plus de dix années d'études sur l'histoire de la philosophie en France, dans la première moitié du XVII^e^ siècle, connaissait bien la partie philosophique des œuvres de Descartes ; c'était un collaborateur à souhait.

Le troisième centenaire de la naissance de Descartes fut célébré à la Sorbonne, le 31 mars 1896, entre philosophes et savants, sous la présidence de M. Liard. Après une allocution du président, la parole fut donnée aux deux collaborateurs, à M. Tannery pour une lecture sur *Descartes physicien*, à M. Adam pour une conférence intitulée : *A la recherche des papiers de Descartes* (1).

Bientôt M. Léon eut réuni, grâce à la publicité de sa Revue, un nombre suffisant de signataires pour l'édition prochaine. Le Ministère souscrivit pour deux cents exemplaires. Le 15 juillet 1896, la Revue de Métaphysique et de Morale donna, comme prime aux souscripteurs, un fascicule consacré tout entier à Descartes. Un comité international patronna la souscription, non seulement en France, mais dans l'Europe entière et jusqu'en Amérique. Dès lors le succès de l'entreprise était assuré. Le premier volume parut en 1897, et les autres lui succédèrent rapidement ; le dernier a été publié en 1903.

Et maintenant comment ne pas exprimer ici, à la fois, un regret et un vœu ? Les *Œuvres de Fermat*, les *Œuvres de Descartes* restent inachevées ! Mais Tannery a laissé

(1) Elles ont été publiées dans la Revue de Métaphysique et de Morale, Paris, t. IV, 1896, pp. 478-488 (Descartes physicien); pp. 573-583 (Autographes et copies manuscrites de Descartes).

de savants amis qui prendront sans doute à cœur de terminer son œuvre. On peut compter que les éditions nationales des œuvres de Fermat et de Descartes seront menées à bonne fin !

VI

A tout âge il est bon de se remettre par moments à l'école des maîtres, et Diophante, Fermat, Descartes sont des maîtres à la lecture desquels le géomètre s'instruit toujours. Voilà ce qui explique la prompte notoriété acquise aux rééditions de leurs œuvres et le succès de popularité qu'elles valurent au nom de Tannery. Il n'en est plus de même des quelques éditions dont il me reste à parler. D'intérêt moins général, elles sont exclusivement destinées aux historiens de la science ; aussi serai-je bref.

Et tout d'abord je ne m'étendrai guère sur *Une correspondance d'Écolâtres au XI^e^ siècle* (1). Aussi bien, ai-je autrefois présenté aux lecteurs de la Revue (2) Rodolphe de Liége et Ragimbold de Cologne, les deux épistoliers qui l'ont écrite. Je m'en réfère à ce que je leur en ai dit alors. Il me sera cependant bien permis d'insister une fois de plus sur l'importance de cette correspondance pour l'histoire scientifique et littéraire de notre pays. De toutes les publications de Paul Tannery, c'est celle qui intéresse le plus la Belgique. La *Correspondance d'Écolâtres* parut en 1901.

Tannery connaissait de longue date toutes les époques de l'histoire des mathématiques ; mais c'est vers la fin de sa vie qu'il s'intéressa plus particulièrement à l'état de l'enseignement des sciences au moyen âge. La première

(1) Notice et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Nationale, t. XXXVI, 2e partie, 1901, pp. 487-543.

(2) Dans mon *Bulletin d'Histoire des Mathématiques* d'avril, 1902, t. LI, pp. 669-673.

excursion sérieuse qu'il fit dans cette partie du domaine de l'histoire eut lieu en 1897. Elle eut pour objet la publication du *Traité du Quadrant de maître Robert Anglès*, dont il donnait le texte latin et une ancienne version grecque.

Ce *Traité du Quadrant* fut d'autant plus remarqué que deux ans plus tard le regretté Maximilien Curtze donnait à son tour, dans le *Cantors Festschrift* (1), une traduction allemande du même ouvrage : *Der Tractatus Quadrantis des Robertus Anglicus in deutscher Uebersetzung aus dem Jahre 1477* ; preuve évidente de la vogue dont ce manuel, autrefois classique, avait longtemps joui. Tannery a raconté récemment lui-même, dans le JOURNAL DES SAVANTS (2), l'histoire de cette double publication, presque simultanée, d'un même traité du moyen âge, et comment M. Moritz Cantor le mit, à cette occasion, en relations avec Curtze.

Robertus Anglicus, Robert l'Anglais ou Anglès, comme traduit Tannery sous la forme méridionale actuelle, était un maître enseignant à Montpellier, au XIII^e^ siècle. Son *Traité du Quadrant* est une géométrie pratique. L'auteur y enseigne les opérations d'arpentage (altimétrie et planimétrie) en y ajoutant les formules élémentaires pour les mesures des volumes et des surfaces. L'intérêt du *Traité du Quadrant*, bien que purement documentaire, est cependant considérable. Comme la *Correspondance d'Écolâtres*, il parut dans les NOTICES ET EXTRAITS DES MANUSCRITS DE LA BIBLIOTHÈQUE NATIONALE (3).

(1) ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK, Leipzig, Teubner, t. IX, 1899, pp. 41-43.

Tannery collabora à ce volume par un article intitulé : *Les Excerpta ex M.SS. R. Descartes*, pp. 501-513.

(2) Nouvelle Série, t. II, août 1904, pp. 461-463. Dans un article intitulé : *Maximilien Curtze, historien des Mathématiques*, qui est en même temps un compte rendu des *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mitelalter und der Renaissance*, par Curtze.

(3) Paris, 1897, t. XXXV, 2^e^ partie, pp. 561-640.

C'est au même recueil que Tannery donna encore les *Traités d'arpentage et de géométrie d'Epaphroditus et de Vitruvius Rufus* (1). Mais l'établissement du texte de cette édition est à proprement parler, cette fois, l'œuvre de M. Victor Mortet, et Tannery n'en a écrit que l'introduction. Cette publication a pour but de mettre à la disposition des savants un document nouveau touchant une question obscure et très complexe, je veux dire : les sources utilisées par les auteurs des deux compilations connues sous le nom de *Géométrie de Boëce* et *Géométrie de Gerbert* dont le rôle fut si considérable au moyen âge. Tannery avait à ce sujet des idées personnelles auxquelles il tenait beaucoup, idées qu'il savait défendre avec vivacité, par des arguments aussi ingénieux que solides.

VII

Nous venons de passer en revue les grandes éditions publiées par Paul Tannery ; il nous resterait à parcourir les articles et les notes qui ont vu le jour dans les recueils périodiques les plus divers ; mais ici l'énumération devient impossible. Une notice nécrologique que j'ai sous les yeux les évalue à plus de quatre cents ; je crois le chiffre beaucoup au-dessous de la vérité.

Les articles sont ou des articles originaux, ou des comptes rendus ; mais on aurait tort de distinguer les uns des autres. Tannery avait une manière à lui d'entendre le compte rendu que seule sa vaste érudition rendait possible. Quand il présentait au lecteur un livre de science ou d'histoire, il profitait le plus souvent de l'occasion qui lui était offerte pour exposer ses vues personnelles, soit sur le sujet qu'avait traité l'auteur, soit sur quelque sujet connexe. Les comptes rendus donnés dans le BULLETIN

(1) Paris, 1897, t. XXXV, 2e partie, pp. 311-359.

des Sciences Mathématiques sont des modèles du genre et souvent de vraies pages d'histoire. Il en est de même des innombrables réponses aux questions posées dans l'Intermédiaire des Mathématiciens que leur brièveté ferait bien à tort regarder comme négligeables. J'en pourrais citer beaucoup contenant des informations qu'on ne trouve que là. Et pour montrer au moins par un exemple l'importance que prenaient, à l'occasion, les petites notes et les comptes rendus de Tannery, n'est-ce pas une indication donnée dans un compte rendu des *Urkunden* (1) de Curtze qui a mis Favaro sur la voie et lui a fait écrire ces savantes pages dans lesquelles il dévoile l'anonyme qui se cachait sous le nom de Léonard de Crémone (2) ?

Quant aux articles originaux, ils sont eux-mêmes d'étendue et d'importance très diverses. Tannery avait pour habitude, dès qu'un point de philosophie, de philologie, de mathématique ou d'histoire s'éclaircissait à ses yeux, d'en faire l'objet de quelques pages et de les distribuer aux nombreux recueils périodiques qui se disputaient sa collaboration. La Bibliotheca Mathematica et la Revue des Études grecques furent, en ces dernières années, spécialement favorisées à cet égard. Elles n'étaient pas les seules, car on retrouve sa signature dans le Zeitschrift für Mathematik und Physik, la Revue Archéologique, la Revue de Philologie, la Revue générale des Sciences, les Annales de Philosophie chrétienne, la Revue de Philosophie, la Revue Critique, les Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences, le Bulletin de l'Académie des Inscriptions et bien d'autres.

Cependant les amis de Tannery le pressaient vivement de publier un livre d'ensemble. Quatre *Revues générales*

(1) Dans l'article du Journal des Savants, cité ci-dessus.
J'ai rendu compte ici des *Urkunden* de Curtze, dans mon *Bulletin d'Histoire des Mathématiques et des Sciences* de janvier 1904, t. LV, pp. 288-294.

(2) *Nuove ricerche sul Matematico Leonardo Cremonese*, Bibliotheca Mathematica, 3e série, t. V, 1904, pp. 326-341.

publiées dans la REVUE DE SYNTHÈSE HISTORIQUE (1), respectivement sur les *Mathématiques*, la *Mécanique*, la *Géographie* et l'*Astronomie*, montraient avec quel art il savait grouper les faits et en montrer l'enchaînement. Cédant aux instances qu'on lui faisait de toutes parts, il avait enfin promis d'écrire le livre qu'on lui demandait, l'avait même annoncé dans la REVUE DE SYNTHÈSE HISTORIQUE (2), en avait indiqué l'esprit et donné le plan. La mort est venue empêcher la réalisation de ce projet ; mais en réunissant les chapitres écrits par lui dans l'*Histoire générale* de Lavisse et Rambaud (3), on formerait un volume bien intéressant qui le suppléerait en partie.

Nous ne pouvons oublier cependant, ni le volume qui résume les travaux de la 5me section du Congrès international d'Histoire, tenu à Paris en 1900 (4), ni les notions historiques ajoutées aux *Notions de Mathématiques* de M. Jules Tannery (5), ni les notes historiques très nombreuses ajoutées au premier article de l'édition française de l'*Encyclopédie mathématique* (6).

Tannery n'a signé aucun article dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, mais il s'intéressait vivement aux publications de la Société scientifique et j'en ai eu à diverses reprises la preuve personnelle. J'avais publié dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, *Deux lettres inédites de Grégoire de Saint-Vincent* (7). Tannery prit aussitôt les devants et, convaincu de m'obliger, il m'en-

(1) T. I, 1900, pp. 179-185 ; t. II, 1901, pp. [illegible] ; t. IV, 1902, pp. 191-204 ; t. VI, 1903, pp. 301-316.

(2) T. VIII, 1904, pp. 1-16. J'en ai rendu compte ici dans mon *Bulletin d'Histoire des Mathématiques et des Sciences* d'octobre 1904, t. LVI, pp. 662 et 663.

(3) Douze volumes in-8°. Paris, Colin, 1893-1901.

(4) ANNALES INTERNATIONALES D'HISTOIRE. Congrès de Paris, 1900, 5me section. Paris, Colin, 1901. Tannery y publia lui-même une série très intéressante de lettres adressées au P. Mersenne (pp. 311-343) par des correspondants [illegible].

(5) Paris, [illegible], 1903.

(6) Paris, Gauthier-Villars, et Leipzig, Teubner, 1904.

(7) T. XXVI, 1902, [illegible].

voya le texte de deux autres lettres du Jésuite brugeois à Mersenne, possédées par la Bibliothèque Nationale, à Paris (1). Depuis lors il fut pour moi d'une courtoisie et d'une complaisance que rien ne pouvait lasser et, trois semaines à peine avant sa mort, gravement atteint déjà par la maladie, il m'envoyait encore un éclaircissement sur un point obscur des relations de Viète et d'Adrien Romain, qu'il croyait de nature à m'intéresser.

Les articles nécrologiques consacrés à la mémoire de Paul Tannery expriment unanimement le regret de la demi-obscurité dans laquelle il vécut en France. A l'étranger l'admiration qu'on avait vouée à ses travaux était sans réserve, et les témoignages d'approbation qu'ils reçurent aux récents Congrès de Rome, de Genève et de Heidelberg en sont la meilleure preuve.

H. Bosmans, S. J.

(1) Elles ont été publiées l'année suivante dans mes *Documents inédits sur Grégoire de Saint-Vincent* (Annales de la Société scientifique, t. XXVII, 1903, pp. 45-47).

SUR LES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE

PAR

PAUL MANSION
Professeur à l'Université de Gand

I

La géométrie non archimédienne est-elle une géométrie ?

Le principe d'Archimède (antérieur à Archimède; voir *Euclide*, V, déf. 4) est le suivant : « Si l'on se donne deux grandeurs homogènes, on peut toujours trouver un nombre entier n assez grand pour que n fois la première grandeur surpasse la seconde ».

La géométrie non archimédienne est une théorie où l'on étudie des entités mathématiques auxquelles le principe d'Archimède ne s'applique pas. Donnons-en une idée. Considérons les fonctions de t formées par addition, multiplication, soustraction, division et par l'opération $\sqrt{1+\omega^2}$, où ω désigne une fonction formée au moyen de ces cinq opérations. Toute fonction $\Omega(t)$, ainsi formée, pour t suffisamment grand, devient et reste à la fin positive ou négative.

De deux fonctions $\Omega(t)$, appelons la plus grande celle qui est telle que, si l'on en retranche l'autre, pour t suffisamment grand, la différence soit positive.

Ainsi $t - n$, *considéré comme fonction de t seul*, à la fin est positif pour t croissant ; donc t est dit plus grand que n, ou n plus petit que t.

Les fonctions de t dont il s'agit étant prises pour coordonnées ponctuelles d'un point (x, y, z), ou d'un plan $(u : v : w : r)$, la relation

$$ux + vy + wz + r = 0$$

sera dite l'équation d'un plan non archimédien; la droite non archimédienne est l'intersection de deux plans. On parvient, dans la géométrie algébrique correspondante, à définir des segments, et ces segments sont toujours plus grands que n fois l'unité de longueur, *dans le sens indiqué plus haut.* Le principe d'Archimède n'est donc pas applicable à ces segments.

Mais ces segments ne correspondent évidemment à aucune réalité géométrique. Car le principe d'Archimède est applicable aux grandeurs géométriques, si on laisse aux mots " *plus grand* " leur sens habituel : en effet, par définition, *les grandeurs sont ce qui tombe sous l'application de ce principe* et supposer que les distances ne sont pas des grandeurs, c'est supprimer la géométrie.

II

Ne peut-on pas dire d'une géométrie qu'elle est plus vraie qu'une autre ?

Cette question a été résolue négativement par M. Poincaré dans le livre intitulé *La Science et l'Hypothèse* (Paris, Flammarion; sans date; 284 pp., in-12) où il expose ses vues sur les principes fondamentaux de l'arithmétique, de la géométrie, de la mécanique, de la physique et, incidemment, du calcul des probabilités.

En 1904, M. F. Lindemann, l'habile géomètre qui, le premier, a prouvé que π est un nombre transcendant, a publié, avec M^me^ Lindemann, une traduction allemande du livre de M. Poincaré, augmenté de nombreuses notes explicatives, historiques ou bibliographiques, sous le titre : *Wissenschaft und Hypothese, autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen* (Leipzig, Teubner, 1904; xvi-342 pp. in-12, cartonné).

Les notes de M. Lindemann enlèvent à beaucoup d'assertions de M. Poincaré leur apparence paradoxale, parce qu'elles les mettent en relation avec les vues des savants contemporains qui ont abordé les mêmes sujets que lui et, par suite, permettent de leur donner un sens plus précis, disons plus raisonnable, que dans l'ouvrage original.

Nous allons le montrer, à propos de la question énoncée plus haut.

« Que doit-on penser de cette question, dit M. Poincaré : *La géométrie euclidienne est-elle vraie?*

» Elle n'a aucun sens. Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses; si les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses. Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre; elle peut seulement être *plus commode.*

» Or, la géométrie euclidienne est et restera la plus commode :

» 1° Parce qu'elle est la plus simple; et ce n'est pas seulement par suite de nos habitudes d'esprit ou de je ne sais quelle intuition directe que nous aurions de l'espace euclidien; elle est la plus simple en soi, de même qu'un polynome du premier degré est plus simple qu'un polynome du second degré;

» 2° Parce qu'elle s'accorde assez bien avec les propriétés des solides naturels, ces corps dont se rapprochent nos membres et notre œil et avec lesquels nous faisons nos instruments de mesure (*La Science et l'Hypothèse,* pp. 66 et 67). »

Il est évident que la seconde raison ne vaut rien; les propriétés du monde physique tout entier s'accordent aussi assez bien avec les géométries non euclidiennes suffisamment voisines de l'euclidienne. Ensuite, relativement au 1°, on peut remarquer que la géométrie euclidienne n'est pas plus simple que les géométries non euclidiennes dans toutes ses parties. Ainsi, le principe de dualité ou de corrélation est évident en géométrie riemannienne (et même en géométrie lobatchefskienne analytique), tandis qu'il ne l'est pas en géométrie euclidienne.

Dans les deux géométries non euclidiennes, la théorie de l'équivalence des figures planes est simple; elle est compliquée en géométrie euclidienne, quand on veut l'établir avec rigueur.

Mais d'où vient cette assertion de M. Poincaré : « elle est plus simple en soi, de même qu'un polynome du premier degré est plus simple qu'un polynome du second degré? » D'une manière spéciale, croyons-nous, d'envisager la géométrie non euclidienne, qui est très bien exposée dans la traduction allemande de M. Lindemann (Note 19, pp. 257 et suiv.).

Considérons, dans un espace euclidien, les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point, et les coordonnées analogues dans un espace lobatchefskien ξ, η, ζ, c'est-à-dire les sinus des rapports

des distances de ces points aux trois plans coordonnés à la constante lobatchefskienne, $2k$. Posons

$$\xi = \frac{2kx}{x^2 + y^2 + z^2 - k^2}, \qquad \eta = \frac{2ky}{x^2 + y^2 + z^2 - k^2},$$

$$\zeta = \frac{2k}{x^2 + y^2 + z^2 - k^2},$$

ou, en prenant le radical positivement,

$$x = \frac{\xi}{\zeta}, \qquad y = \frac{\eta}{\zeta}, \qquad z = \frac{1}{\zeta}\sqrt{(k\zeta + 1)^2 - \xi^2 - \eta^2 - 1}.$$

On trouvera alors, comme le dit M. Poincaré à la page 57 de son livre, qu'à tout point (ξ, η, ζ) de l'espace lobatchefskien correspond un point de l'espace euclidien situé au-dessus du plan $z = 0$, au plan ou à la droite du premier espace, une sphère ou un cercle coupant orthogonalement le plan $z = 0$, à la sphère, au cercle et à l'angle lobatchefskien, une sphère, un cercle, un angle euclidiens; la distance lobatchefskienne sera exprimée euclidiennement par le logarithme d'un certain rapport anharmonique, et ainsi de suite.

La transformation des propriétés de l'espace lobatchefskien en propriétés d'un demi-espace euclidien, leur donne une apparence compliquée; *à certaines expressions lobatchefskiennes du premier degré, correspondent des expressions euclidiennes du second.*

Au point de vue mathématique abstrait, on peut regarder comme équivalente la considération de deux figures transformées l'une de l'autre. De ce point de vue, on pourra dire évidemment que l'espace lobatchefskien, c'est-à-dire sa transformée euclidienne, est moins simple que l'espace euclidien, et en continuant la métaphore, que la géométrie lobatchefskienne est moins simple que la géométrie euclidienne, mais ce ne sera qu'une métaphore. On pourra dire aussi, toujours d'une manière métaphorique, que les propriétés de l'espace euclidien et celles du demi-espace euclidien, transformé de l'espace lobatchefskien sont aussi vraies les unes que les autres.

Mais, quand on abandonne ce langage conventionnel, peut-on dire avec M. Poincaré que la question, *La géométrie euclidienne est-elle vraie?* n'a aucun sens. Nous ne le pensons pas.

Supposons des êtres intelligents, à trois dimensions, situés sur une terre sphérique, assez petite, absolument sans rugosité, dont ils ne peuvent parcourir qu'une faible partie, et éclairés d'ailleurs par la lumière diffuse d'un ciel sans étoiles. Les physiciens de cette terre, par hypothèse, n'ont à leur disposition comme instruments de mesure que des règles admirablement divisées, mais ayant la courbure d'un grand cercle de la terre; pourront-ils déterminer le rayon de celle-ci? Évidemment oui, s'ils sont géomètres. Ils trouveront que le côté a et l'hypoténuse b d'un triangle sphérique rectangle isocèle, tracé sur leur terre, sont liés au rayon x de la terre par une relation de la forme

$$\cos\left(\frac{b}{x}\right) = \cos^2\left(\frac{a}{x}\right).$$

Or, pour a et b donnés, x a une seule valeur que l'on trouvera par le calcul.

Mais le problème que nous venons de traiter est précisément le même que celui de la détermination du paramètre de la géométrie réelle, en géométrie générale. Si le monde est riemannien ou lobatchefskien, et *si nous pouvons faire des mesures assez précises,* nous pourrons donc en déterminer le paramètre; nous pourrons dire alors quelle est la géométrie *vraie,* c'est-à-dire quelle est la géométrie réalisée dans la nature. Si le monde est euclidien, nous ne pourrons pas le savoir, parce qu'il est indiscernable d'avec un monde non euclidien suffisamment voisin; mais nous pourrons au moins dire que le monde est très approximativement euclidien.

Pour échapper à cette conclusion, il n'y a qu'un seul moyen, soutenir que nous ne pouvons pas réaliser une mesure de longueur droite, ou dans le cas de la sphère de tantôt, une mesure circulaire s'appliquant sur la surface de la sphère; dans les deux cas, cela revient à *nier toute possibilité d'une connaissance quantitative de la nature,* mais je doute que personne aille jusque-là (*).

(*) Extrait des Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1905, t. XXIX, première partie, pp. 196-200.

SUR UN HEXAGONE PARTICULIER

PAR

J. NEUBERG (Liége)

1. Le théorème de Pascal admet la réciproque suivante :

Si les côtés a, b, c *d'un triangle* ABC *sont coupés par une transversale* p *aux points* A_a, B_b, C_c, *trois droites quelconques* a', b', c' *menées respectivement par ces points, rencontrent* a, b, c *en six nouveaux points*

$$ab' \equiv A_b,\quad ac' \equiv A_c,\quad ba' \equiv B_a,\quad bc' \equiv B_c,\quad ca' \equiv C_a,\quad cb' \equiv C_b.$$

qui sont situés sur une même conique.

Nous supposerons ici que les droites a', b', c' passent par un même point D; l'hexagone de Pascal $A_bA_cB_cB_aC_aC_b$ présente alors cette particularité que trois côtés alternants a', b', c' concourent en un même point.

Il nous a paru intéressant d'étudier le système des ∞^4 coniques circonscrites aux hexagones $ab'ca'bc'$ qu'on obtient en laissant le triangle ABC fixe, et en donnant au *point directeur* D et à la *pascale* p toutes les positions dans le plan ABC. Ces courbes seront désignées par le symbole $[Dp]$.

ABC étant le triangle de référence, soient α, β, γ les coordonnées de D, et soient

$$p \equiv ux + vy + wz = 0\ (*),$$

$$p + lx = 0,\qquad p + my = 0,\qquad p + nz = 0$$

(*) Suivant un usage reçu, nous employons la même lettre pour désigner une ligne et le premier membre de son équation.

les équations des droites p, a', b', c'. Toute cubique passant par les neuf intersections des deux trilatères abc, $a'b'c'$, peut être représentée par

$$(p + lx)\ (p + my)\ (p + nz) - kxyz = 0.$$

Si l'on prend $k = lmn$, le facteur p se sépare, et il reste l'équation

$$p^2 + p\Sigma lx + \Sigma mnyz = 0,$$

qui représente la conique passant par les six points A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b.

Les paramètres l, m, n résultent des égalités de condition

$$p' + l\alpha = 0, \qquad p' + m\beta = 0, \qquad p' + n\gamma = 0,$$

p' désignant $u\alpha + v\beta + w\gamma$; l'équation définitive de la conique $[Dp]$ est donc

$$p^2 - pp'd + p'^2\delta = 0,$$

où l'on a posé

$$d \equiv \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}, \qquad \delta \equiv \frac{yz}{\beta\gamma} + \frac{zx}{\gamma\alpha} + \frac{xy}{\alpha\beta}.$$

2. Supposons le point D fixe et la droite p variable; les coniques $[Dp]$ sont alors au nombre de ∞^2.

Pour plus de facilité, nous signalons immédiatement trois lignes qui ne dépendent que de D et qui jouent un rôle important dans la suite.

Soient D_1, D_2, D_3 les points où les droites AD, BD, CD rencontrent respectivement a, b, c. Les côtés homologues des deux triangles ABC, $D_1D_2D_3$ se coupent en des points D'_1, D'_2, D'_3 qui sont les conjugués harmoniques de D_1, D_2, D_3 par rapport aux couples de points BC, CA, AB; ces points sont situés sur une droite d que l'on appelle la *polaire trilinéaire* de D et qui a pour équation $\Sigma \frac{x}{\alpha} = 0$.

L'équation $\delta = 0$ représente la conique qui touche en A, B, C les droites AD'_1, BD'_2, CD'_3. Celles-ci forment un triangle A'B'C' perspectif avec le triangle ABC par rapport au point D.

L'équation

$$\delta' \equiv \Sigma \frac{x^2}{\alpha^2} - 2\Sigma \frac{yz}{\beta\gamma} = 0,$$

représente la conique qui touche a, b, c en D_1, D_2, D_3.

Les triangles ABC et $D_1D_2D_3$, A'B'C' et ABC se correspondent dans une homologie H qui a pour centre D, pour axe d, pour constante d'homologie. — Les courbes δ et δ' se correspondent également dans la même homologie; elles ont un double contact sur la droite d, et D est le pôle de d dans les deux courbes.

Cela posé, l'équation (1) peut prendre les formes

$$p(p - p'd) + p'^2\delta = 0,$$

$$\left(p - \frac{1}{2}p'd\right)^2 = \frac{1}{4}p'^2\delta',$$

qui admettent l'interprétation suivante :

Étant données les coniques [Dp] *qui correspondent au même point directeur* D, *chacune de ces courbes rencontre sa pascale en deux points de la conique* δ; *ses deux autres points de rencontre avec* δ *sont sur une droite* f, *passant par le point* pd. *Ces courbes ont chacune un double contact avec la conique* δ', *la corde de contact* g *passe également par le point* pd.

Nous allons préciser la position des droites

$$f \equiv p - p'd = 0, \qquad g \equiv p - \frac{1}{2}p'd = 0.$$

La première est la polaire de D relativement à la conique [Dp], de sorte qu'elle passe par les conjugués harmoniques de ce point par rapport aux cordes B_aC_a, C_bA_b, A_cB_c; en effet, la polaire du point (α, β, γ) relative à la conique [Dp] a pour équation

$$pp' - \frac{1}{2}p'(p'd + 3p) + p'^2d = 0, \qquad \text{ou} \qquad f = 0.$$

Appelons h la droite qui joint D au point pd; son équation est $p - \lambda d = 0$, avec la condition $p' - 3\lambda = 0$. Or, le rapport anharmonique des quatre droites

$$p = 0, \qquad d = 0, \qquad p - \mu d = 0, \qquad p - \nu d = 0$$

étant $\mu : \nu$, on voit que

$$(pdfh) = (hfdp) = 3, \qquad (pdgh) = (hgdp) = \frac{3}{2};$$

d'où l'on déduit

$$(hdfp) = 1 - 3 = -2, \qquad (hdgp) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$(hdpg) = -2.$$

Par conséquent, f et p, p et g *sont des droites correspondantes de l'homologie* H.

3. Considérons maintenant la série simplement indéfinie de coniques [Dp] qui ont le même point directeur D et passent par un point donné M (x, y, z).

Les quantités $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$ jouent le rôle de constantes, et u, v, w celui de variables. De l'équation (3) on déduit

$$p - \frac{1}{2} p' (d \pm \sqrt{\delta'}) = 0; \tag{4}$$

appelons ρ_1, ρ_2 les quantités $\frac{1}{2}(d + \sqrt{\delta'})$, $\frac{1}{2}(d - \sqrt{\delta'})$.

Si M est à l'intérieur de la conique δ', ρ_1 et ρ_2 sont imaginaires; donc une conique [Dp] a tous ses points extérieurs à δ', à l'exception de ses points de contact avec δ'.

Prenons pour M un point quelconque de δ'; nous aurons

$$p - \frac{1}{2} p'd = 0,$$

résultat qu'on pourrait interpréter en coordonnées tangentielles (u, v, w). Mais il est plus simple d'observer que p et la corde de contact g des coniques [Dp], δ' se correspondent dans l'homologie H; donc la droite DM rencontre p en un point Q, homologue de M dans cette homologie. Ainsi, *les pascales de toutes les coniques* [Dp] *qui ont le même point directeur et touchent* δ' *au même point* M, *passent par un même point* Q *de la droite* DM; *lorsque* M *parcourt* δ', Q *décrit la courbe* δ.

Lorsque M est à l'extérieur de la conique δ', ρ_1 et ρ_2 ont des

valeurs réelles et inégales ; l'équation (4) exprime que la pascale passe par l'un des points de coordonnées

$$x = \frac{1}{2}\alpha(d + \sqrt{\delta'}), \qquad y = \frac{1}{2}\beta\rho_1, \qquad z = \frac{1}{2}\gamma\rho_1,$$

$$x = \frac{1}{2}\alpha(d - \sqrt{\delta'}), \qquad y = \frac{1}{2}\beta\rho_2, \qquad z = \frac{1}{2}\gamma\rho_2;$$

ces points sont situés sur la droite DM, appelons-les Q, Q'.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Lorsque le point directeur D *reste fixe et que la pascale* p *tourne autour d'un point fixe, la conique* [D*p*] *passe par un point fixe* M *de la droite* DQ ; *il existe sur cette droite un second point* Q' *tel que les droites menées par* Q' *soient également les pascales de coniques* [D*p*] *passant par le point* M.

Voici des cas particuliers remarquables :

a) Lorsqu'on prend pour pascale la droite DM, on a $p' = 0$ et l'équation (1) se réduit à $p^2 = 0$. La conique correspondante est alors la droite DM à compter deux fois.

b) Lorsque M est pris sur d, on a

$$\rho_1 + \rho_2 = 0, \qquad p \mp \frac{1}{2}p'\sqrt{\delta'} = 0;$$

donc les points Q, Q' divisent DM harmoniquement.

c) Supposons M situé sur δ ; l'équation (1) devient

$$p(p - p'd) = 0.$$

On a vu ci-dessus qu'une corde commune f des deux coniques δ, [Dp] passe par le point pd, et que f et p se correspondent dans l'homologie H. M étant situé sur f, la droite DM rencontre p en un point Q qui est l'homologue de M. De là ce théorème assez curieux :

Si M *et* Q *sont deux points correspondants des courbes* δ, δ' *dans l'homologie* H, *toute pascale menée par l'un de ces points donne une conique* [D*p*] *passant par l'autre point.*

4. Passons à l'examen des coniques [Dp] qui ont même pascale p et passent par un point donné M (x, y, z). Nous rencontrons ici des particularités que pour abréger nous avons négligées jusqu'ici.

L'équation (1), rendue entière, devient

$$(5) \qquad \alpha\beta\gamma.\Sigma^2 ux - \Sigma u\alpha.\Sigma\beta\gamma x.\Sigma ux + \Sigma^2 u\alpha.\Sigma\alpha yz = 0;$$

les variables sont maintenant α, β, γ.

Le point directeur D *décrit une cubique* Δ.

La pascale $\Sigma u\alpha = 0$ rencontre Δ aux points A_a, B_b, C_c, circonstance qui s'explique aisément : lorsque D est en A_a, par exemple, b' et c' se confondent avec p, et a' est une droite quelconque menée par A_a; la conique $[Dp]$ se compose donc de p et a', et on peut prendre pour a' la droite A_aM.

La droite a rencontre Δ en A_a et en deux autres points D_a, D'_a qui sont déterminés par l'équation

$$(6) \qquad vz\beta^2 - ux\beta\gamma + wy\gamma^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(7) \qquad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{1}{2vz}(ux \pm \sqrt{u^2x^2 - 4vwyz}).$$

L'équation $u^2x^2 - 4vwyz = 0$, si x, y, z sont des coordonnées courantes, représente une conique U_a qui est tangente aux droites b, c, p respectivement en C, B et au conjugué harmonique de A_a par rapport à B_b et C_c; si u, v, w sont les coordonnées courantes, elle représente une conique V_a qui passe par M et touche b en C, c en B.

Soient ρ_1, ρ_2 les deux valeurs (7) du rapport $\beta : \gamma$, et appelons M_1, M_2, M_3 les points de rencontre de a, b, c avec les droites AM, BM, CM. On a

$$(8) \qquad \rho_1 + \rho_2 = \frac{u}{v}\cdot\frac{x}{z}, \qquad \rho_1\rho_2 = \frac{w}{v}\cdot\frac{y}{z}.$$

Lorsque M est à l'extérieur de U_a, les valeurs de ρ_1, ρ_2 sont réelles et inégales. Les relations (8), où pour plus de facilité on considère α, β, γ et x, y, z comme des coordonnées barycentriques, donnent

$$(9) \qquad \frac{D_aC}{D_aB} + \frac{D'_aC}{D'_aB} = \frac{C_cA}{C_cB}\cdot\frac{M_2C}{M_2A},$$

$$(10) \qquad \frac{D_aC}{D_aB}\cdot\frac{D'_aC}{D'_aB} = \frac{A_aC}{A_aB}\cdot\frac{M_1C}{M_1B}.$$

Les égalités (10) et (9) conduisent aux propositions suivantes :

Lorsque M *parcourt la droite* AM_1, D_a *et* D'_a *sont des éléments conjugués de l'involution déterminée par les couples* BC, A_aM_1. *En faisant mouvoir* M *sur la droite* BM_2, *on obtient une autre involution dont* B *est un élément double et où* C *est conjugué avec le point* (a, M_2C_c).

Le cas de M situé sur U_a donne $\rho_1 = \rho_2$; D_a est alors un élément double de l'involution (BC, A_aM_1).

Voici une autre manière de déterminer les points D_a, D'_a. Si D est un point quelconque de a, les points ab', ac' se confondent avec D et les points ba', ca' tombent en C, B ; la conique $[Dp]$ se compose alors de a et d'une droite l joignant les points cb' et bc'. Il s'agit donc de trouver sur a un point D tel que cette droite l passe par le point donné M. Or, si l'on mène par M une droite variable qui rencontre b en N et c en N', le point d'intersection des droites B_bN', C_cN décrit une conique passant par A et touchant les droites MB_b, MC_c en B_b, C_c. Cette courbe coupe a aux points cherchés D_a, D'_a.

5. En écrivant l'équation (5) ainsi :

$$(5') \qquad \alpha\beta\gamma . \Sigma^2 ux + \Sigma u\alpha (\Sigma u\alpha . \Sigma\alpha yz - \Sigma ux \Sigma\beta\gamma x) = 0,$$

on voit que les points de rencontre du trilatère abc avec la cubique Δ sont les points A_a, B_b, C_c de p et six points D_a, D'_a, D_b, D'_b, D_c, D'_c situés sur la conique

$$(11) \qquad W \equiv \Sigma u\alpha . \Sigma\alpha yz - \Sigma ux . \Sigma\beta\gamma x = 0.$$

Cette courbe mérite de fixer notre attention. D'abord, son équation ne change pas quand on intervertit les coordonnées fixes (x, y, z) avec les coordonnées variables (α, β, γ). On peut la mettre sous la forme

$$u(yz\alpha^2 - x^2\beta\gamma) + v(zx\beta^2 - y^2\gamma\alpha) + w(xy\gamma^2 - z^2\alpha\beta) = 0.$$

Les trois parenthèses égalées à zéro représentent trois coniques W_a, W_b, W_c qui passent par M et touchent deux côtés du triangle ABC aux extrémités du troisième. Ces trois courbes et W ont en commun, outre le point M, deux autres points imaginaires que nous désignons par M_i, M'_i et qui ont pour coordonnées $(x, y\theta, z\theta^2)$,

$(x, y\theta^2, z\theta)$, où θ est une racine cubique imaginaire de l'unité. La droite $M_i M_i'$ a pour équation $\Sigma \frac{\alpha}{x} = 0$, c'est la polaire trilinéaire m de M; la vérification se fait aisément au moyen de l'égalité $1 + \theta + \theta^2 = 0$. Comme dans la définition des coniques W_a, W_b, W_c chacun des points M_i, M_i' peut se substituer à M, nous pouvons dire que le triangle MM_iM_i' est *autopolaire* par rapport au triangle ABC. Les points M_i, M_i' appartiennent à la conique $\Sigma \frac{x}{\alpha} = 0$ qui touche en A, B, C les droites joignant ces points respectivement aux points ma, mb, mc.

De l'équation (11), on déduit l'équation de la tangente au point $(\alpha', \beta', \gamma')$ de W sous la forme

$$\Sigma ux . \Sigma \alpha' yz + \Sigma u\alpha' . \Sigma \alpha yz - \Sigma ux . \Sigma x (\beta\gamma' + \beta'\gamma) = 0.$$

La tangente en M (x, y, z) est donc représentée par

$$3\Sigma u\alpha - \Sigma ux . \Sigma \frac{\alpha}{x} = 0;$$

on voit qu'elle passe par le point pm. On trouverait de même que les tangentes en M_i et M_i' passent par les points (p, MM_i'), (p, MM_i). Par conséquent, la conique W passe par les points M, M_i, M_i' et les tangentes en ces points rencontrent les côtés opposés du triangle MM_iM_i' sur la droite p.

Le discriminant de W est

$$-\frac{1}{4} xyz (\Sigma u^3 x^3 - 3uvwxyz);$$

la parenthèse est égale à

$$\Sigma ux . (ux + v\theta y + w\theta^2 z) (ux + v\theta^2 y + w\theta z).$$

On en conclut que la conique W dégénère dans l'une des hypothèses $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\Sigma ux = 0$.

La cubique Δ elle-même se décompose alors en trois droites.

En effet, lorsque le point directeur D est pris sur a, la conique $[Dp]$ se compose de a et d'une seconde droite l. Par conséquent, pour que la conique $[Dp]$ passe par un point M donné sur a, il faut prendre pour D un point quelconque des droites BC, B_bM ou

C_cM. La conique W se compose alors de a et de la droite joignant les points (c, B_bM), (b, C_cM).

L'hypothèse $\Sigma ux = 0$, qui place le point M sur la droite p, réduit l'équation (5) à $\Sigma^2 ua \,.\, \Sigma \alpha yz = 0$, de sorte que la cubique Δ est formée de la droite p à compter doublement et de la polaire trilinéaire m de M.

6. La conique $[Dp]$ peut-elle dégénérer en dehors des cas que nous avons déjà rencontrés?

Un calcul assez long donne pour le discriminant de l'équation (5) en x, y, z :

$$\frac{1}{4}\alpha\beta\gamma p'^4 \Sigma \omega\omega\alpha\beta;$$

le problème proposé est donc résolu par l'équation $\Sigma\omega\omega\alpha\beta = 0$.

On arrive plus rapidement à ce résultat en reprenant les équations des droites a', b', c' :

$$p - p'\frac{x}{\alpha} = 0, \qquad p - p'\frac{y}{\beta} = 0, \qquad p - p'\frac{z}{\gamma} = 0,$$

et en exprimant que les points $a'b$, $b'c$, $c'a$ sont sur une même droite p_1. Comme ces points vérifient les égalités

$$ux + \omega z - p'\frac{x}{\alpha} = 0,$$

ou

$$\left(\frac{p'}{\alpha} - u\right)x - \omega z = 0, \qquad \left(\frac{p}{\beta} - v\right)y - ux = 0, \quad \ldots\ldots,$$

la condition cherchée est

$$\left(\frac{p'}{\alpha} - u\right)\left(\frac{p'}{\beta} - v\right)\left(\frac{p'}{\gamma} - w\right) = -\,uvw,$$

ou

$$\frac{1}{\alpha u} + \frac{1}{\beta v} + \frac{1}{\gamma w} = 0. \tag{12}$$

La symétrie de ce résultat suffit pour démontrer que les points $a'c$, $b'a$, $c'b$ sont situés sur une seconde droite p_2.

L'équation (12) conduit aux propositions suivantes :

La conique [Dp] *est formée de deux droites* p_1, p_2, *lorsque le pôle trilinéaire* P *de* p *est situé sur la polaire trilinéaire* d *de* D.

Étant donnée la droite p, *le lieu des points* D, *auxquels correspondent des coniques* [Dp] *décomposables, est la conique* π *qui touche en* A, B, C *les droites* AA_a, BB_b, CC_c.

Étant donné le point directeur D, *l'enveloppe des droites* p *auxquelles correspondent des coniques* [Dp], *formées de deux droites* p_1, p_2, *est la conique* δ' *qui touche* a, b, c *en* D_1, D_2, D_3.

Si l'on observe que les coniques [Dp_1], [Dp_2] sont constituées par les couples de droites pp_1, pp_2, on conclut que les droites p_1, p_2 touchent également δ'. De plus, comme une conique [Dp] rencontre δ en deux points de p, les points pp_1, pp_2 sont situés sur δ. Donc :

Le triangle pp_1p_2 *est inscrit à* δ *et circonscrit à* δ'.

On peut rattacher les coniques [Dp] à la théorie de l'involution. D'abord, le théorème rappelé au début du présent travail peut être énoncé ainsi :

On joint un point D *aux sommets d'un triangle* ABC *par les droites* a_1, b_1, c_1, *et l'on mène par* D *trois nouvelles droites* a', b', c', *telles que les couples* a_1a', b_1b', c_1c' *appartiennent à une involution. Alors les points* aa', bb', cc' *sont sur une même droite et les points* ab', ac', bc', ba', ca', cb' *appartiennent à une même conique* [Dp].

Si cette conique dégénère, les points ab', bc', ca' sont sur une même droite p_2, et les points ac', ba', cb' sur une seconde droite p_1. Il en résulte que les couples de droites a_1b', b_1c', c_1a' sont en involution, de même que les couples a_1c', b_1a', c_1b'.

7. Pour terminer, nous indiquons la condition nécessaire pour que la conique représentée par l'équation générale

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2A'xy = 0,$$

rentre dans celles que nous venons d'étudier.

Les points de rencontre de cette courbe avec a sont définis par

$$x = 0, \qquad y = z\,\frac{-A' \pm \sqrt{A'^2 - BC}}{B}.$$

Si l'on convient de poser

$$A^2 - BC = A''^2, \qquad B'^2 - CA = B''^2, \qquad C'^2 - AB = C''^2,$$

on peut prendre pour coordonnées de ces points

$$\text{I} \ldots 0,\ -A' + A'',\ B; \qquad \text{II} \ldots 0,\ -A' - A'',\ B.$$

Semblablement les points de rencontre de b et c avec la courbe ont pour coordonnées

$$\text{III} \ldots C,\ 0,\ -B' + B''; \quad \text{IV} \ldots C,\ 0,\ -B' - B'';$$

$$\text{V} \ldots -C' + C'',\ A,\ 0; \quad \text{VI} \ldots -C' - C'',\ A,\ 0.$$

En formant les équations des droites (I, IV), (II, V), (III, VI) et en exprimant que ces lignes concourent en un même point, on trouve

$$\begin{vmatrix} (A' - A'')(B' + B'') & BC & C(A' - A'') \\ A(B' - B'') & (B' - B'')(C' + C'') & CA \\ AB & B(C' - C'') & (C' - C'')(A' + A'') \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$ABC\,[ABC - A'B'C' - 2A''B''C'' + \Sigma A'B''C'] = 0.$$

L'hypothèse $A = 0$ correspond à une conique passant par le sommet A du triangle de référence; les points IV et V coïncident en A et on peut prendre pour le point D l'intersection des droites (II, III) et (I, VI) ou celle des droites (I, III) (II, VI). On verrait de même que les hypothèses $B = 0$, $C = 0$ sont admissibles. Enfin, il y a une condition pour les coniques qui ne passent pas par l'un des sommets du triangle de référence; la forme *rationnelle* de cette condition paraît être assez compliquée (*).

(*) Extrait des Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1905, t. XXIX, première partie, pp. 186-196.

BRUXELLES — IMPRIMERIE POLLEUNIS ET CEUTERICK

on p

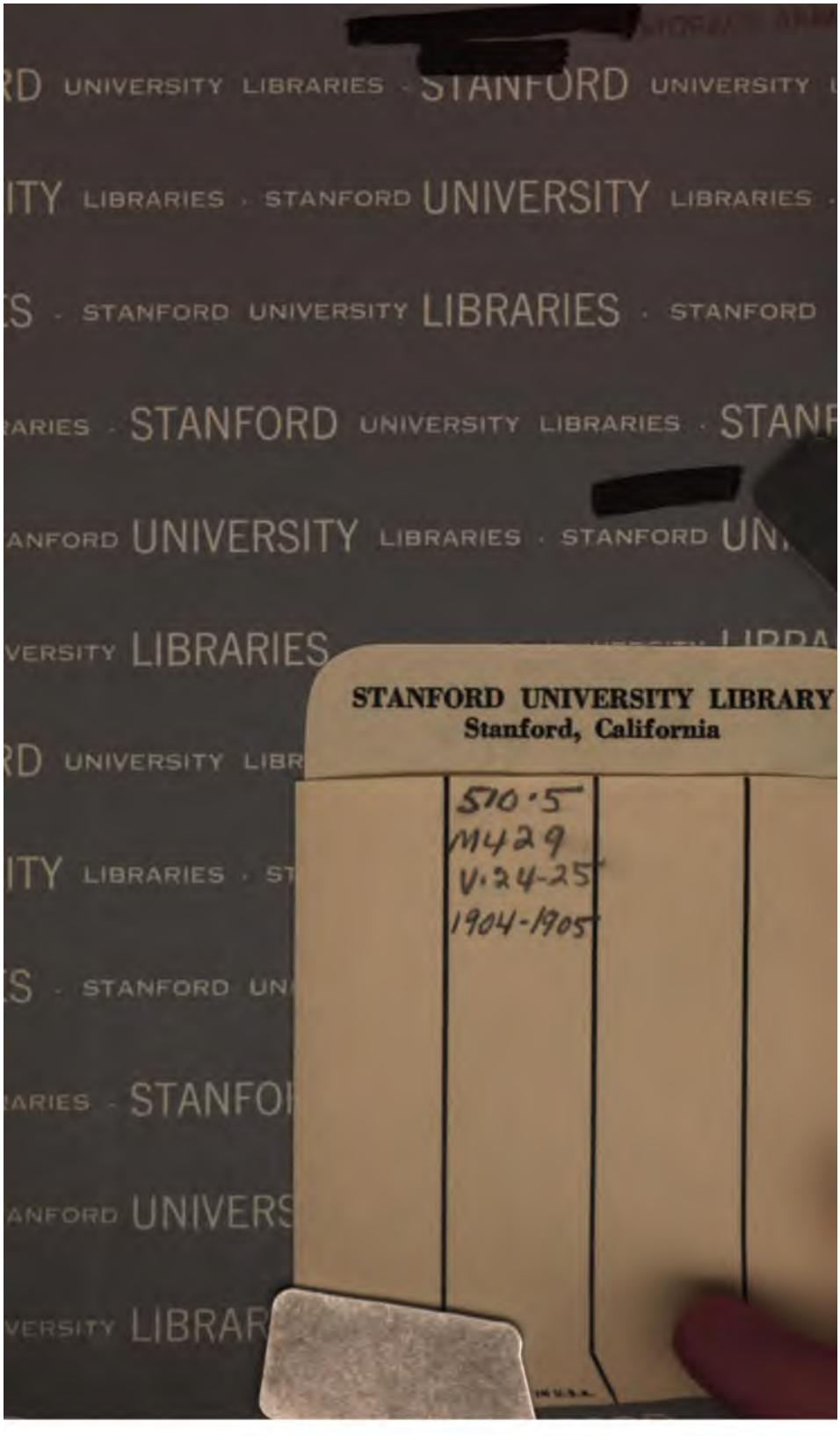
S
ont

e:

RIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · ST
NFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UN
RSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LI
D UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERS
TY L TY LIBRA
S · S STANF
RIES RIES ST
NFORD NFORD UN
RSITY RSITY LI
D UN D UNIVERS
TY L TY LIBRA
S · S STANF

To avoid fine, this book should be returned on or before the date last stamped below

50M-12-60-96483


STANFORD UNIVERSITY LIBRARY
Stanford, California
510·5
M429
V.24-25
1904-1905